

INTERPOLAZIONE = APPROSSIMAZIONE delle funzioni.

Sia $f(x): x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\begin{cases} \text{nota solo per punti} \\ f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n) \\ \text{complicata o non sufficientemente regolare} \end{cases}$

il problema è:

stimare un valore di $f(x)$ in un punto diverso da quelli dati.

INTERPOLAZIONE $\rightarrow$ si sostituisce $f(x)$ con una funzione più "facile" da calcolare
ad esempio un polinomio

APPROSSIMAZIONE $\rightarrow$ sostituzione di $f(x)$ con una più semplice che si discosti da $f(x)$ il meno possibile

INTERPOLAZIONE DI LAGRANGE

Siano noti:

$$x_0, x_1, \dots, x_K$$
 $k+1$ punti
$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_k)$$
 $k+1$ valori di $f(x)$

Determinare il polinomio di grado al più k , della forma

$$P_k(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

tali che:

• $P_k(x_i) = f(x_i) \quad i=0,1,\dots,k$ CONDIZIONI DI INTERPOLAZIONE

Si ottiene un sistema del tipo:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \dots + \alpha_{k-1} x_0^{k-1} + \alpha_k x_0^k = f(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_k + \dots + \alpha_{k-1} x_k^{k-1} + \alpha_k x_k^k = f(x_k) \end{cases}$$

in cui le incognite sono $a_i, i=0, 1, \dots, k$

La matrice dei coefficienti è:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{k-1} & x_0^k \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{k-1} & x_1^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_k & \dots & x_k^{k-1} & x_k^k \end{bmatrix}$$
 matrice di Vandermonde

se $\det(V) \neq 0 \Rightarrow \exists Q^*$ unica

$$\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq k} (x_i - x_j)$$

Polinomio di Lagrange

$$L_k(x) = \sum_{i=0}^k l_i(x) f(x_i)$$

$l_i(x) \in \Pi_k$ polinomi fondamentali di Lagrange

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_{k-1})(x_i-x_k)} \quad i=0,1,\dots,k$$

$$l_i(x_r) = \delta_{ir} = \begin{cases} 1 & r=i \\ 0 & r \neq i \end{cases}$$

$$L_k(x_r) = f(x_r)$$

$$f(x) \simeq L_k(x)$$

ERRORE

$$E_k(x) = f(x) - L_k(x)$$

nei punti della partizione $E_k = 0$

" " " " " $E_k \neq 0$ in generale

$$f(x) = L_k(x) + E_k(x)$$

se $f(x)$ è derivabile un numero elevato di volte (e abbastanza regolare)

$$E_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \pi(x) \quad \text{resto in forma di Lagrange}$$

$$\pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)$$

PROPRIETÀ:

$$\sum_{i=0}^k l_i(x) = 1$$

$$f(x) = L_k(x) + E_k(x)$$

se $f(x) = 1$

$$1 = \sum_{i=0}^k l_i(x) \cdot 1 + 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^k l_i(x) = 1$$

INTERPOLAZIONE DI HERMITE

Siano noti:

$$x_0, x_1, \dots, x_k$$

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_k)$$

$$k+1$$

$$f'(x_0), f'(x_1), \dots, f'(x_k)$$

$$k+1$$

ho $2k+2$ informazioni su $f(x)$

costruire un polinomio che approssimi $f(x)$

$$H(x) \in \Pi_{2k+1} \quad H(x) = a_{2k+1}x^{2k+1} + a_{2k}x^{2k} + \dots + a_1x + a_0$$

cerchiamo un polinomio di grado $2k+1$ perché ha $2k+2$ coefficienti

Imponiamo che:

$$H(x_i) = f(x_i)$$

$$i = 0, 1, \dots, k$$

$$H'(x_i) = f'(x_i)$$

$$\begin{cases} H(x_0) = f(x_0) \\ H(x_k) = f(x_k) \\ H'(x_0) = f'(x_0) \\ H'(x_k) = f'(x_k) \end{cases}$$

$$Pa = f$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{2k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{2k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{2k+1} \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_k) \\ f'(x_0) \\ \vdots \\ f'(x_k) \end{bmatrix}$$

$\det(P) \neq 0$ se $x_i \neq x_j$ cioè se i punti sono distinti

ERRORE

$$E(x) = f(x) - H(x)$$

$$E(x) = 0 \quad \text{dove } f(x) = H(x) \text{ cioè nei punti della partizione}$$

$$E'(x) = f'(x) - H'(x)$$

$$E'(x) = 0 \quad \text{nei punti della partizione}$$

se $f(x)$ è derivabile un numero elevato di volte:

$$E(x) = \frac{f^{(2k+2)}(\xi)}{(2k+2)!} \pi^2(x)$$

$$\pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)$$

$$E'(x) = dE(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{f^{(2k+2)}(\xi)}{(2k+2)!} \right] \pi^2(x) + \frac{f^{(2k+2)}(\xi)}{(2k+2)!} 2\pi(x) \pi'(x)$$

$$H(x) = \sum_{i=0}^k h_{0i}(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^k h_{1i}(x) f'(x_i)$$

$h_{0i}(x) \in \pi_{2k+1}$ polinomi fondamentali di Hermite di 1^a specie

$h_{1i}(x) \in \pi_{2k+1}$ " " " " 2^a specie

Dalle condizioni di interpolazione:

$$\left. \begin{aligned} H(x_r) = f(x_r) &\Rightarrow \begin{cases} h_{0i}(x_r) = \delta_{ir} \\ h_{1i}(x_r) = 0 \end{cases} \\ H'(x_r) = f'(x_r) &\Rightarrow \begin{cases} h'_{0i}(x_r) = 0 \\ h'_{1i}(x_r) = \delta_{ir} \end{cases} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} r=0,1,\dots,k \\ \text{proprietà} \end{array}$$

I polinomi che hanno queste proprietà sono quelli di Lagrange

$$h_{0i}(x) = (Ax+B) l_i^2(x)$$

$$h_{1i}(x) = (Cx+D) l_i^2(x)$$

$$h_{0i}(x_r) = \delta_{ir} \Rightarrow h_{0i}(x_i) = (Ax_i+B) l_i^2(x_i) = 1$$

$$\Rightarrow Ax_i+B=1$$

$$h'_{0i}(x_r) = 0 \Rightarrow h'_{0i}(x) = A l_i^2(x) + 2(Ax+B) l_i(x) l'_i(x)$$

$$\Rightarrow A l_i^2(x_i) + 2(Ax_i+B) l_i(x_i) l'_i(x_i) = 0$$

$$\Rightarrow A + 2(Ax_i+B) l'_i(x_i) = 0$$

$$\begin{cases} Ax_i+B=1 \\ A+2(Ax_i+B) l'_i(x_i)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 l'_i(x_i) \\ B = 1 + 2x_i l'_i(x_i) \end{cases}$$

$$h_{0i}(x) = [1 - 2l'_i(x_i)(x - x_i)] l_i^2(x)$$

$$h_{1i}(x) = (x - x_i) l_i^2(x)$$

approssimazione
METODO DEI MINIMI QUADRATI

Siano noti:

$$x_0, x_1, \dots, x_m$$

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_m)$$

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$$

$$m \gg n$$

considero una combinazione lineare delle funzioni $\varphi_i(x)$

$$s(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) \quad \left\{ \varphi_i(x) \right\}_{i=0}^{i=n} \text{ l.i.}$$

vorrei approssimare $f(x)$ con $s(x)$, quindi voglio:

$$s(x) \approx f(x)$$

$$\text{Così non sempre ho } s(x_i) = f(x_i)$$

Per avere $s(x_i) = f(x_i)$ considero la funzione:

$$\Phi(c_0, c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=0}^m [s(x_i) - f(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^m \left[\sum_{j=0}^n c_j \varphi_j(x_i) - f(x_i) \right]^2 \geq 0$$

$$\text{dove: } \sum_{i=0}^m [s(x_i) - f(x_i)]^2 \quad \text{SCARTO QUADRATICO}$$

$$v_i^2 = \left[\sum_{j=0}^n c_j \varphi_j(x_i) - f(x_i) \right]^2 = v_i^T v_i$$

$$v = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j(x_0) - f(x_0) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j(x_m) - f(x_m) \end{bmatrix}$$

introduco:-

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_m) & \dots & \varphi_n(x_m) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (n+1)}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{bmatrix}$$

$$v_i = (Ac - b)_i$$

vorrei minimizzare $\phi(c)$:

$$\min_c \phi(c) = \min_c [(Ac - b)^T (Ac - b)] = \min_c \|Ac - b\|_2^2 = \|Ac^* - b\|_2^2 \leq \|Ac - b\|_2^2$$

c^* lo calcolo risolvendo il sistema:

$$A^T A c = A^T b$$

Scelta delle funzioni $\varphi_i(x)$:

BASE POLINOMIALE o DI HILBERT

$$\varphi_i(x) : 1, x, x^2, \dots, x^n$$

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = x$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(x) = x^n$$

BASE TRIGONOMETRICA o DI FOURIER

$$\varphi_i(x) : 1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots \quad \text{sono l.i. in } [0, 2\pi]$$

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = \sin(x)$$

$$\vdots$$

BASE ESPONENZIALE

$$\varphi_i(x) : e^{\alpha_0 x}, e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$$

con $\alpha_i \neq \alpha_j$ e $i \neq j$

$$\varphi_0(x) = e^{\alpha_0 x}$$

$$\varphi_1(x) = e^{\alpha_1 x}$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(x) = e^{\alpha_n x}$$