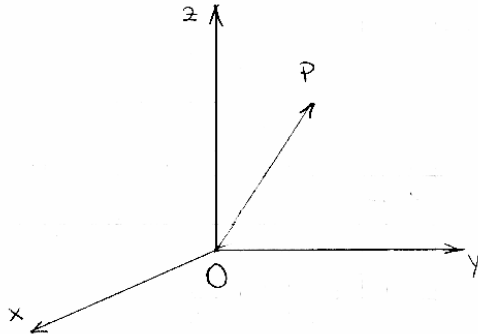


GEOMETRIA ANALITICA

$S = \{0; x, y, z\}$ sistema ortogonale di riferimento in $\mathbb{R}^3$



$$P \equiv p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

$$|p| = d(O, P) = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = \sqrt{p^T p} \quad (= \|p\|_2)$$

DISTANZA TRA DUE PUNTI NELLO SPAZIO $\mathbb{R}^3$

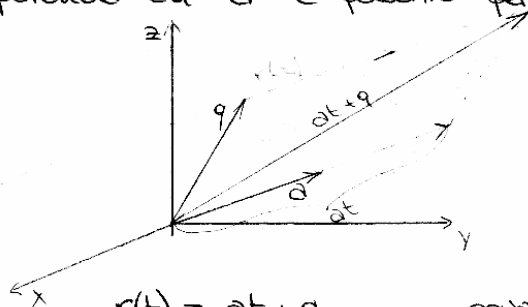
$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2 + (p_z - q_z)^2} = \sqrt{(p - q)^T (p - q)} \quad (= \|p - q\|_2)$$

RETTE

EQUAZIONE DI UNA RETTA IN $\mathbb{R}^3$

Considero due vettori $a, q \in \mathbb{R}^3$ e un parametro scalare reale t .
Al variare di t , il vettore somma $r(t) = at + q$ descrive una retta
parallela ad a e passante per il punto q .



$$r(t) = at + q$$

$$r(0) = q$$

equaz. parametrica o vettoriale
di una retta $\parallel a$ e passante per q

EQUAZIONE DI UNA RETTA CHE PASSA PER DUE PUNTI

$$r(t) = (p-q)t + q$$

$$r(0) = q$$

$$r(1) = p$$

ci sono due valori di t tali che r coincide una volta con p e una volta con q .

RETTE PARALLELE

$$r(t) = at + q$$

$$r'(t') = a't' + q'$$

le rette sono $\parallel$ perché hanno la stessa direz.

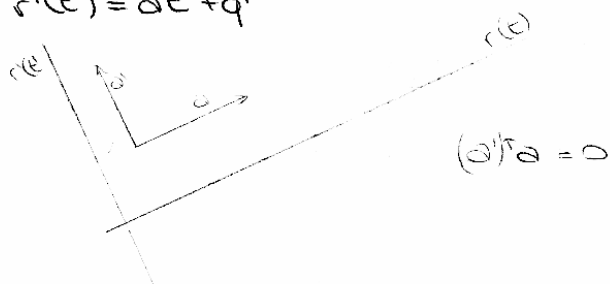
infatti il vettore di direz. a è lo stesso

Al variare di q si ottiene un fascio di rette parallele

RETTE PERPENDICOLARI

$$r(t) = at + q$$

$$r'(t') = a't' + q'$$



Le due rette saranno perpendicolari se sono perpendicolari a' e a , ovvero se

$$a'^T a = 0$$

POSIZIONE MUTUA DI DUE RETTE NELLO SPAZIO $\mathbb{R}^3$

$$r(t) = at + q$$

$$r'(t') = a't' + q'$$

vedo se le rette hanno un punto in comune.

$$\begin{cases} r(t) = at + q \\ r'(t') = a't' + q' \end{cases}$$

$$r(t) = r'(t')$$

$$\exists t, t' : r(t) = r'(t')$$

$$at + q = a't' + q'$$

$$\Rightarrow at - a't' = q' - q$$

il sistema si può scrivere nella forma:

$$\begin{bmatrix} a_x - a'_x \\ a_y - a'_y \\ a_z - a'_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q'_x - q_x \\ q'_y - q_y \\ q'_z - q_z \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ $\mathcal{L}$ b

$$A\mathcal{L} = b$$

caso ① $\text{rango}(A) = 2$

I vettori a e a' sono l.i. quindi NON sono paralleli
quindi r e r' NON sono parallele

I.a) $\text{rango}(A|b) = 2$

il sistema, per il teorema di Cramer, ha una soluzione, cioè
le due rette sono NON parallele, ma hanno un punto
in comune:

sono INCIDENTI

I.b) $\text{rango}(A|b) = 3$

il sistema non ammette soluzioni, quindi le due rette
sono NON parallele e NON hanno punti in comune:

sono SEMPLI

caso ② $\text{rango}(A) = 1$

I vettori a e a' sono l.d. quindi sono paralleli, essendo
multipli uno dell'altro
quindi r e r' sono parallele

II.a) $\text{rango}(A|b) = 1$

Le due rette hanno un punto in comune, ma essendo
parallele avranno tutti i punti in comune, quindi:

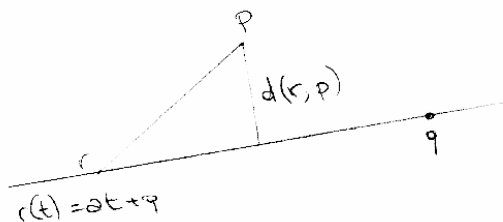
sono COINCIDENTI

II.b) $\text{rango}(A|b) = 2$

Le due rette sono parallele e NON hanno punti in comune:

sono PARALLELE

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA



Scrivo la distanza tra p e un generico punto appartenente alla retta, il valore minimo indica la distanza tra il punto p e la retta

$$d^2(r(t), p) = (r(t) - p)^T (r(t) - p) = (at + q - p)^T (at + q - p)$$

pongo $b = q - p$ il trasposto di una somma = somma dei trasposti

$$d^2(r(t), p) = (at + b)^T (at + b) = a^T a t^2 + a^T b t + b^T a t + b^T b =$$

$$= a^T a t^2 + 2a^T b t + b^T b \quad \text{nel campo reale } a^T b = b^T a$$

$$d^2(r(t), p)' = 2a^T a t + 2a^T b$$

$$d^2(r(t), p)'' = 2a^T a > 0$$

Due si annulla la derivata prima c'è un minimo.

$$2a^T a t + 2a^T b = 0 \Rightarrow t^* = -\frac{a^T b}{a^T a}$$

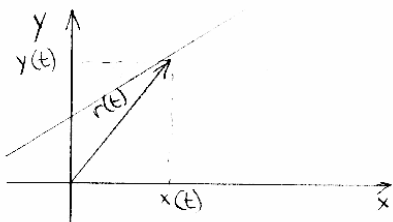
Sostituendo:

$$d(r(t), p) = \sqrt{a^T a \frac{(a^T b)^2}{(a^T a)^2} - 2a^T b \frac{a^T b}{a^T a} + b^T b} =$$

$$= \sqrt{b^T b - \frac{(a^T b)^2}{a^T a}} = \sqrt{\frac{a^T a b^T b - (a^T b)^2}{a^T a}} \geq 0 \quad \text{per il teorema di Cauchy-Schwarz}$$

EQUAZIONE DI UNA RETTA NEL PIANO $\mathbb{R}^2$

In $\mathbb{R}^2$ l'equazione di una retta si può scrivere anche in forma cartesiana



$$x(t) = a_x t + q_x$$

$$y(t) = a_y t + q_y$$

$$a_y x(t) = a_y a_x t + a_y q_x$$

$$a_x y(t) = a_x a_y t + a_x q_y$$

sottraggo la 1^a della 2^a

$$a_y x - a_x y = a_y q_x - a_x q_y$$

$$a_y x - a_x y - a_y q_x + a_x q_y = 0$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad \text{forma CARTESIANA}$$

$$\begin{cases} \alpha = a_y \\ \beta = -a_x \\ \gamma = a_x q_y - a_y q_x \end{cases}$$

Nota: q compare solo in γ , quindi:

Al variare di γ ottengo un fascio di rette parallele
per $\gamma = 0$ ottengo la retta che passa per l'origine degli assi

Trasformazione dalla forma cartesiana a quella parametrica

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

prendo x o y come parametro

es. $x = t$

$$\beta y = -\gamma - \alpha t \rightarrow y = -\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} t$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \cdot t + 0 \\ y = -\frac{\alpha}{\beta} t - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\gamma}{\beta} \end{bmatrix}$$

$$r(t) = at + q$$

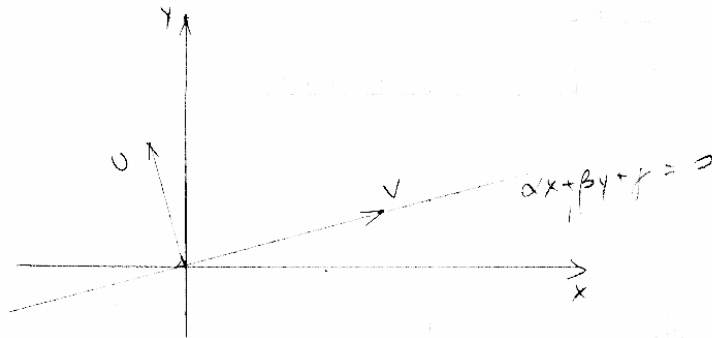
da cui:

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\gamma}{\beta} \end{bmatrix}$$

RETTE PARALLELE E PERPENDICOLARI NEL PIANO $\mathbb{R}^2$

$$\alpha x + \beta y = 0$$

$$u = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



$$u^T v = 0$$

quindi u è un vettore perpendicolare alla retta data

Considero le due rette:

$$\textcircled{1} \quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$$

e i vettori:

$$u = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad u' = \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix}$$

se voglio una retta perpendicolare alla $\textcircled{1}$, devo scegliere una retta parallela ad u , per esempio la $\textcircled{2}$, che è perpendicolare a u' .

Condizione di perpendicolarità tra due rette nel piano

$$u^T u' = 0$$

$$\alpha \alpha' + \beta \beta' = 0$$

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA IN $\mathbb{R}^2$

$$d(r, p) = \sqrt{\frac{a^2 b^2 b^2 - (a^T b)^2}{a^T a}} = \frac{|\alpha p_x + \beta p_y + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

POSIZIONE MUTUA DI DUE RETTE NEL PIANO $\mathbb{R}^2$ facendo uso della forma cartesiana

due rette nel piano possono essere

- parallele
- coincidenti
- incidenti (non parallele ma con un punto in comune)

considero due rette:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$$

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = -\gamma \\ \alpha' x + \beta' y = -\gamma' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = -\gamma \\ \alpha' x + \beta' y = -\gamma' \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma \\ -\gamma' \end{bmatrix}$$

$$Aw = b$$

caso ① $\text{rang}(A) = 2$

$$\text{rang}(A|b) = 2$$

per il teorema di Cofelli il sistema ammette soluzione:

le rette non sono parallele, ma hanno un punto in comune:

rette INCIDENTI

caso ② $\text{rang}(A) = 1$

i vettori sono l.d. quindi le rette sono parallele

II.a) $\text{rang}(A|b) = 1$

le rette hanno un punto in comune, ma essendo parallele hanno

tutti i punti in comune:

sono COINCIDENTI

II.b) $\text{rang}(A|b) = 2$

le rette sono parallele e non hanno punti in comune:

sono PARALLELE distinte

PIANO

EQUAZIONE DI UN PIANO IN $\mathbb{R}^3$

Considero:

- due vettori $a, b \in \mathbb{R}^3$ l.i.
- il piano passante per O contenente a e b
- due parametri scalari reali s, t
- un terzo vettore $q \in \mathbb{R}^3$

Al variare di s e t il vettore $p(s, t) = as + bt + q$ descrive un piano passante per q e parallelo al piano considerato

disegno

$$p(s, t) = as + bt + q \quad \text{equazione parametrica o vettoriale}$$

EQUAZIONE DI UN PIANO CHE PASSA PER TRE PUNTI

$$p(s, t) = (m - q)s + (r - q)t + q$$

$$p(0, 0) = q$$

$$p(0, 1) = r$$

$$p(1, 0) = m$$

cioè q, m, r stanno sul piano

EQUAZIONE DI UN PIANO IN FORMA CARTESIANA

$$x(s, t) = a_x s + b_x t + q_x$$

$$y(s, t) = a_y s + b_y t + q_y$$

$$z(s, t) = a_z s + b_z t + q_z$$

Eliminando i due parametri ottengo un'equazione della forma:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \quad \text{forma CARTESIANA}$$

dove:

$$\begin{cases} \alpha = a_2 b_1 - a_1 b_2 \\ \beta = a_3 b_2 - a_2 b_3 \\ \gamma = a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ \delta = -q_x(a_2 b_1 - a_1 b_2) - q_y(a_3 b_2 - a_2 b_3) - q_z(a_1 b_3 - a_3 b_1) \end{cases}$$

Dato che le componenti del vettore q compaiono solo in δ ,
al variare di q ottengo un fascio di piani paralleli.

Trasformazione dalla forma cartesiana a quella parametrica

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

prendo x e y , per esempio, come parametri:

es. $x = s$

$y = t$

$$\gamma z = -\delta - \alpha s - \beta t$$

$$z = -\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\alpha}{\gamma} s - \frac{\beta}{\gamma} t$$

$$z = -\frac{\alpha}{\gamma} s - \frac{\beta}{\gamma} t - \frac{\delta}{\gamma}$$

$$\begin{cases} x = 1 \cdot s + 0 \\ y = 1 \cdot t + 0 \\ z = -\frac{\alpha}{\gamma} s - \frac{\beta}{\gamma} t - \frac{\delta}{\gamma} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\alpha}{\gamma} \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{\beta}{\gamma} \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\delta}{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$p(s, t) = as + bt + q$$

da cui:

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\alpha}{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{\beta}{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\delta}{\gamma} \end{bmatrix}$$

DISTANZA DI UN PUNTO DA UN PIANO

$$d(p(s,t), m) = \frac{|\alpha m_x + \beta m_y + \gamma m_z + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

CONDIZIONE DI ORTOGONALITÀ TRA PIANI

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

$$u = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$u^T v = 0$$

quindi u è un vettore ortogonale al piano considerato

considero due piani:

- 1) $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$
- 2) $\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0$

e i vettori:

$$u = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad u' = \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{bmatrix}$$

se voglio un piano ortogonale al piano ①, devo scegliere un piano parallelo a u , per esempio il ②, che è ortogonale a u' .

Deve essere verificata la seguente condizione:

$$u^T u' = 0$$

$$\alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma' = 0$$

POSIZIONE MUTUA DI DUE PIANI NELLO SPAZIO $\mathbb{R}^3$

due piani nello spazio possono essere

- paralleli
- coincidenti
- con una retta in comune

considero due piani:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0$$

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = -\delta \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = -\delta' \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta \\ -\delta' \end{bmatrix}$$

$$Aw = b$$

caso (I) $\text{rang}(A) = 2$

$$\text{rang}(A|b) = 2$$

il sistema ammette soluzione:

i piani NON sono paralleli, ma hanno una retta in comune

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0 \\ \text{rang} \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{bmatrix} = 2 \end{cases}$$

caso (II) $\text{rang}(A) = 1$

i piani sono paralleli

II.a) $\text{rang}(A|b) = 1$

il sistema ha soluzione; i piani hanno un punto in comune, quindi:

i piani sono COINCIDENTI

II.b) $\text{rang}(A|b) = 2$

il sistema non ha soluzione, cioè i piani non hanno punti in comune, quindi:

i piani sono PARALLELI

In $\mathbb{R}^3$ RETTA

forma parametrica

$$r(t) = at + q$$

$$a, q \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}$$

$r \parallel a$ e passante per q

forma cartesiana

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0 \end{cases}$$

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{bmatrix} = 2$$

In $\mathbb{R}^2$ RETTA

forma parametrica

$$r(t) = at + q$$

$$a, q \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

$r \parallel a$ passante per q

forma cartesiana

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma' = 0 \rightarrow \text{è } \parallel \text{ a } \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

$$p(\alpha x + \beta y + \gamma) = 0 \quad \text{è uguale a } \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad \text{con } p \in \mathbb{R}$$

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix} = 1 \rightarrow \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \parallel \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$$

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix} = 2 \rightarrow \text{NON sono } \parallel \Rightarrow \text{hanno un punto in comune (perché siamo nel piano)}$$

$$v = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \text{ è } \perp \text{ alla retta } \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

In $\mathbb{R}^3$ PIANO

$$p(s, t) = as + bt + q \quad \text{forma parametrica}$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \quad \text{forma cartesiana}$$

CONICHE

Equazioni canoniche normalizzate

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{ELLISSE} \quad a > b$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \quad \text{ELLISSE IMMAGINARIA}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{IPERBOLE}$$

$$\frac{y^2}{b^2} - 2x = 0 \quad \text{PARABOLA}$$

Forma generale

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Introducendo:

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad A = A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

l'equazione generale può scriversi:

$$z^T A z = 0 \quad \text{forma compatta}$$

proprietà: A e kA , con $k \neq 0$, individuano la stessa conica

$$z^T A z = 0$$

$$k(z^T A z) = 0$$

$$z^T (kA) z = 0$$

MATRICI delle forme canoniche

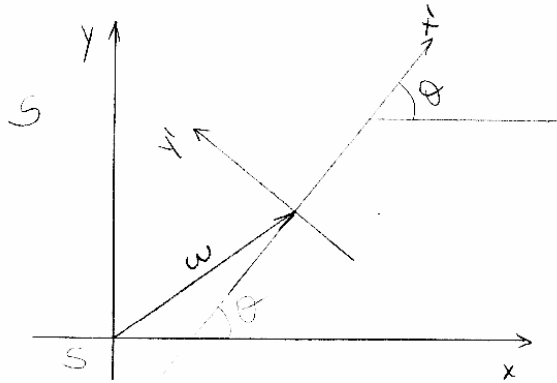
$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ELLISSE}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{IPERBOLE}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PARABOLA

Cambio di sistema di riferimento da S a S'



Trovo le coordinate di S' in S , le sostituisco e trovo le equazioni delle coniche

Il sistema S' è definito tramite due manovre:

- 1) traslazione del vettore $w = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$
- 2) rotazione rigida di θ in senso antiorario.

$$w = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Equazioni della trasformazione

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta + x_0 \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta + y_0 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Tradotto in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_0 \\ \sin \theta & \cos \theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $\mathbb{R}$ T $\mathbb{Z}'$

$$\mathbb{Z} = T \mathbb{Z}'$$

T si può scrivere a blocchi:

$$T = \begin{bmatrix} R & w \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

dove:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{matrice di rotazione}$$

$$w = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad \text{vettore di traslazione}$$

Essendo T una matrice triangolare a blocchi: $\det(T) = \prod \det(\text{blocchi diagonali})$

$$\det(T) = \det(R) \cdot 1$$

Proprietà di R :

$$R^T R = I \rightarrow R^T = R^{-1}$$

$$R^T R = R R^T \rightarrow R \text{ è normale}$$

quindi gli autovettori di R :

$$\begin{cases} X = (x^{(1)}, x^{(2)}) \\ x^{(i)T} x^{(j)} = \delta_{ij} \end{cases}$$

Si considera A partizionato a blocchi nel seguente modo:

$$A = \begin{bmatrix} B & d \\ d^T & c \end{bmatrix}$$

dove:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \quad c = [a_{33}]$$

Sostituisco $z = Tz'$ in $z^T A z = 0$:

$$z'^T T^T A T z' = 0$$

pongo:

$$A' = T^T A T$$

ottingo

$$z'^T A' z' = 0$$

$$A' = \left[\begin{pmatrix} R^T & 0 \\ w^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & d \\ d^T & c \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} R & w \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} R^T B & R^T d \\ w^T B + d^T & w^T d + c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & w \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} R^T B R & R^T B w + R^T d \\ w^T B R + d^T R & w^T B w + d^T w + w^T d + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B' & d' \\ d'^T & c' \end{bmatrix}$$

da cui:

$$B' = R^T B R$$

$$c' = w^T B w + 2w^T d + c$$

$$d' = R^T (B w + d) \quad \rightarrow \quad R^T B w = -R^T d + d'$$

Per il teorema di Biret-Cauchy:

$$\det(A') = \det(T^T A T) = \det(T^T) \det(A) \det(T) = \det(A) \quad \text{il determinante di una conica è detto INVARIANTE}$$

$$B' = R^T B R = R^{-1} B R$$

B' è la trasformata per similitudine di B tramite R , quindi:

$$\det(B') = \det(B)$$

B e B' hanno lo stesso polinomio caratteristico e quindi gli stessi autovalori

$$R = X$$

$$\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\text{tr}(B) = \text{tr}(B')$$

INVARIANTI DI UNA CONICA

- $\det(A) = \det(A')$
- $\det(B) = \det(B')$
- $\text{tr}(B) = \text{tr}(B')$

Caso relativo a IPERBOLE e ELLISSE

Tipo 1.

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & d'_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(A') = \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 d'_{33} = \det(B) d'_{33}$$

$$\Rightarrow d'_{33} = \frac{\det(A)}{\det(B)} = \frac{\det(A')}{\det(B')}$$

$$x'^T A' x' = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'_{33} = 0$$

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\det(A)}{\det(B)} = 0$$

Caso relativo alla PARABOLA

Tipo 2.

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d'_{13} \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ d'_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A') = \det(A) = -d'_{13}^2 \lambda_2$$

$$\Rightarrow d'_{13} = \pm \sqrt{-\frac{\det(A)}{\lambda_2}} \quad \rightarrow \text{scelgo il segno che dà soluzione del sistema } d' = R^T (Bw + d)$$

$$x'^T A' x' = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_2 y'^2 + 2d'_{13} x' = 0$$

Le uniche NON degeneri sono quelle in cui $\det(A) \neq 0$

• $\det(B) < 0$ IPERBOLE

• $\det(B) = 0$ PARABOLA

• $\det(B) > 0$ $\begin{cases} \text{tr}(B) \det(A) > 0 & \text{ELLISSE IMMAGINARIA} \\ \text{tr}(B) \det(A) < 0 & \text{ELLISSE} \end{cases}$

POSIZIONE MUTUA DI UNA RETTA CON UNA CONICA

considero:

$$\mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{z} = 0$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}t + \mathbf{q}$$

$$\begin{cases} \mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{z} = 0 \\ \mathbf{r}(t) = \mathbf{u}t + \mathbf{q} \end{cases}$$

$$(\mathbf{u}t + \mathbf{q})^T \mathbf{A} (\mathbf{u}t + \mathbf{q}) = 0$$

$$\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} t^2 + (\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{q}) t + (\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{u}) t + \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q} = 0$$

$$\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} t^2 + 2(\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{q}) t + \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q} = 0$$

caso ① $\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} = 0$

$$\Rightarrow t^* = -\frac{\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q}}{2\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{q}}$$

si può avere solo in caso di iperbole o parabola:

- la retta è // all'asse della parabola
- la retta è // a uno degli asintoti dell'iperbole

caso ② $\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} \neq 0$

$$\Rightarrow t_{1,2}^* = \frac{-\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{q} \pm \sqrt{\Delta}}{\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u}} \quad \text{con } \Delta = (\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{q})^2 - \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q}$$

II.a) $\Delta > 0$

$$t_1^* \neq t_2^*$$

ci sono due intersezioni DISTINTE

II.b) $\Delta = 0$

$$t_1^* = t_2^*$$

ci sono due intersezioni coincidenti: TANGENZA

II.c) $\Delta < 0$

NON ci sono intersezioni

Equazione della retta tangente alla conica in un punto dato.

Sia q un punto della conica, quindi:

$$q^T A q = 0$$

considero la retta:

$$r(t) = (z - q)t + q$$

$$\Delta = ((z - q)^T A q)^2 - (z - q)^T A (z - q) q^T A q = 0$$

$$\Delta = ((z - q)^T A q)^2 = 0$$

da cui:

$$(z - q)^T A q = 0$$

$$z^T A q - q^T A q = 0$$

$$\Rightarrow z^T A q = 0 \quad \text{equazione della retta tangente ad } A \text{ in } q$$