

VETTORI

$$a \in \mathbb{C}^m \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad \text{vettore colonna} \quad a$$

$$a^T \in \mathbb{C}^{1 \times m} \quad a^T = [a_1, a_2, \dots, a_m] \quad \text{vettore riga} \quad a^T$$

considero k vettori $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)}$

• vettori ORTOGONALI

$$\langle v^{(i)}, v^{(j)} \rangle = 0 \quad 1 \leq i \neq j \leq k$$

• vettori ORTONORMALI

$$\langle v^{(i)}, v^{(j)} \rangle = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq k$$

dove δ_{ij} è il δ di Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Faccio una combinazione lineare dei k vettori:

$$\alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \dots + \alpha_k v^{(k)} \in V \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$$

i vettori sono: $\{v^{(i)}\}_{i=1}^k$

linearmente DIPENDENTI (l.d.)

$$\text{se } \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \dots + \alpha_k v^{(k)} = 0$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ NON tutti nulli

linearmente INDIPENDENTI (l.i.)

$$\text{se } \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \dots + \alpha_k v^{(k)} = 0$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ TUTTI nulli

MATRICI

$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$: matrice di m righe e n colonne

se $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$

$$b_{ij} = a_{ji} \quad B = A^T \quad \rightarrow \text{trasposta}$$

$$b_{ij} = \bar{a}_{ji} \quad B = A^H \quad \rightarrow \text{coniugata hermitiana}$$

$D \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) \quad \rightarrow \text{matrice diagonale}$$

$L \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{triangolare inferiore}$$

(se $l_{ii} = 0 \quad i=1, \dots, n \Rightarrow \text{triangolare inf. in senso stretto}$)

$R \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{triangolare superiore}$$

(se $r_{ii} = 0 \quad i=1, \dots, n \Rightarrow \text{triang. sup. in senso stretto}$)

$A \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ volte}} \quad A^0 = I$

$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \quad \text{Convergente}$

$A = A^H \quad \text{Hermitiana}$

$A = A^T \quad \text{Simmetrica}$

$A\bar{A} = \bar{A}A = I$

$A^H A = A A^H = I \quad \text{Unitaria} \quad \rightarrow (\text{nel campo reale : Ortogonale})$

$A^H A = A A^H \quad \text{Normale}$

predominanza diagonale forte (d.d.f.)

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

diagonalmente dominante in senso forte
debole

predominanza diagonale debole (d.d.d.)

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad \text{e per almeno un } i \quad |a_{rr}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^n |a_{ij}|$$

Operazioni tra matrici

Matrice somma $\rightarrow$ proprietà associativa e commutativa

$$A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

$$C = A + B$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Matrice prodotto righe per colonne $\rightarrow$ propr. associativa e distributiva

$$A \in \mathbb{C}^{m \times k}, \quad B \in \mathbb{C}^{k \times n}$$

$$C = AB$$

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} b_{lj} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

condizione di compatibilità delle dimensioni

$${}_m A_k \quad {}_k B_n = {}_m C_n$$

$$C \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

NON valgono la propr. commutativa e la legge dell'annullamento del prodotto

$$AB \neq BA$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(AB)^H = B^H A^H$$

Prodotto esterno

Sia $a \in \mathbb{C}^m$ e $b \in \mathbb{C}^n$

$$ab^H = \begin{bmatrix} a_1 \bar{b}_1 & \dots & a_1 \bar{b}_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_m \bar{b}_1 & \dots & a_m \bar{b}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

$$\left(I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = (e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, \dots, e^{(n)}) \rightarrow \text{matrice identica} \right)$$

Teorema

Sia A hermitiana ($A=A^H$) e $x \in \mathbb{C}^n$:

$x^H A x$ è un numero reale (in quanto coincide con il suo coniugato)

$$\overline{x^H A x} = (x^H A x)^H = x^H A^H x = x^H A x$$

Se $\forall x \neq 0$, $x^H A x > 0 \implies A$ è ^{detta} definita positiva

Matrice organizzata a BLOCCHI

Gli elementi della matrice sono a loro volta matrici o vettori.

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \rightarrow \text{matrice di ordine 2 a blocchi}$$

$$A \in \mathbb{C}^{k \times k}, B \in \mathbb{C}^{k \times m}, C \in \mathbb{C}^{m \times k}, D \in \mathbb{C}^{m \times m}$$

$$M^H = \begin{bmatrix} A^H & B^H \\ C^H & D^H \end{bmatrix}$$

traccia della matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \text{tr}(A)$

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

$A_{ij} \rightarrow$ matrice ottenuta da A cancellando la i -esima riga e la j -esima colonna

Matrice inversa (A^{-1})

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

Teorema

$$\exists A^{-1} \mid AA^{-1} = A^{-1}A = I \iff \det(A) \neq 0$$

A si dice INVERTIBILE o NON DEGENERARE o NON SINGOLARE
se $\det(A) \neq 0$

Se $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ e $a_{ii} \neq 0 \quad i=1,2,\dots,n$

$$\implies A^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_{11}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}}\right)$$

Minore di ordine k

Sia $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ e un intero $k \leq \min\{m, n\}$.

Si dice "minore di ordine k " la matrice ottenuta da A prendendo k colonne e k righe comunque fissate.

Minore principale di ordine k

Sottomatrice di ordine k estratta da A e avente diagonale principale composta da elementi della diagonale principale di A .

Minore principale di testa di ordine k

Sottomatrice di ordine k formata dalle prime k colonne e k righe di A .

Rango o caratteristica è legato al det

$\text{Rango}(A) =$ ordine massimo dei minori non degeneri

per matrici quadrate
 $\text{Rango}(A) = \text{rango}(A^T)$

$\text{rango}(A^*) = \text{rango}(A)$

Se $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ e $\text{rango}(A) = \min\{m, n\} \rightarrow A$ è di rango massimo

Sia $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{C}^m$

$$A|b = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad \text{matrice completa}$$

$$\text{rango}(A|b) \geq \text{rango}(A)$$

Teorema

$$\text{rango}(A) = \text{n}^\circ \text{ righe l.i.} = \text{n}^\circ \text{ colonne l.i.}$$

$$\text{rango}(A|b) = \text{rango}(A) \iff b \text{ è una combinazione lineare delle colonne di } A$$

Spettro di una matrice

Distribuzione degli autovalori sul piano di Gauss. (complesso)

Raggio spettrale $\rho(A)$

Numero reale non negativo tale che

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

Minore complementare di un elemento a_{ij}

Numero M_{ij} tale che sia il determinante della matrice di ordine $n-1$ ottenuta dalla matrice di partenza eliminando la i -esima riga e la j -esima colonna

Aggiunto dell'elemento a_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Trasformata per similitudine

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}, S \in \mathbb{C}^{n \times n}, \det(S) \neq 0 \Leftrightarrow \exists S^{-1}$$

$$B = S^{-1} A S \quad B \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$B \rightarrow$ matrice trasformata per similitudine di A tramite S

A e B si dicono SIMILI

$$B = S^{-1} A S \Leftrightarrow A = S B S^{-1}$$

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det(S^{-1} A S - \lambda S^{-1} S) = \det(S^{-1} (A - \lambda I) S) = \\ &= \det(S^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(S) = \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda) \end{aligned}$$

quindi:

Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

quindi gli stessi autovalori.

Matrice diagonalizzabile

Si dice che A è diagonalizzabile se esiste una matrice X non singolare tale che

$$X^{-1} A X = D$$

con $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

e dove $x^{(i)}$ $i=1, 2, \dots, n$ sono autovettori l.i. di A

Dimostrazione:

$$B = S^{-1}AS \quad B \text{ sia diagonale}$$

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

premultiplio per S

$$IAS = S \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A [s^{(1)} s^{(2)} \dots s^{(n)}] = S [\lambda_1 e^{(1)} \lambda_2 e^{(2)} \dots \lambda_n e^{(n)}]$$

$$A s^{(i)} = \lambda_i s^{(i)}$$

$\Rightarrow$ le colonne della matrice $S (=X)$ sono autovettori di A

Affinché A sia diagonalizzabile devo costruire una matrice S tale che le sue colonne siano autovettori l.i. di A

se ciò non accade possiamo arrivare al max ad avere le forme canoniche di Jordan

Teorema

Una matrice è diagonalizzabile se e solo se per ogni suo autovettore

$$\alpha(\lambda) = f(\lambda)$$

Teorema

Una matrice A è normale (cioè $AA^* = A^*A$), se e solo se esiste una matrice unitaria U ($U^*U = I$), tale che

$$U^*AU = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

$$AA^* = A^*A \Leftrightarrow \exists U, U^*U = I \mid U^*AU = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

da cui:

- Le matrici normali sono diagonalizzabili per similitudine, in quanto $U^H = U^{-1}$
- Le matrici normali ammettono un sistema completo di autovettori ortonormali, avendosi $x^{(i)H} x^{(j)} = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$
- Le matrici hermitiane, in quanto normali, sono diagonalizzabili per similitudine tramite una matrice unitaria.

Teorema

Una matrice hermitiana è definita positiva se e solo se i suoi autovettori sono positivi.

$$x^H A x > 0 \iff \lambda > 0 \quad \text{infatti} \quad \lambda = \frac{x^H A x}{x^H x} \rightarrow > 0 \iff \lambda > 0$$

Indice di condizionamento di una matrice $\mu(A) \geq 1$

$$\mu(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

$$Ax = b$$

supponiamo di perturbare

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

$$\delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\delta b \in \mathbb{R}^n$$

Teorema

Scelta una norma, si può definire l'errore relativo sul vettore soluzione:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\mu(A)}{1 - \mu(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

fattore di amplificazione

$$\mu(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|I\| = 1$$

Per poter applicare la formula deve valere:

$$\|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < 1 \implies \|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1 \implies \|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

per matrici simmetriche: $A = A^T$

$$\mu_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \rho(A) \rho(A^{-1}) = |\lambda|_{\max} \frac{1}{|\lambda|_{\min}} = \frac{|\lambda|_{\max}}{|\lambda|_{\min}}$$

Matrice compagna o di Frobenius

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n \left[x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n} \right] = a_n q(x)$$

$$q(x) = x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 \quad b_i = \frac{a_i}{a_n} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -b_0 \\ 1 & & & -b_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & -b_{n-2} \\ & & 1 & -b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$p_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) = q(\lambda)$$

Gli autovalori di F sono zeri di $q(\lambda)$

i dischi di Gershgorin saranno tutti concentrici tranne uno, quello con centro

FORMA CANONICA DI JORDAN

Teorema

Ogni matrice A , di ordine n , avente $k \leq n$ autovalori distinti, è simile ad una matrice diagonale a k blocchi, cioè esiste una matrice H non singolare tale che

$$H^{-1}AH = J = \text{diag}(J^{(1)}, J^{(2)}, \dots, J^{(k)}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

dove ogni blocco diagonale $J^{(i)}$ è di ordine $\alpha(\lambda_i)$, $i=1,2,\dots,k$ ed è anch'esso di forma diagonale a blocchi, avendo

$$J^{(i)} = \text{diag}(J_1^{(i)}, J_2^{(i)}, \dots, J_{f(\lambda_i)}^{(i)}) \in \mathbb{C}^{\alpha_i \times \alpha_i}$$

ciascun blocco $J_p^{(i)}$ è detto blocco di Jordan

$$J_p^{(i)} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{p_p^{(i)} \times p_p^{(i)}} \quad p=1,2,\dots,f(\lambda_i)$$

$p_p^{(i)}$ = ordine di $J_p^{(i)}$

$$\sum_{p=1}^{f(\lambda_i)} p_p^{(i)} = \alpha(\lambda_i)$$

$$p_{J^{(i)}}(\lambda) = \det(J^{(i)} - \lambda I) = (\lambda_i - \lambda)^{p_p^{(i)}}$$

polinomio caratteristico

si dice $p_{J^{(i)}}(\lambda)$ divisore elementare di A

Il numero dei blocchi di Jordan di una matrice A corrisponde al numero di autovettori l.i. di A .

DETERMINANTE → numero associato a matrici quadrate
che si calcola per ricorrenza

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \text{fisso } j \text{ (la colonna) e faccio variare } i \text{ (le righe)}$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \quad \text{fisso } i \text{ (la riga) e faccio variare } j \text{ (le colonne)}$$

Se A è diagonale o triangolare:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow a_{ii} \neq 0 \quad i=1, 2, \dots, n$$

A_{ij} è matrice ottenuta da A eliminando la i -esima riga e la j -esima colonna

Teorema di BINET - CAUCHY

Siano $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, si ha:

$$\det(AB) = \begin{cases} 0 & m > n \\ \det(A)\det(B) & m = n \end{cases}$$

per matrici quadrate ($n \times n$) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

da cui:

$$\begin{aligned} \det(AA^{-1}) &= \det(A)\det(A^{-1}) \\ \det(AA^{-1}) &= \det(I) = 1 \end{aligned} \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

per matrici quadrate

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\det(A^H) = \det(\overline{A^T}) = \overline{\det(A^T)} = \overline{\det(A)}$$

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

$$= a_{11} \det(\text{matrice triang. di ordine } n-1) = a_{11} a_{22} \det(\text{matrice triang. ordine } n-2) = \dots = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

- matrici che hanno colonne l.d. hanno $\det = 0$

$$\det(a^{(1)}, \dots, a^{(k)} + \alpha a^{(p)}, \dots, a^{(p)}, \dots, a^{(n)}) = \det(a^{(1)}, \dots, a^{(k)}, \dots, a^{(p)}, \dots, a^{(p)}, \dots, a^{(n)})$$

se trovo che:

$$a^{(k)} + \alpha a^{(p)} = 0 \Rightarrow a^{(k)} = -\alpha a^{(p)}$$

$$\det(A) = 0$$

- $\det(a^{(1)}, \dots, a^{(k)}, \dots, a^{(p)}, \dots, a^{(p)}, \dots, a^{(n)}) = -\det(a^{(1)}, \dots, a^{(p)}, \dots, a^{(k)}, \dots, a^{(n)})$

$$\det(A) = (-1)^p \det(A) \quad \text{con } p = \text{n° di scambi di colonne}$$

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$\det(A)$ = somma dei prodotti degli elementi di una linea (riga o colonna) per i rispettivi aggiunti.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
fisso i fisso j

POLINOMIO MINIMO

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= p_J(\lambda) = \det(J - \lambda I) = \\ &= \det(J^{(1)} - \lambda I) \dots \det(J^{(k)} - \lambda I) = \\ &= \det(J_1^{(1)} - \lambda I) \dots \det(J_{j_1}^{(1)} - \lambda I) \dots \det(J_1^{(k)} - \lambda I) \dots \det(J_{j_k}^{(k)} - \lambda I) = \\ &= (\lambda_1 - \lambda)^{p_1^{(1)}} \dots (\lambda_1 - \lambda)^{p_{j_1}^{(1)}} \dots (\lambda_k - \lambda)^{p_1^{(k)}} \dots (\lambda_k - \lambda)^{p_{j_k}^{(k)}} \end{aligned}$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p^{(1)}} \dots (\lambda - \lambda_k)^{p^{(k)}} q(\lambda)$$

dove:

$$p^{(i)} = \max_i \{p_1^{(i)}, \dots, p_{j_i}^{(i)}\} \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$q(\lambda)$ è il prodotto di tutti i rimanenti fattori moltiplicato per -1 se l è dispari.

$$\text{Se } l = p^{(1)} + \dots + p^{(k)}$$

Il polinomio di grado $l \leq n$

$$\psi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p^{(1)}} \dots (\lambda - \lambda_k)^{p^{(k)}}$$

è detto polinomio minimo di A .

Teorema

$\psi_A(\lambda)$ è il polinomio monico di grado minimo tale che

$$\psi_A(A) = O$$

Esso è univocamente determinato.

- Il coefficiente del termine di grado massimo di $\psi_A(\lambda)$ è 1
- $\psi_A(\lambda_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k$
- se $n = k$, cioè se tutti gli autovalori di A sono distinti, oppure se A è un unico blocco elementare di Jordan di ordine n , $\psi_A(\lambda)$ coincide, a meno del segno, con $p_A(\lambda)$.
- poiché il polinomio minimo è un fattore di $p_A(\lambda)$ si ha anche:

Teorema di Cayley - Hamilton

$$P_A(A) = 0$$

cioè una matrice verifica la sua equazione caratteristica

$$\psi_A(A) = 0 \rightarrow \text{consente, a volte, di calcolare la matrice } A^{-1}$$