

INTEGRAZIONE NUMERICA

Formule di quadratura

Di alcune funzioni non esistono primitive elementari, quindi si pone il problema di approssimare:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

con una FORMULA DI QUADRATURA:

$$J_n(f) = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

a_i PESI

$a \leq x_i \leq b$ NODI con $x_0 < x_1 < \dots < x_n$

ERRORE

$$E_n(f) = I(f) - J_n(f)$$

Considero la base di Hilbert:

$$f: 1, x, x^2, \dots$$

Impongo che per le prime $2n+1$ potenze l'errore sia zero:

$$E_n(1) = 0$$

$$E_n(x) = 0$$

$$\vdots$$

$$E_n(x^{2n+1}) = 0$$

$$I(pf) = \int_a^b p(x) f(x) dx \approx J_n(f) = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

$p(x) \geq 0$ FUNZIONE PESO

per $f: 1, x, x^2, \dots, x^{2n+1} \Rightarrow J_n(f) = I(pf)$

avrei un sistema di $2n+2$ equazioni in $2n+2$ incognite

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + \dots + a_n = \int_a^b p(x) \cdot 1 \cdot dx = m_0 & \text{momento di ordine zero} \\ a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \int_a^b p(x) x \cdot dx = m_1 \\ \dots \\ a_0 x_0^{2n} + a_1 x_1^{2n} + \dots + a_n x_n^{2n} = \int_a^b p(x) x^{2n} \cdot dx = m_n \\ \dots \\ a_0 x_0^{2n+1} + a_1 x_1^{2n+1} + \dots + a_n x_n^{2n+1} = \int_a^b p(x) x^{2n+1} \cdot dx = m_{2n+1} \end{cases}$$

I pesi sono coinvolti linearmente

Esiste la soluzione:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+2} \quad \text{Ad ogni peso resta associato un nodo}$$

Grado di precisione di una formula di quadratura p

$$E_n(1) = E_n(x) = \dots = E_n(x^{2n+1}) = 0 \quad p \geq 2n+1$$

$$E_n(x^{2n+2}) \neq 0 \Rightarrow p = 2n+1$$

$$E_n(x^{2n+2}) = 0 \Rightarrow p \geq 2n+1 \quad p \geq 2n+2$$

FORMULE DI NEWTON-COTES

$$\begin{cases} p(x) = 1 \\ x_0 = a \\ x_n = b \\ x_i = x_0 + ih \quad \text{con } h = \frac{b-a}{n} \quad i=0, 1, \dots, n \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) + E_n(f)$$

$$\text{se } n < 8 \rightarrow \alpha_i \geq 0$$

$$n \geq 8 \rightarrow \alpha_i < 0 \quad \text{e quindi} \Rightarrow \text{gli errori si propagano in modo anomalo}$$

Formula dei TRAPEZI

$$n=1 \Rightarrow n+1=2 \text{ punti}$$

$$I(f) = \frac{b-a}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{1}{12} h^3 f''(\xi) = J_1(f) + E_1(f)$$

$$x_0 = a$$

$$x_1 = b$$

$$h = \frac{b-a}{n} = b-a$$

Formola di SIMPSON

$$n=2 \Rightarrow n+1=3 \text{ punti}$$

$$I(f) = \frac{b-a}{6} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{1}{90} h^5 f''''(\beta)$$

$$x_0 = a$$

$$x_1 = \frac{b-a}{2} = h$$

$$x_2 = b$$

ERRORE

$$E_n(f) = \begin{cases} c_p h^{p+1} f^{(p)}(\theta) & p \text{ pari} \\ c_p h^{p+2} f^{(p+1)}(\theta) & p \text{ dispari} \end{cases}$$

dove:

$p=n+1$ numero dei nodi

c_p è una costante che dipende da p

Formola dei Trapezi generalizzata

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{x_i - x_{i-1}}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] - \frac{1}{12} h^3 f''(\theta) \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{b-a}{2m} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] - \frac{1}{12} f''(\theta) \left(\frac{b-a}{m} \right)^3 \right\} = \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{\frac{b-a}{2m} [f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m)]}_{J_m(f)} - \underbrace{\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\theta)}_{E_m(f)}$$

Formola di Simpson generalizzata

$$I(f) = \frac{b-a}{6m} \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^{m-1} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m) \right] - \frac{(b-a)^5}{2880m^4} f''''(\theta)$$

$$E_m(f) = - \frac{(b-a)^5}{2880m^4} f''''(\theta) \quad \underbrace{J_m(f)} \quad \underbrace{E_m(f)}$$