

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

✓ Dato una matrice A , cerco, se esistono, dei vettori tali che la trasformazione applicata dalla matrice non varia la loro direzione.

Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$Ax = \lambda x$$

voglio ottenere un vettore λx parallelo a x dopo aver applicato A .

$x=0$ è una soluzione, ma non è interessante, quindi cerco vettori del tipo $x \neq 0$

facio passaggi algebrici:

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Questo sistema lineare omogeneo ha soluzioni $x \neq 0 \iff \det(A - \lambda I) = 0$

Dato una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice:

autovalore di A

ogni numero $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che il sistema $Ax = \lambda x$, $x \in \mathbb{C}^n$, abbia soluzione $x \neq 0$;

autovettore destro associato all'autovalore λ

ogni tale vettore x , intendendo che x e kx ($k \in \mathbb{C}$)

rappresentano lo stesso autovettore.

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$B = A - \lambda I$$

$$Bx = 0$$

se $\det(B) \neq 0 \implies Bx = 0$ ha 1 soluzione: $x = 0$

ma voglio che $x \neq 0$ quindi impongo:

$$\det(B) = 0$$

polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \sigma_1 \lambda^{n-1} + \dots - \sigma_{n-1} \lambda + \sigma_n$$

equazione caratteristica

$$p_A(\lambda) = 0$$

σ_i : somma dei determinanti dei minori principali di ordine i

$$\sigma_1 = \text{tr}(A) = \sum \lambda_i$$

$$\sigma_n = \det(A) = \prod \lambda_i$$

Teorema di Ruffini

$$p_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$p_A(0) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \sigma_n = \det(A)$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

da cui:

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda_i = 0$$

Ad ogni autovalore λ_i resta associato un autovettore $x^{(i)}$ soluzione del sistema:

$$(A - \lambda_i I) x^{(i)} = 0$$

Moltiplicità algebrica di λ_i (α_i)

α_i : Numero di volte con cui λ_i compare come zero di $p_A(\lambda)$.

Sono $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ $k \leq n$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$

$$p_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

$$\text{con } \alpha_1 + \dots + \alpha_k = n$$

Moltiplicità geometrica di λ_i (f_i)

Numero di autovettori l.i. associati a λ_i .

Si può dimostrare che

$$1 \leq f_i \leq \alpha_i \leq n \quad i = 1, 2, \dots, k \quad k \leq n$$

$$f_i = \dim(N(A - \lambda_i I)) = n - \text{rang}(A - \lambda_i I)$$

Proprietà:

1) Siano x e y due autovettori p.i. associati allo stesso λ

$$Ax = \lambda x \quad \text{moltiplico per } \alpha$$

$$Ay = \lambda y \quad \text{moltiplico per } \beta$$

$$A(\alpha x) = \lambda(\alpha x)$$

$$A(\beta y) = \lambda(\beta y)$$

somma

$$A(\alpha x) + A(\beta y) = \lambda(\alpha x) + \lambda(\beta y)$$

$$A(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x + \beta y)$$

quindi:

Una qualunque combinazione lineare di x e y è ancora un autovettore associato allo stesso autovalore λ .

2) $Ax = \lambda x$ premoltiplico per A

$$A^2x = \lambda Ax = \lambda^2 x$$

...

$$A^k x = \lambda^k x$$

quindi:

Gli autovalori di A^k sono gli autovalori di A elevati a k

e ammette gli stessi autovettori.

3) Sia $A = A^H$

$$Ax = \lambda x \quad \text{premultiplico per } x^H$$

$$x^H Ax = x^H \lambda x$$

$\Downarrow$

$$\lambda = \frac{x^H Ax}{x^H x}$$

$$R_A(x) = \frac{x^H Ax}{x^H x} \quad \text{quoziente di Rayleigh}$$

essendo $A = A^H$, $x^H Ax$ è un numero reale

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

quindi:

Gli autovalori delle matrici hermitiane sono numeri reali.

Le matrici simmetriche sono un sottoinsieme delle hermitiane, quindi:
Gli autovalori delle matrici simmetriche sono numeri reali.

4) Sia $\det(A) \neq 0$

$$\Rightarrow \lambda_i \neq 0 \quad \text{e} \quad \exists A^{-1}$$

$$Ax = \lambda x \quad \text{premultiplico per } A^{-1}$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x$$

$$Ix = A^{-1}\lambda x \quad \text{divido per } \lambda \text{ essendo } \lambda_i \neq 0$$

$$\frac{1}{\lambda} x = A^{-1}x$$

$$A^{-1}x = \frac{1}{\lambda} x$$

quindi:

Gli autovalori della matrice inversa A^{-1} sono gli inversi degli autovalori di A . Gli autovettori sono gli stessi.

5) TRASLAZIONE DI SPETTRO

$$Ax = \lambda x$$

$$Ax + qx = \lambda x + qx \quad q \in \mathbb{C}$$

$$(A + qI)x = (\lambda + q)x$$

quindi:

Se aggiungo sui termini diagonali uno stesso valore q , ottengo autovalori traslati di q .

Gli autovettori sono gli stessi.

6) $B = S^{-1}AS$

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda) \quad \text{vedi: Matrici simili}$$

quindi:

Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico, quindi hanno gli stessi autovalori.

$$Ax = \lambda x$$

$$S^{-1}Ax = \lambda S^{-1}x$$

$$S^{-1} A I x = \lambda S^{-1} x$$

$$S^{-1} A S S^{-1} x = \lambda S^{-1} x$$

$$B y = \lambda y$$

Gli autovettori di B sono: $y = S^{-1} x$, cioè li ottengo premoltiplicando gli autovettori di A per S^{-1} .

METODI DI LOCALIZZAZIONE DEGLI AUTOVALORI

Teorema di HIRSCH

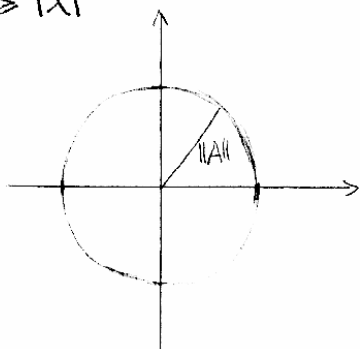
$$Ax = \lambda x$$

$$\|Ax\| = \|\lambda x\|$$

$$\|A\| \|x\| \geq \|\lambda x\|$$

$$\|A\| \|x\| \geq |\lambda| \|x\|$$

$$\|A\| \geq |\lambda|$$



tutti gli autovalori di A stanno in questo cerchio.

Teorema di GERSHGORIN

Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

$$\text{Siano } C_i = \{z \mid |z - a_{ii}| \leq p_i\}$$

(I)

cerchi di centro a_{ii} e raggio p_i

$$\text{con } p_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

allora, se λ è autovalore di A, si ha:

$$\lambda \in C = \bigcup_{i=1}^n C_i$$

$$Ax = \lambda x$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = \lambda x_k$$

$$|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj}x_j = \lambda x_k - a_{kk}x_k$$

$$\sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj}x_j = (\lambda - a_{kk})x_k$$

$$\left| \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj}x_j \right| = |\lambda - a_{kk}| |x_k|$$

$$\sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| |x_j| \geq |\lambda - a_{kk}| |x_k|$$

maggioro ogni $|x_j|$ con $|x_k|$

$$|x_k| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \geq |\lambda - a_{kk}| |x_k|$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \geq |\lambda - a_{kk}|$$

$$\rho_k \geq |\lambda - a_{kk}|$$

se $A \neq A^T$ posso costruire due unioni di cerchi di Gershgorin

$$\text{per } A \rightarrow C$$

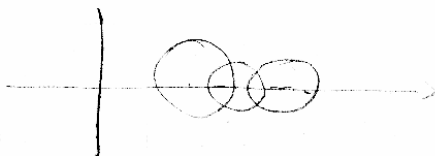
$$\text{per } A^T \rightarrow \tilde{C}$$

avendo A e A^T gli stessi autovalori:

$$\begin{aligned} \lambda \in C \\ \lambda \in \tilde{C} \end{aligned} \Rightarrow \lambda \in C \cap \tilde{C}$$

$$\text{se } A = A^T \quad C = \tilde{C}$$

$$\text{se } A = A^H \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \\ a_{ii} \in \mathbb{R}$$



Teorema di GERSHGORIN (II) preciso meglio la distribuzione degli autovalori all'interno dei dischi

$$A = D + M$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_t = D + tM \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$A_0 = D$$

$$A_1 = A$$

$$t=0$$

$$A_0 = D$$

l'insieme dei dischi di Gershgorin è dato da punti

$$t \approx 0$$

$$A_t = D + tM$$

- t è piccolissimo $\rightarrow$ i dischi hanno raggi piccolissimi

per t che varia con continuità da 0 a 1, anche gli autovalori variano con continuità, cioè non saltano da un disco all'altro

Se M_1 è l'unione di k cerchi di Gershgorin e M_2 è l'unione dei rimanenti $n-k$ ed è $M_1 \cap M_2 = \{0\}$, allora k autovalori appartengono a M_1 e $n-k$ a M_2 .

$n-k$ dischi $\rightarrow n-k$ autovalori

k dischi $\rightarrow k$ autovalori

- Teorema di GERSHGORIN (III)

Sia A irriducibile; se un autovalore appartiene alla frontiera di dell'unione dei cerchi di Gershgorin, esso appartiene alla frontiera di tutti i cerchi. ^{dell'unione} ~~costituenti~~ q

CALCOLO DI AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Metodi iterativi

METODO DELLE POTENZE

Consente di calcolare l'autovalore dominante ($|\lambda|_{\max} = \rho(A)$) e l'autovettore ad esso associato.

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

supponiamo che i λ_i siano tutti distinti in modulo

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$$

La matrice è diagonalizzabile per similitudine, posso avere un sistema completo di vettori l.i.

$$x^{(1)} \quad x^{(2)} \quad \dots \quad x^{(n)}$$

sicuramente sono una base per $\mathbb{C}^n$

fixo un vettore arbitrario

$$z^{(0)} \in \mathbb{C}^n$$

lo posso scrivere come combinazione lineare degli $x^{(i)}$

$$z^{(0)} = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_n x^{(n)}$$

processo iterativo:

$$y^{(0)} = z^{(0)}$$

$$y^{(k)} = A y^{(k-1)} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$y^{(k)} = A y^{(k-1)} = A (A y^{(k-2)}) = A^2 y^{(k-2)} = \dots = A^k y^{(0)}$$

$$y^{(k)} = A^k y^{(0)}$$

$$y^{(k)} = A^k z^{(0)} = A^k (c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_n x^{(n)}) = c_1 A^k x^{(1)} + \dots + c_n A^k x^{(n)}$$

$$(\text{se } Ax = \lambda x \Rightarrow A^k x = \lambda^k x)$$

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= c_1 \lambda_1^k x^{(1)} + c_2 \lambda_2^k x^{(2)} + \dots + c_n \lambda_n^k x^{(n)} = \\ &= \lambda_1^k \left[c_1 x^{(1)} + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k x^{(2)} + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k x^{(n)} \right] \\ &\quad \varepsilon^{(k)} \end{aligned}$$

per $k \rightarrow \infty \quad \varepsilon^{(k)} \rightarrow 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon^{(k)} = 0 \quad \text{perché} \quad \lambda_i < \lambda_1 \Rightarrow \frac{\lambda_i}{\lambda_1} < 1$$

$$y^{(k)} = \lambda_1^k [C_1 x^{(1)} + \varepsilon^{(k)}]$$

cerco la componente di massimo modulo

$$\max_{1 \leq i \leq n} |y_i^{(k)}| = |y_r^{(k)}|$$

$$y_r^{(k)} = \lambda_1^k [C_1 x_r^{(1)} + \varepsilon_r^{(k)}]$$

$$\frac{y^{(k)}}{y_r^{(k)}} = \frac{\lambda_1^k [C_1 x^{(1)} + \varepsilon^{(k)}]}{\lambda_1^k [C_1 x_r^{(1)} + \varepsilon_r^{(k)}]} \approx \frac{x^{(1)}}{x_r^{(1)}}$$

per k abbastanza grande

$$\frac{1}{y_r^{(k)}} y^{(k)} \approx \frac{1}{x_r^{(1)}} x^{(1)}$$

↑ numero
↑ numero

tutti gli autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa arbitraria $\Rightarrow x^{(1)}$ è l'autovettore associato a λ_1

Criterio d'arresto

$$\left\| \frac{y^{(k)}}{y_r^{(k)}} - \frac{y^{(k-1)}}{y_r^{(k-1)}} \right\| < \delta$$

$$x^{(1)} \approx \frac{1}{y_r^{(k)}} y^{(k)}$$

$$\lambda_1 \approx R_A \left(\frac{1}{y_r^{(k)}} y^{(k)} \right)$$

Modifiche che lo rende più stabile numericamente

$$y^{(k)} = A^k y^{(0)}$$

se $\rho(A) > 1 \rightarrow A^k$ e $y^{(k)}$ tendono a crescere molto
a ogni passaggio si tende a normalizzare λ e x

$$\forall z^{(0)} \in \mathbb{C}^n$$

$$\begin{cases} y^{(k)} = A z^{(k-1)} \\ z^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{\alpha_k} \end{cases}$$

modi per scegliere α_k

$$\alpha_k = \begin{cases} \|y^{(k)}\|_2 & (\|z^{(k)}\|_2 = 1) \\ \max |y_i^{(k)}| \end{cases} \quad \leftarrow \text{in genere si preferisce post.}$$

Deflazione

Sia A normale: $AA^H = A^HA$

gli autovettori sono a due a due ortogonali, normalizzati a lunghezza unitaria si ha:

$$x^{(i)H} x^{(j)} = \delta_{ij}$$

applicando:

$$\begin{cases} y^{(k)} = Ax^{(k-1)} \\ z^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{\alpha_k} \end{cases}$$

con $\alpha_k = \|y^{(k)}\|_2$

e ottenuti $x^{(1)}$ e λ_1 si considera la matrice

$$A_1 = A - \lambda_1 x^{(1)} x^{(1)H}$$

proprietà:

$$A_1 x^{(1)} = Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)} x^{(1)H} x^{(1)} = Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)} = 0$$

A_1 ammette $x^{(1)}$ associato all'autovettore 0

$$A_1 x^{(i)} = Ax^{(i)} - \lambda_1 x^{(1)} x^{(1)H} x^{(i)} = Ax^{(i)} = \lambda_i x^{(i)} \quad i \neq 1$$

$$A_1 x^{(i)} = \lambda_i x^{(i)}$$

A_1 ~~non~~ ammette tutti gli altri autovettori

$$0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$$

$$x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}$$

se applico il metodo delle potenze a A_1 , convergerà a λ_2
considero

$$A_2 = A_1 - \lambda_2 x^{(2)} x^{(2)H}$$

trovo λ_3 e $x^{(3)}$

METODO QR

Approssimo simultaneamente tutti gli autovalori della matrice

Teorema

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$\exists Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $Q^T Q = I$ (Q è ortogonale)

$$\text{e } R = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & r_{nn} \end{bmatrix}$$

tale che

$$A = QR$$

$$\text{Sia } B = RQ = IRQ = Q^T Q R Q = Q^T A Q = Q^{-1} A Q$$

B è la trasformata per similitudine di A attraverso Q .

$\Rightarrow B$ e A hanno gli stessi autovalori

Siano

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$$

$$X^{-1} = L X R_X$$

Schema iterativo:

$$A_0 = A$$

$$A_k = Q_k R_k$$

$$A_{k+1} = R_k Q_k$$

$$\{A_k\}_{k=0}^{k=\infty}$$

sono tutte simili

Teorema

se $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$ $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e $X^{-1} = L X R_X$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q_k = I, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

se manca l'ipotesi di fattorizzabilità LR di X^{-1} , si ha ancora la convergenza del metodo, ma può venir meno l'ordinamento del modulo decrescente degli autovalori.

OSSERVAZIONI:

1) prima di iniziare il metodo QR trasformo per similitudine A

$H = S^{-1}AS$ in modo che H sia (quasi triangolare superiore) nella forma di Hessenberg superiore.

$$H = \begin{bmatrix} * & & & * \\ * & & & \\ & \diagdown & & \\ & & * & * \end{bmatrix}$$

La ~~ottimizzazione~~ di H richiede poche operazioni.

$$H_k = Q_k R_k$$

$$H_{k+1} = R_k Q_k$$

↑
sono tutte in forma di Hessenberg.

2) si ammetta che qualche autovettore sia coincidente in modulo (numeri complessi coniugati)

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_i| = |\lambda_{i+1}| > |\lambda_{i+2}| > \dots > |\lambda_n|$$

R_k diventa a blocchi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{i-1} & \\ & & S & \\ & & & \lambda_{i+2} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\text{con } S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \quad \lambda_i, \lambda_{i+1}$$

Il metodo QR si usa anche per calcolare gli zeri di $\forall$ polinomio utilizzando la matrice di Frobenius, che è in forma di Hessenberg.