

SISTEMI LINEARI

Dati $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{C}^m$, un sistema di n equazioni lineari in n incognite si può rappresentare nella forma compatta matriciale:

$$Ax = b$$

dove $x \in \mathbb{C}^n$ è il vettore delle incognite.

A prende il nome di "matrice dei coefficienti del sistema"

b prende il nome di "vettore dei termini noti"

Teorema di ROUCHE-CAPELLI

Il sistema ammette soluzione solo se $\text{rang}(A|b) = \text{rang}(A)$
 $\exists x^* \mid Ax^* = b \iff b \in I(A)$

Per risolvere il sistema ricorro a due s.s.v.

IMMAGINE di A

$$I(A) = \{ y \in \mathbb{C}^m \mid y = Ax, x \in \mathbb{C}^n \} \subseteq \mathbb{C}^m$$

s.s.v. generato dalle colonne l. i. di A .

$$\dim(I(A)) = \text{rang}(A)$$

NUCLEO di A

$$N(A) = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid Az = 0 \} \subseteq \mathbb{C}^n \quad z_1 a^{(1)} + z_2 a^{(2)} + \dots + z_n a^{(n)} = 0$$

$$\text{se } \text{rang}(A) = n \implies z = 0 \quad N(A) = \{0\} \implies \dim(N(A)) = 0$$

Teorema

$$\text{rang}(A) + \dim(N(A)) = n$$

Calcolo soluzioni:

caso (I):

$$\text{rang}(A) = n$$

La soluzione esiste ed è unica

si dimostra supponendo che ce ne siano due (per assurdo)

$$Ax^* = b$$

$$Ax^{**} = b \quad \text{altro caso}$$

$$A(x^* - x^{**}) = 0$$

$$Az = 0 \implies x^* - x^{**} \in N(A)$$

$$\text{ma } \dim(N(A)) = 0$$

$$x^* - x^{**} = 0$$

$\Downarrow$

$$x^* = x^{**} \rightarrow \text{la soluzione è unica}$$

$$\text{I.1) } m = n$$

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) = n$$

Calcolo la soluzione con la

Regola di Kramer

$$x_i^* = \frac{\det(a^{(1)}, \dots, a^{(i-1)}, b, a^{(i+1)}, \dots, a^{(n)})}{\det(A)} \quad i=1, 2, \dots, n$$

← sostituisco la i-esima colonna con b

$$\text{I.2) } m > n$$

Calcolo la soluzione come segue:

- considero un minore di ordine n non singolare
- nel sistema cancello le equazioni che non danno coefficienti a quel minore (ottergo un sistema ridotto quadrato)
- risolvo il sistema ridotto

caso $\textcircled{\text{II}}$:

$$\text{rang}(A) = k < n$$

$$\text{rang}(A) + \dim(N(A)) = n$$

$\Downarrow$

$$\dim(N(A)) = n - k = s \rightarrow \text{cioè in } N(A) \text{ ci sono } s \text{ vettori l.i. (che costituiscono una base per } N(A))$$

$$z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(s)} \in N(A)$$

$$\begin{cases} A z^{(1)} = 0 \\ A z^{(2)} = 0 \\ \vdots \\ A z^{(s)} = 0 \end{cases}$$

moltiplico entrambi i membri per uno scalare

$$\begin{cases} \alpha_1 A z^{(1)} = 0 \\ \alpha_2 A z^{(2)} = 0 \\ \dots \\ \alpha_s A z^{(s)} = 0 \end{cases} \quad \text{sommo}$$

$$A(\alpha_1 z^{(1)} + \alpha_2 z^{(2)} + \dots + \alpha_s z^{(s)}) = 0 \quad \rightarrow \text{anche una combinazione lineare degli } s \text{ vettori sta in } N(A)$$

In questo caso la soluzione NON è unica.

$$A\hat{x} = b$$

$$A(\alpha_1 z^{(1)} + \alpha_2 z^{(2)} + \dots + \alpha_s z^{(s)}) = 0$$

sommo

$$A(\hat{x} + \alpha_1 z^{(1)} + \alpha_2 z^{(2)} + \dots + \alpha_s z^{(s)}) = b$$

$$x^* = \hat{x} + \alpha_1 z^{(1)} + \alpha_2 z^{(2)} + \dots + \alpha_s z^{(s)}$$

coordinato di b rispetto alle colonne di A

contributo del nucleo

La soluzione NON è unica, ma dipende da $s = n - k$ parametri arbitrari

Calcolo la soluzione come segue:

- considero un minore non singolare di ordine k
- cancello dal sistema le equazioni che non danno coefficienti a quel minore
- nelle equazioni rimaste, porto a secondo membro i termini che non danno coefficiente a quel minore (ottergo un sistema ridotto quadrato, con vettore dei termini noti dipendente da s parametri arbitrari)
- risolvo il sistema ridotto

METODI DIRETTI PER SISTEMI LINEARI

Si giunge alla soluzione esatta (a meno degli errori di arrotondamento) con un numero finito di operazioni sui dati.

METODO DI GAUSS o DELLE ELIMINAZIONI SUCCESSIVE

Trasformiamo il sistema in uno triangolare attraverso passi per equivalenze

$$Ax = b \equiv A^{(1)}x = b^{(1)} \rightarrow A^{(2)}x = b^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow A^{(n)}x = b^{(n)} \equiv Rx = c$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & r_{nn} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + \dots + r_{1n}x_n = c_1 \\ \quad r_{22}x_2 + \dots + r_{2n}x_n = c_2 \\ \quad \quad \dots \quad \quad \dots \quad \dots \\ \quad \quad \quad r_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

$$x_n = \frac{c_n}{r_{nn}}$$

$$x_i = \frac{c_i - \sum_{j=i+1}^n r_{ij}x_j}{r_{ii}}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

Come si triangolarizza un sistema:

$$Ax = b \equiv A^{(1)}x = b^{(1)}$$

prendo un sistema 3x3

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)}x_1 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)} \end{cases}$$

per equivalenza lo trasformo in $A^{(2)}x = b^{(2)}$

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \\ \quad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)} \quad \leftarrow \text{multiplico la } 1^a \text{ per } \left(-\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right) \text{ e sommo alla } 2^a \\ \quad a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 = b_3^{(2)} \quad \leftarrow \text{multiplico la } 1^a \text{ per } \left(-\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right) \text{ e sommo alla } 3^a \end{cases}$$

trasforma in $A^{(3)}x = b^{(3)} \equiv Rx = c$

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)}x_3 = b_3^{(3)} \end{cases} \quad \leftarrow \text{moltiplico la 2ª per } \left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right) \text{ e sommo alla 3ª}$$

si parte dal basso e si trova la soluzione

$$l_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}}, \quad i > j \quad 1 \leq j < i \leq n$$

Risultati:

1) costruisco due matrici: $\leftarrow$ metodo di fattorizzazione LR (anche il punto)

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & r_{nn} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \dots & l_{nn-1} & 1 \end{bmatrix}$$

si può dimostrare che

$$A = LR$$

$$2) \det(A) = \det(LR) = \det(L) \det(R) = 1 \cdot r_{11} \cdot r_{22} \cdot \dots \cdot r_{nn}$$

$$3) AX = I \equiv (Ax^{(1)}, Ax^{(2)}, \dots, Ax^{(n)}) = (e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)})$$

$$X = A^{-1}$$

$$\begin{cases} Ax^{(1)} = e^{(1)} \\ \dots \\ Ax^{(n)} = e^{(n)} \end{cases} \rightarrow n \text{ sistemi lineari}$$

$$AX = I \rightarrow RX = C \rightarrow IX = A^{-1}$$

posso calcolare A^{-1}

$$4) l_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}} \quad i > j \quad 1 \leq j < i \leq n$$

se $a_{jj} = 0$ scambio tra loro due equazioni
invece di vedere di volta in volta se $a_{jj} = 0$, scelgo tra tutti quello
con modulo max.

pivoting parziale

$$\max_{1 \leq k \leq n} |a_{k1}^{(1)}| = |a_{r_1}^{(1)}|$$

$$\max_{2 \leq k \leq n} |a_{k2}^{(2)}| = |a_{s_2}^{(2)}|$$

in questo metodo dobbiamo tenere presente il numero di scambi, N , effettuati

$$\det(A) = (-1)^N r_{11} r_{22} \dots r_{nn}$$

METODI ITERATIVI PER SISTEMI LINEARI

La soluzione viene approssimata dai termini di una successione di cui la soluzione cercata è il limite.

Si considera una partizione di A

$$A = M - (M - A) = M - N$$

$$\det(M) \neq 0$$

$$Ax = b$$

$$(M - N)x = b$$

$$Mx = b + Nx$$

premultiplico per M^{-1}

$$M^{-1}Mx = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

$$x = Hx + c \quad \equiv Ax = b$$

$$x^* = Hx^* + c$$

$$\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

$$x^{(1)} = Hx^{(0)} + c$$

$$x^{(2)} = Hx^{(1)} + c$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + c \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

genero una successione di vettori

$$\{x^{(k)}\}_{k=0}^{k=\infty}$$

scelto opportunamente H

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$$

criterio d'arresto

$$e^{(k)} = \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$$

assumo come soluzione del sistema:

$$x^{(k+1)} \simeq x^*$$

$H \rightarrow$ matrice di iterazione

$$x^{(k)} = H x^{(k-1)} + c$$

$$x^* = H x^* + c$$

$$x^* - x^{(k)} = H (x^* - x^{(k-1)})$$

$e^{(k)} \rightarrow$ errore che commetto al k -esimo passo

$$e^{(k)} = H e^{(k-1)} = H (H e^{(k-2)}) = H^2 e^{(k-2)} = \dots = H^k e^{(0)}$$

$$e^{(k)} = H^k e^{(0)}$$

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinché il metodo iterativo converga è che H sia convergente.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H^k = 0 \iff \rho(H) < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^* \iff \rho(H) < 1$$

$$e^{(k)} = H^k e^{(0)}$$

$$\|e^{(k)}\| = \|H^k e^{(0)}\| \leq \|H^k\| \|e^{(0)}\| \leq \|H\|^k \|e^{(0)}\|$$

$$\|e^{(k)}\| \leq \|H\|^k \|e^{(0)}\|$$

$$\text{se } \|H\| < 1 \Rightarrow \|e^{(k)}\| \rightarrow 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^* \Rightarrow \exists \|H\| < 1 \quad \text{condizione sufficiente}$$

per il teorema di Hirsch

$$\rho(H) \leq \|H\|$$

se trovo una $\|H\| < 1 \Rightarrow$ converge sicuramente
se non la trovo non è detto che non converga

velocità di convergenza

$$\|e^{(k)}\| \leq \|H\|^k \|e^{(0)}\|$$

$$\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} \leq \|H\|^k \rightarrow \frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} \approx \rho^k(H)$$

Suppongo che dopo k iterazioni, $\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} = 10^{-m}$

$$10^{-m} \approx \rho^k(H)$$

$$-m \approx k \log(\rho(H))$$

$$\frac{m}{k} \approx -\log(\rho(H)) \quad \rho \rightarrow 0 \quad \log \rightarrow -\infty \quad \frac{m}{k} \rightarrow +\infty$$

$$\frac{m}{k} = -\log(\rho(H)) = V \rightarrow \text{velocità di iterazione}$$

Considero la partizione

$$A = D - E - F$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad -E = \begin{bmatrix} 0 & & \\ a_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix} \quad -F = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & a_{1n-1} \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

METODO DI JACOBI

Scrivo $Ax - b = 0$ nel modo seguente:

$$M = D$$

$$N = E + F$$

$$Dx = (E + F)x + b$$

da cui:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b$$

$$H_J = D^{-1}(E + F)$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right] \quad i = 1, 2, \dots, n$$

METODO DI GAUSS-SEIDEL o delle sostituzioni successive

Scrivo $Ax - b = 0$:

$$M = D - E$$

$$N = F$$

$$(D - E)x = Fx + b$$

da cui:

$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1} F x^{(k)} + (D - E)^{-1} b$$

$$H_{GS} = (D - E)^{-1} F$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right] \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Teorema

Se A è d.d.f., cioè $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

$$\Rightarrow \rho(H_J) < 1 \quad \rho(H_{GS}) < 1$$

i due metodi convergono

Teorema

Se A è d.d.d. e $G(A)$ f.c., cioè $|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ e graf. f.c.

$$\Rightarrow \rho(H_J) < 1 \quad \rho(H_{GS}) < 1$$

i due metodi convergono

La convergenza di un metodo NON implica quella dell'altro.

Teorema

Per matrici tridiagonali

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & & \ddots & \\ & & & a_{m-1,m} \\ & & a_{m,m} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\rho(H_{GS}) = \rho^2(H_J)$$

$$V_{GS} = 2 V_J$$