

LEZIONE DEL 05/03/2007

(11)

## DERIVATE - TRASFORMATA DI PARK (CONTINUA DA LEZ. PREC.)

ABBIAMO VISTO LA CORRELAZIONE CHE ESISTE TRA  
DERIVATE DI GRANDEZZE E DERIVATE DELLE ANNESSE  
GRANDEZZE TRASFORMATE:

$$T_P \frac{dA(t)}{dt} = \frac{dA_P}{dt} + \Omega T_\Omega A_P = \begin{pmatrix} \frac{dA_{d2}}{dt} - \Omega A_{q2} \\ \frac{dA_{q2}}{dt} + \Omega A_{d2} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \bar{A}'_P = \frac{dA_{d2}}{dt} - \Omega A_{q2} + j \left( \frac{dA_{q2}}{dt} + \Omega A_{d2} \right) =$$
$$= \frac{d}{dt} (A_{d2} + j A_{q2}) + j \Omega (A_{d2} + j A_{q2})$$

CON NOTAZIONE COMPATTA SI OTTIENE:

$$\bar{A}'_P = (P + j\Omega) (A_{d2} + j A_{q2}) = (P + j\Omega) \bar{A}_P$$

DOVE "P" INDICA L'OPERAZIONE DI DERIVAZIONE.

SI È VISTO COME GLI ASSI DI RETTO E  
QUADRATURA SI INFLUENZINO A VICENZA, INFATTI  
OSSERVIAMO L'ESISTENZA DI UNA COMPONENTE  
TRASFORMATRICA E UNA COMPONENTE MOZIONALE.

LEGAMI TRA TRASFORMATTA DI SEQUENZA E  
TRASFORMATTA DI PARK:

(12)

$$A_S(t) = T_{S1} T_{S2} A(t) \rightarrow \text{TRASFORMATTA DI SEQUENZA}$$

$$A_P(t) = T_{P1} T_{P2} A(t) \rightarrow \text{TRASFORMATTA DI PARK}$$

$$\Rightarrow A_S(t) = T_{S1} T_{S2} T_{P2}^{-1} T_{P1}^{-1} A_P(t)$$

PER MAGGIORE COMPATTEZZA SI PONE:

$$T_{SP} = T_{S1} T_{S2} T_{P2}^{-1} T_{P1}^{-1}$$

ESPLICITANDO IL CONTENUTO DELLE MATRICI:

$$T_{S2} T_{P2}^{-1} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & \frac{1}{2} \\ \cos \theta_{26} & \sin \theta_{26} & \frac{1}{2} \\ \cos \theta_{2c} & \sin \theta_{2c} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 + \alpha \cos \theta_{26} + \alpha^2 \cos \theta_{2c} & \sin \theta_2 + \alpha \sin \theta_{26} + \alpha^2 \sin \theta_{2c} & 0 \\ \cos \theta_2 + \alpha^2 \cos \theta_{26} + \alpha \cos \theta_{2c} & \sin \theta_2 + \alpha^2 \sin \theta_{26} + \alpha \sin \theta_{2c} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

PRENENDO (COME ESEMPIO) L'ELEMENTO  $a_{11}$  DI QUESTA MATRICE:

NOTO CHE  $\theta_{26} = \theta_2 - \frac{2}{3}\pi$ ,  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$$\Rightarrow \boxed{a_{11}} = \cos \theta_2 + \alpha \left( \cos \theta_2 \cos \left( -\frac{2}{3}\pi \right) - \sin \theta_2 \sin \left( -\frac{2}{3}\pi \right) \right) +$$

$$\alpha^2 \left( \cos \theta_2 \cos \left( -\frac{4}{3}\pi \right) - \sin \theta_2 \sin \left( -\frac{4}{3}\pi \right) \right) =$$

$$= \cos \theta_2 \left( 1 + \alpha \frac{1}{2} - \alpha^2 \frac{1}{2} \right) + \sin \theta_2 \left( \alpha \frac{\sqrt{3}}{2} - \alpha^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$$

$$= \frac{3}{2} \cos \theta_2 + \frac{3}{2} j \sin \theta_2 = \boxed{\frac{3}{2} e^{j\theta_2}}$$

RAGIONANDO IN MANIERA ANALOGA PER TUTTI GLI ELEMENTI DELLA MATRICE  $T_{S2} T_{P2}^{-1}$ , SI OTTIENE:

$$T_{S2} \cdot T_{P2}^{-1} = \begin{pmatrix} -e^{-j\theta_2} & j e^{j\theta_2} & 0 \\ e^{-j\theta_2} & -j e^{-j\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_{SP} = \frac{k_{sd}}{k_b} \begin{pmatrix} -e^{-j\theta_2} & j e^{j\theta_2} & 0 \\ e^{-j\theta_2} & -j e^{-j\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_b}{k_{sd}} \cdot \frac{k_{so}}{k_o} \end{pmatrix}$$

PERTANTO, SVOLGENDO I CONTI  $[A_s(t) = T_{SP} A_p(t)]$ :

$$\begin{cases} A_{sd}(t) = \frac{k_{sd}}{k_o} e^{j\theta_2} (A_{d2}(t) + j A_{q2}(t)) \\ A_{si}(t) = \frac{k_{sd}}{k_o} e^{-j\theta_2} (A_{d2}(t) - j A_{q2}(t)) \\ A_{so}(t) = \frac{k_o}{k_{so}} A_o \end{cases}$$

PONENDO  $\frac{k_{sd}}{k_b} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  E  $\frac{k_o}{k_{so}} = 1$ , OVVERO

$$k_{sd} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad k_o = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad k_{so} = k_o = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} A_{sd}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\theta_2} \bar{A}_2(t) \\ A_{si}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_2} \bar{A}_2^*(t) \\ A_{so}(t) = A_o(t) \end{cases}$$

16

CASO DI STUDIO: REGIME SINUSOIDALE

$$\begin{cases} A_a(t) = \sqrt{2} A_a \cos(\omega t + \varphi_a) \\ A_b(t) = \sqrt{2} A_b \cos(\omega t + \varphi_b) \\ A_c(t) = \sqrt{2} A_c \cos(\omega t + \varphi_c) \end{cases}$$

L'IPOTESI È CHE SIA PRESENTE SOLO LA COMPONENTE DI SEQUENZA DIRETTA E INVERSA:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{sol}(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( A_a(t) + \alpha A_b(t) + \alpha^2 A_c(t) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left( A_a \cos(\omega t + \varphi_a) + \alpha A_b \cos(\omega t + \varphi_b) + \alpha^2 A_c \cos(\omega t + \varphi_c) \right) \end{aligned}$$

NOTO CHE  $\cos \beta = \frac{e^{j\beta} + e^{-j\beta}}{2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{A}_{sol}(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \left( A_a \left[ e^{j(\omega t + \varphi_a)} + e^{-j(\omega t + \varphi_a)} \right] + \alpha A_b \left[ e^{j(\omega t + \varphi_b)} + e^{-j(\omega t + \varphi_b)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2 A_c \left[ e^{j(\omega t + \varphi_c)} + e^{-j(\omega t + \varphi_c)} \right] \right) \end{aligned}$$

UTILIZZANDO LA NOTAZIONE FASORIALE SI OTTIENE:

$$\begin{cases} \bar{A}_a = A_{a(RMS)} e^{j\varphi_a} \\ \bar{A}_b = A_{b(RMS)} e^{j\varphi_b} \\ \bar{A}_c = A_{c(RMS)} e^{j\varphi_c} \end{cases}$$

LA CORRELAZIONE TRA VETTORE DI PARK E GRANDEZZE DI SEQUENZA E', QUINDI, PER ESTESO:

(15)

$$\begin{aligned}\bar{A}_2(t) &= \sqrt{2} \bar{A}_{s01}(t) e^{-j\theta_2} = \\ &= e^{-j\theta_2} \left[ \bar{A}_{s01} e^{-j\omega t} + \left( \bar{A}_{si} e^{j\omega t} \right)^* \right]\end{aligned}$$

PONENDO  $\theta_2(t) = \omega t + \theta_{20}$  SI HA CHE IL VETTORE DI PARK E' SOLIDALE ALLA TERNA DI SEQUENZA DIRETTA.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \bar{A}_2(t) &= e^{-j\theta_{20}} \left[ \bar{A}_{s01} + \left( \bar{A}_{si} e^{2j\omega t} \right)^* \right] \\ &= e^{-j\theta_{20}} \left[ \bar{A}_{s01} + \bar{A}_{si}^* e^{-2j\omega t} \right]\end{aligned}$$

SI NOTI CHE TALE SCELTA COMPORTI, COME INTUITIVA CONSEGUENZA, UNA PULSAZIONE PARI A 2 $\omega$  DELLA COMPONENTE DI SEQUENZA INVERSA.

OVVIAMENTE I COMPONENTI DI UN SISTEMA ELETTRICO SONO PROGETTATI IN MODO DA AVERE COMPONENTI DI SEQUENZA INVERSA NULLE. VALE, PERTANTO, L'IPOTESI DI  $\bar{A}_{si} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{A}_2(t) = e^{-j\theta_{20}} \bar{A}_{s01} = \text{costante} \\ \bar{A}_{g2}(t) = A_{s01} \cos(\varphi_{01} - \theta_{20}) = \text{costante} \end{cases}$$

IN SINTESI, NELLA SOLA PRESENZA DI COMPONENTE  
DI SEQUENZA DIRETTA SI HA:

(16)

$$\begin{cases} \bar{A}_a \\ \bar{A}_b = \alpha^2 \bar{A}_a \\ \bar{A}_c = \alpha \bar{A}_a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{A}_{sol} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{A}_a + \alpha \bar{A}_b + \alpha^2 \bar{A}_c) = \sqrt{3} \bar{A}_a$$

$$\bar{A}_2 = e^{-j\theta_{20}} \bar{A}_{sol} = \sqrt{3} e^{-j\theta_{20}} \bar{A}_a$$

POTENZA TRASFORMATA IN REGIME SINUSOIDALE:

$$\begin{cases} \bar{I}_a = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j\theta_{20}} \bar{I}_2 \\ \bar{V}_a = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j\theta_{20}} \bar{V}_2 \end{cases}$$

$$\bar{S} = 3 \bar{V}_a \bar{I}_a^* = 3 \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{3}} e^{j\theta_{20}} (V_{d1} + j V_{q1}) e^{-j\theta_{20}} (\bar{I}_{d1} - j \bar{I}_{q1})$$

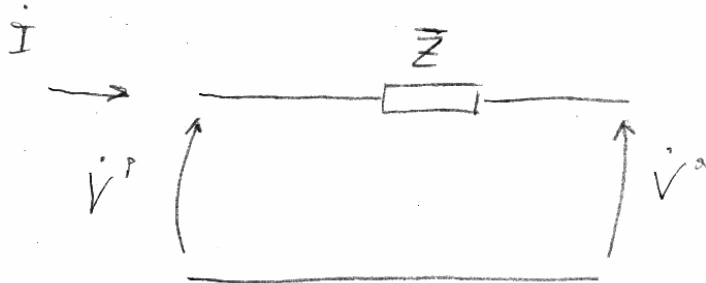
$$= \underbrace{\left( V_{d1} \bar{I}_{d1} + V_{q1} \bar{I}_{q1} \right)}_P + j \underbrace{\left( V_{q1} \bar{I}_{d1} - V_{d1} \bar{I}_{q1} \right)}_Q$$

N.B.: TRASFORMAZIONE A POTENZA INVARIANTE

## APPLICAZIONE A UN DOPIO BIPOLLO

(17)

È DATO UN DOPIO BIPOLLO CHE NON  
PRESENTA ELEMENTI CAPACITIVI :



APPLICANDO LA II LEGGE DI KIRKHOFF SI OTTIENE :

$$\begin{pmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{pmatrix} = [R] \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = [L] \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

IN FORMA COMPATTA :

$$\Delta V_f = R I_f + \frac{d\phi_f}{dt}, \quad \phi_f = L I_f$$

LE GRANDEZZE  $V_f$  E  $I_f$  SONO TUTTE FUNZIONI  
DEL TEMPO.

APPLICANDO LE TRASFORMAZIONI OTTENIAMO:

(18)

$$T_P \frac{d\phi_d}{dt} = \frac{d\phi_P}{dt} + \Omega T_\Omega \phi_P$$

$$\Rightarrow T_P \Delta V_g = T_P R I_g + \frac{d\phi_P}{dt} + \Omega T_\Omega \phi_P$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta V_P &= T_P R T_P^{-1} T_P I_g + \frac{d\phi_P}{dt} + \Omega T_\Omega \phi_P \\ &= T_P R T_P^{-1} I_P + \frac{d\phi_P}{dt} + \Omega T_\Omega \phi_P \end{aligned}$$

$$\text{DOVE } \phi_P = T_P L T_P^{-1} I_P$$

SE IL SISTEMA È SIMMETRICO, INOLTRE, LE  
MATRICI TRASFORMATE ASSUMONO FORMA DIAGONALE

$$\begin{cases} \Delta V_{d2} = R I_{d2} + \frac{d\phi_{d2}}{dt} - \Omega \phi_{q2} \\ \Delta V_{q2} = R I_{q2} + \frac{d\phi_{q2}}{dt} + \Omega \phi_{d2} \\ \Delta V_o = R I_o + \frac{d\phi_o}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_{d2} = L_{d2} I_{d2} \\ \phi_q = L_q I_{q2} \\ \phi_o = L_o I_o \end{cases}$$

NONOSTANTE LA FORMA DIAGONALE DELLE MATRICI,  
LE GRANDEZZE DI ASSE DIRETTO E DI ASSE QUADRATURA  
CONTINUANO AD ESSERE ACCOPPIATE FRA LORO.

NELL'IPOTESI DI SIMMETRIA RISPETTO ALLE RESISTENZE:

(19)

$$\begin{aligned}
 \Delta \bar{V}_2 &= \Delta V_{d2} + \int \Delta V_{q2} = \\
 &= R I_{d2} + \frac{d\phi_{d2}}{dt} - \omega \phi_{q2} + j R I_{q2} + \int \frac{d\phi_{q2}}{dt} + \int \omega \phi_{d2} = \\
 &= R (I_{d2} + j I_{q2}) + \frac{d}{dt} (\phi_{d2} + j \phi_{q2}) + j \omega (\phi_{d2} + \int \phi_{q2}) = \\
 &= R \bar{I}_2 + \frac{d}{dt} \phi_2 + j \omega \phi_2 \\
 &= R \bar{I}_2 + (P + j \omega) \bar{\phi}_2
 \end{aligned}$$

NELL'ULTERIORE IPOTESI DI SIMMETRIA RISPETTO ALLE INDUTTANZE, SI PUÒ DEFINIRE UNA IMPEDENZA OPERATORIALE:

$$Z = R + (P + j \omega) L$$

## MACCHINA SINCRONA:

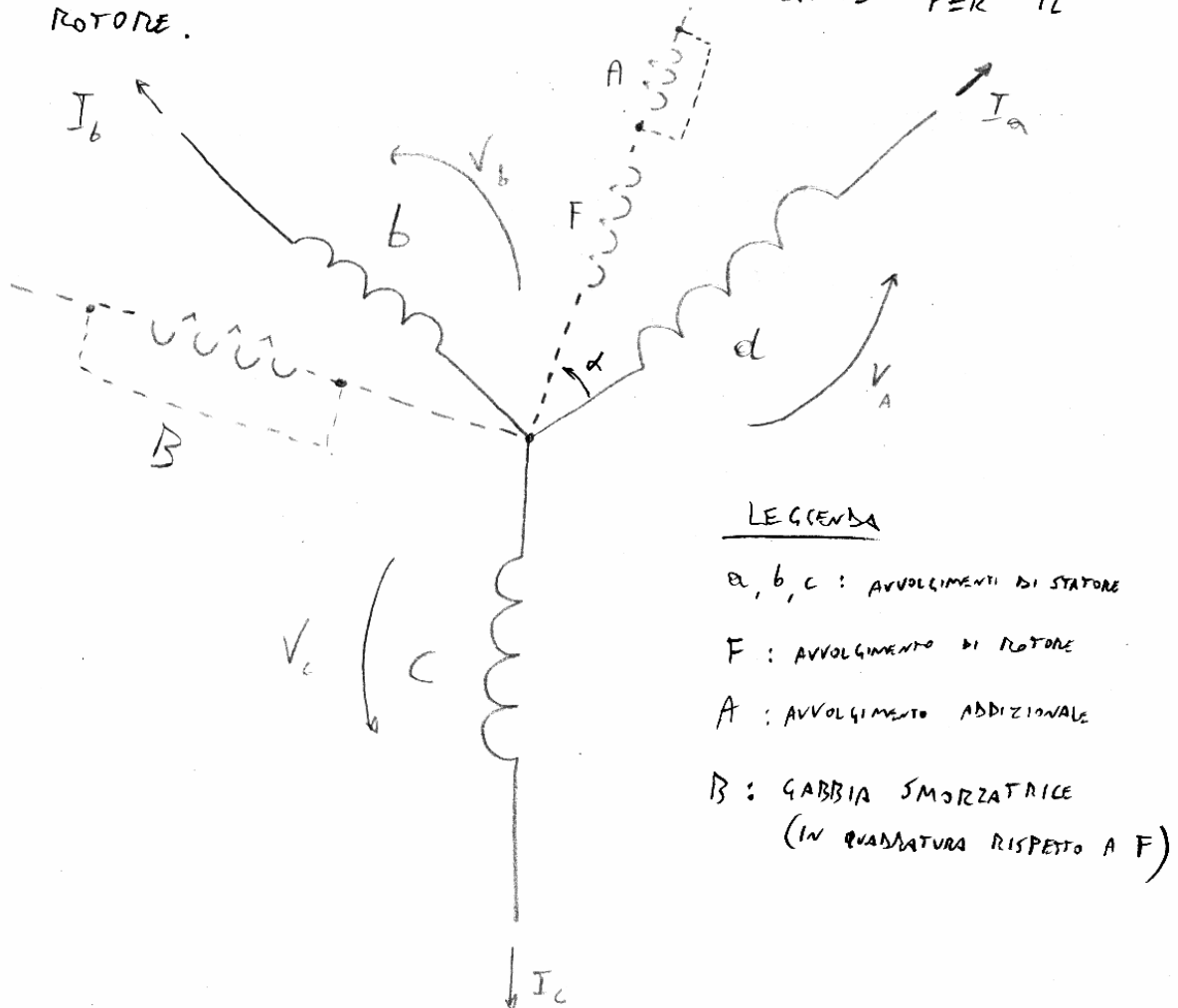
(20)

DI SEGUITO SI AFFRONTA LO STUDIO DELLA MACCHINA SINCRONA UTILIZZANDO LA TRASFORMATA DI PARK.

SI FANNO LE SEGUENTI IPOTESI:

- 1 - MACCHINA LINEARE;
- 2 - AVVOLGIMENTI DISTRIBUITI IN MODO DA GENERARE UN'ONDA DI INDUZIONE SINUSOIDALE;
- 3 - 1 PAIO DI POLI.
- 4 - AVVOLGIMENTO DI CAMPO CHIUSO IN CORTOCIRCUITO;
- 5 - AVVOLGIMENTO ADDIZIONALE CHIUSO IN CORTO CIRCUITO.

SI FA USO DELLA CONVENZIONE "GENERATORE" PER LO STATORE E LA CONVENZIONE "UTILIZZATORE" PER IL ROTORE.



PER DESCRIVERE L'EQUILIBRIO ELETTRICO:

(21)

$$\begin{aligned} \text{STATORE} \quad & \begin{cases} V_a(t) = -R_a I_a(t) + P \psi_a(t) \\ V_b(t) = -R_b I_b(t) + P \psi_b(t) \\ V_c(t) = -R_c I_c(t) + P \psi_c(t) \end{cases} \\ \\ \text{ROTORE} \quad & \begin{cases} V_f(t) = R_f I_f(t) + P \psi_f(t) \\ 0 = R_A I_A(t) + P \psi_A(t) \\ 0 = R_B I_B(t) + P \psi_B(t) \end{cases} \end{aligned}$$

EQUILIBRIO MAGNETICO:

LA CONVENZIONE IN USO X I FLUSSI E' TALE PER CUI LE CORRENTI SONO SMAGNETIZZANTI NELLO STATORE E MAGNETIZZANTI NEL ROTORE

$$\begin{cases} \psi_a(t) = -[L_{aa} I_a + L_{ab} I_b + L_{ac} I_c] + L_{af} I_f + L_{aA} I_A + L_{aB} I_B \\ \psi_b(t) = -[L_{ba} I_a + L_{bb} I_b + L_{bc} I_c] + L_{bf} I_f + L_{bA} I_A + L_{bB} I_B \\ \psi_c(t) = -[L_{ca} I_a + L_{cb} I_b + L_{cc} I_c] + L_{cf} I_f + L_{cA} I_A + L_{cB} I_B \\ \psi_A(t) = -[L_{Aa} I_a + L_{Ab} I_b + L_{Ac} I_c] + L_{Af} I_f + L_{AA} I_A + L_{AB} I_B \\ \psi_f(t) = -[L_{fa} I_a + L_{fb} I_b + L_{fc} I_c] + L_{ff} I_f + L_{fA} I_A + L_{fB} I_B \\ \psi_B(t) = -[L_{Ba} I_a + L_{Bb} I_b + L_{BC} I_c] + L_{Bf} I_f + L_{BA} I_A + L_{BB} I_B \end{cases}$$

CON NOTAZIONE COMPATTA:

$$\begin{pmatrix} \psi_s \\ \psi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_{ss} & L_{sr} \\ -L_{sr} & L_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_s \\ I_r \end{pmatrix}$$

LA MATRICE  $L$  SI COMPONE DI 36 PARAMETRI

(22)

LE INDUTTANZE NON SONO COSTANTI, MA DIPENDONO DALLA POSIZIONE DEL ROTORE E QUINDI DAL TEMPO. IL FATTO CHE LA MACCHINA RUOTI COMPORTA:

- 1 - AUTO INDUTTANZE DI STATORE VARIABILI A CAUSA DELL'ANISOTROPIA DEL ROTORE;
- 2 - MUTUE INDUTTANZE DI STATORE E STATORE-ROTORE DIPENDENTI DALLA POSIZIONE DEL ROTORE.

RIMANGONO COSTANTI SOLTANTO I SEGUENTI PARAMETRI:

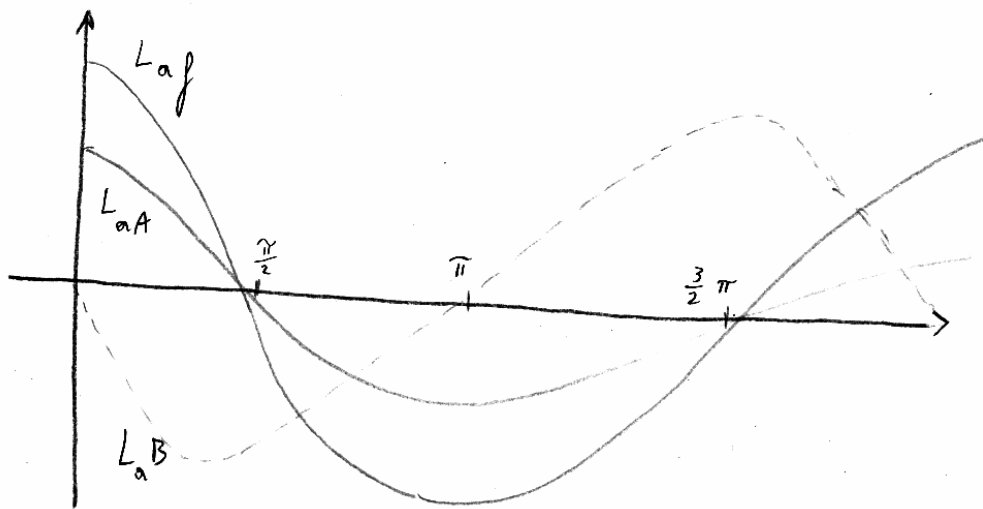
$$\begin{cases} L_{pp} = L_p = \text{COSTANTE} \\ L_{AA} = L_A = \text{COSTANTE} \\ L_{BB} = L_B = \text{COSTANTE} \end{cases}$$

FRA L'ASSE MAGNETICO DELLE GABBIE SMORZATRICI E L'ASSE MAGNETICO DELL'AVVOLGIMENTO DI ECCITAZIONE NON VI SONO ACCOPPIAMENTI.

$$\begin{cases} L_{pB} = L_{Bp} = 0 \\ L_{AB} = L_{BA} = 0 \\ L_{Ap} = L_{pA} = \text{COSTANTE} \end{cases}$$

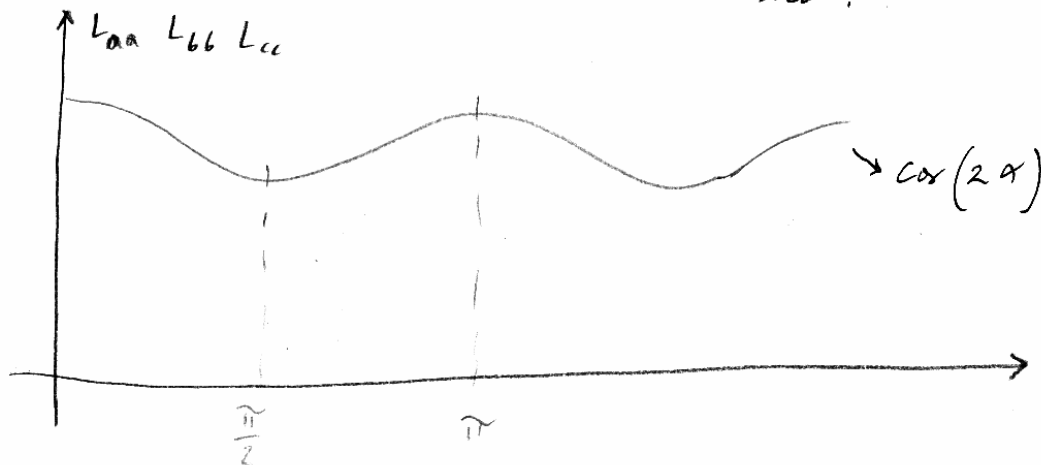
PER QUANTO RIGUARDA LE MUTUE FRA AVVOLGIMENTI DI ROTORE E AVVOLGIMENTI DI STATORE, ABBIAMO CHE ESSE VARIANO CON LEGGE SINUSOIDALE (X IPOTESI COSTRUTTIVE FATTE PRELIMINARMENTE)

(23)



PER LE FASI B E C SI HANNO UGUALI RISULTATI, SFASATI DI  $120^\circ$ . IN QUESTO MODO ABBIAMO IDENTIFICATO I PARAMETRI  $L_{RR}$  ed  $L_{SR}$

PER QUANTO RIGUARDA GLI AVVOLGIMENTI DI STATORE ABBIAMO CHE ESSI VEDONO UNA RILUTTANZA VARIABILE:



PER LE MUTUE INDUTTANZE TRA AVVOLGIMENTI DI STATORE:

