CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Evento E : fatto che a seguito di una prova può verificarsi o no.

Probabilità dell'evento P(E): misura numerica della sua possibilità oggettiva
ad ogni evento associamo un numero che è la

$0 \le P(E) \le 1$

$$P(E) = \frac{\text{n° casi favorevoli a } E}{\text{n° casi possibili}}$$

Evento CERTO E_{certo}: evento che si verificherà SICURAMENTE

$$P(E_{certo}) = 1$$

Evento IMPOSSIBILE $E_{imp.}$: evento che NON si verificherà MAI

$$P(E_{imp}) = 0$$

Eventi **INCOMPATIBILI**: eventi che NON possono verificarsi contemporaneamente, si escludono l'un l'altro

Gruppo completo di eventi: gruppo di eventi di cui uno si verificherà sicuramente

Gruppo NON completo di eventi: può verificarsi un evento che NON appartiene al gruppo

Eventi **EQUIPROBABILI**: eventi che hanno tutti la stessa probabilità, dalla simmetria della prova

Schema a casi: gruppo completo di eventi equiprobabili e incompatibili (caso = evento in qst caso)

Caso favorevole ad un evento: il suo apparire implica il verificarsi dell'evento in questione

NON evento o **evento NEGATO** $\overline{E}$: evento che si verifica quando NON si verifica E

$$P(E \cup \overline{E}) = 1$$
$$P(E \cap \overline{E}) = 0$$

SOMMA di eventi

$E_1 \cup E_2 \equiv E_1 + E_2 = E$ → si verifica ALMENO uno dei due, o E_1 o E_2 o entrambi

PRODOTTO di eventi

$E_1 \cap E_2 \equiv E_1 E_2 = E$ → si verificano ENTRAMBI E_1 e E_2

Teorema

siano $E_1, E_2, \dots, E_n$ incompatibili

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

se $E_1, E_2, \dots, E_n$ formano un gruppo completo di eventi incompatibili

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) = 1$$

Eventi COMPATIBILI: eventi che possono verificarsi contemporaneamente

Teorema

siano $E_1, E_2, \dots, E_n$ COMPATIBILI

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{1 \leq i < j}^{j-1} P(E_i \cap E_j) + \sum_{i<j<k}^{k-1} P(E_i \cap E_j \cap E_k) + \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)$$

PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ

posso esprimere il prodotto in funzione della somma

Teorema di reciprocità

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i \cup E_j) + \sum_{i<j<k} P(E_i \cup E_j \cup E_k) + \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)$$

DIPENDENZA o INDIPENDENZA di eventi

E_1 è INDIPENDENTE da E_2 se $P(E_1)$ NON dipende da E_2

Due eventi incompatibili sono fortemente dipendenti perchè uno esclude l'altro

Teorema

siano $E_1, E_2, \dots, E_n$ DIPENDENTI

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = P(E_1) P(E_2/E_1) P(E_3/E_1 \cap E_2) P(E_4/E_1 \cap E_2 \cap E_3) \dots P(E_n/E_1 \cap \dots \cap E_{n-1})$$

Siano $E_1, E_2, \dots, E_n$ INDIPENDENTI

$P(E_2/E_1) = P(E_2)$

$P(E_3/E_1 \cap E_2) = P(E_3)$

...

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(E_i) = P(E_1)\,P(E_2) \dots P(E_n)$$

Caso delle prove ripetute

$$\text{Prova}: \begin{cases} A & P(A) = p \\ \bar{A} & P(\bar{A}) = 1-p \end{cases}$$

Ripeto la prova finchè NON si verifica A

E: mi fermo dopo NON più di k prove

$$E = [A] \cup [\bar{A} \cap A] \cup [\bar{A} \cap \bar{A} \cap A] \cup \dots \cup [\underbrace{\bar{A} \cap \bar{A} \cap \dots \cap \bar{A}}_{k-1 \text{ volte}} \cap A]$$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A) + P(\bar{A} \cap \bar{A}) + \dots + P(\bar{A} \cap \bar{A} \cap \dots \cap \bar{A} \cap A) = \\ &= P(A) + P(\bar{A})P(A) + \dots + [P(\bar{A})]^{k-1} P(A) = \\ &= P(A)\left[1 + P(\bar{A}) + P(\bar{A})^2 + \dots + P(\bar{A})^{k-1}\right] = \\ &= p\left[1 + (1-p) + (1-p)^2 + \dots + (1-p)^{k-1}\right] = \\ &= p\left[\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)}\right] = 1-(1-p)^k \end{aligned}$$

$$P(E) = 1-(1-p)^k$$

PROBABILITÀ TOTALE e IPOTESI

Siano $H_1, H_2, \dots, H_n$ INCOMPATIBILI

E si può presentare solo in concomitanza con uno degli eventi H.

$$E = \underbrace{(H_1 \cap E)}\cup\underbrace{(H_2 \cap E)}\cup \dots \cup \underbrace{(H_n \cap E)}$$

sono incompatibili perchè H_i sono incompatibili

$$P(E) = P(H_1 \cap E) + P(H_2 \cap E) + \dots + P(H_n \cap E)$$

ma H_i e E sono dipendenti

$$P(E) = P(H_1)\,P(E/H_1) + P(H_2)\,P(E/H_2) + \dots + P(H_n)\,P(E/H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(E/H_i)$$