

LEZIONE DEL 02/03/2007

12

ASPETTI ENERGETICI:

INCISO: RICORDIAMO DI AVER DEFINITO L'IMPEDENZA CARATTERISTICA DELLO SPAZIO LIBERO

$$\varphi_E = c \varphi_B$$

$$\varphi_E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \varphi_H$$

AI CAMPI POSSIAMO ASSOCIARE UN'ENERGIA PARI A:

$$u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E^2$$

POSSIAMO INOLTRE ASSOCIARVI UNA POTENZA TRASMESSA PER MEZZO DEL VETTORE DI Poynting:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = E H \vec{m} = E \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot E \cdot \vec{m}$$

MOLTIPLICANDO E DIVIDENDO PER ϵ_0

$$\vec{S} = E \sqrt{\frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_0}{\mu_0 \cdot \epsilon_0}} E \cdot \vec{m} = \epsilon_0 E^2 c \vec{m} = \mu_{em} \cdot c \cdot \vec{m}$$

$$\nabla \cdot (\mu_{em} c \cdot \vec{m}) + \frac{d\mu_{em}}{dt} = 0$$

ABBIAMO COSÌ ESPLICITATO LA CORRELAZIONE TRA ONDA ED ENERGIA TRASPORTATA.

SE I CAMPI HANNO ANDAMENTO SINUSOIDALE NEL TEMPO, L'ENERGIA E IL VETTORE DI POYNTING HANNO UN VALORE MEDIO NULLO NEL PERIODO:

(13)

$$\langle \nabla \cdot \vec{S} \rangle = 0 \Rightarrow \text{Re}(\nabla \cdot \vec{S}) = 0$$

ESERCIZIO:

SIA DATA UNA LINEA CHIUSA SU UN CORTO CIRCUITO A VALLE



SI TRATTA DI UN MODO TEM CHE CARATTERIZZA QUESTA LINEA DI TRASMISSIONE, PER LA QUALE CI CHIEDIAMO SE POSSIAMO DEFINIRE UN'IMPEDENZA CARATTERISTICA.

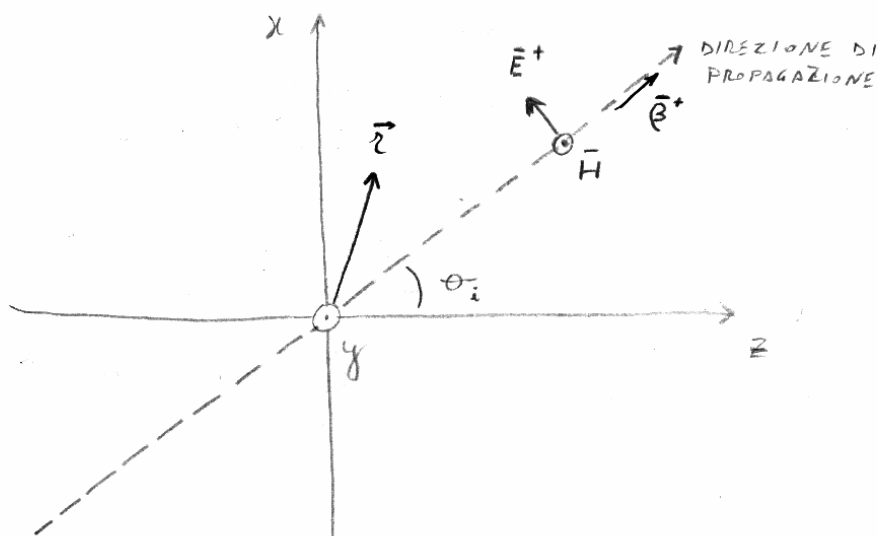
LA POTENZA TRASFERITA AL CORTO È, OVVIAMENTE, NULLA. IL VALORE MEDIO DEL VETTORE DI POYNTING È, PERTANTO, NULLO.

TRATTANDOSI DI UNA LINEA FINITA CHIUSA SU UN CORTO, AVREMO CERTAMENTE UN'ONDA RIFLESSA (ADDIRITTURA LA RIFLESSIONE È TOTALE). NON POSSIAMO PERTANTO PARLARE DI IMPEDENZA CARATTERISTICA.

VELOCITA' DI FASE :

(14)

SIA DATO IL MODO RIPORTATO IN FIGURA :



VIE' SOLAMENTE UN ONDA PROGRESSIVA (INDICATA CON APICE "+")
PER QUANTO DEFINITO IN PRECEDENZA, SAPPIAMO CHE
SI TRATTA DI UN MODO TE.

POSSIAMO SCOMPORRE $\vec{E}^+$ NELLE SUE COMPONENTI:

$$\vec{E}^+ = E^+ (\cos \theta_i \cdot \vec{a}_x - \sin \theta_i \cdot \vec{a}_z) \quad (*)$$

SUPPONIAMO CHE IL CAMPO ELETTICO ABBA
UN ANDAMENTO SINUSOIDALE NEL TEMPO :

$$E^+ = E_m^+ \cdot \cos(\omega t - \beta z)$$

POSSIAMO RICONOSCERE IN QUESTA ESPRESSIONE
UNA FUNZIONE D'ONDA. SONO POSTE, PER
CONVENZIONE: β = COSTANTE DI FASE.

DATO L'ANDAMENTO SINUSOIDALE, LA (*) E'
SUSCETTIBILE DI RAPPRESENTAZIONE FASORIALE:

$$\vec{E} = E^+ (\cos \theta_i \vec{a}_x - \sin \theta_i \vec{a}_z) \cdot e^{-j\omega \vec{\beta}^+ \cdot \vec{z}} \quad (15)$$

DOVE:

$\vec{z}$ = DIREZIONE SCELTA COME RIFERIMENTO

$\vec{\beta}^+$ = VELOCITA' DI FASE

$$\vec{\beta}^+ \cdot \vec{z} = \beta^+ (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)$$

La velocità di fase nella DIREZIONE $\vec{z}$ E' DATA DA:

$$v_z = \frac{\omega}{\beta^+ \cos \theta_i}$$

CHE, AL LIMITE VALE:

$$\lim_{\theta_i \rightarrow \frac{\pi}{2}} v_z = \infty$$

NON DEVE SCANDALIZZARE QUESTO RISULTATO, IN QUANTO SI PARLA DI VELOCITA' DI FASE (NON DI PROPAGAZIONE). AD ESSA NON E' ASSOCIATO ALCUN TRASPORTO DI ENERGIA.

E' DI SEGUITO RIPROPOSTA LA TRATTAZIONE FATTA SEGUENDO UN PERCORSO MATEMATICO PIU' RIGOROSO, SIA:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \dot{V} = V_m e^{j\varphi}$$

16

$$E(t, z) = E^+ \cos(\omega t - \beta^+ z) \Rightarrow \dot{E} = E^+ e^{-j\beta^+ z}$$

QUESTA ESPRESSIONE È RIFERITA AD UN MODO TEM

SE, IN GENERALE, I VETTORI $\vec{z}$ E $\vec{\beta}^+$

NON SONO ORIENTATI SULLA STESSA DIREZIONE, DOBBIAMO RICORRERE AD UN PRODOTTO SCALARE:

$$\vec{\beta}^+ = \beta (\sin \theta; \vec{a}_x + \cos \theta; \vec{a}_z)$$

DI VALIDITÀ PIÙ GENERALE

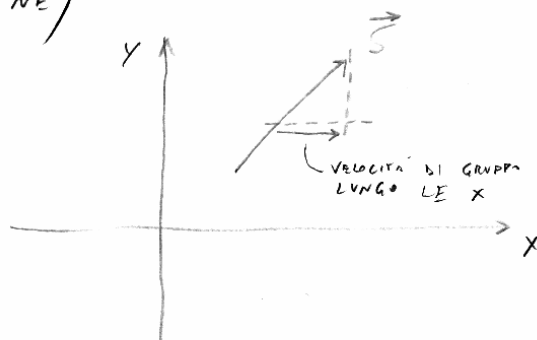
$$\vec{\beta}^+ \cdot \vec{z} \Rightarrow \dot{E} = E^+ \cdot e^{-j(\vec{\beta}^+ \cdot \vec{z})}$$

Varia la DIREZIONE DI $\vec{z}$ SI NOTA CHE LA VELOCITÀ DI FASE È MINIMA NELLA DIREZIONE DELLA VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE.

ESISTONO ANCHE ALTRE DEFINIZIONI DI VELOCITÀ:

VELOCITÀ DI GRUPPO:

È IL RAPPORTO TRA VETTORE DI POYNTING ED ENERGIA ELETTROMAGNETICA (STABILITA UNA DIREZIONE)



(17)

ANALISI DIMENSIONALE :

$$[v_g] = \frac{[W]}{[m^2]} \cdot \frac{[m^3]}{[W] \cdot [sec]} = \frac{[m]}{[sec]}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$\vec{S} \cdot \mu_{em}^{-1}$$

NEL MODO TEM SI HA CHE $v_g = v_z$,

OVVERO :

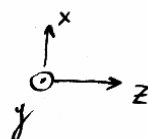
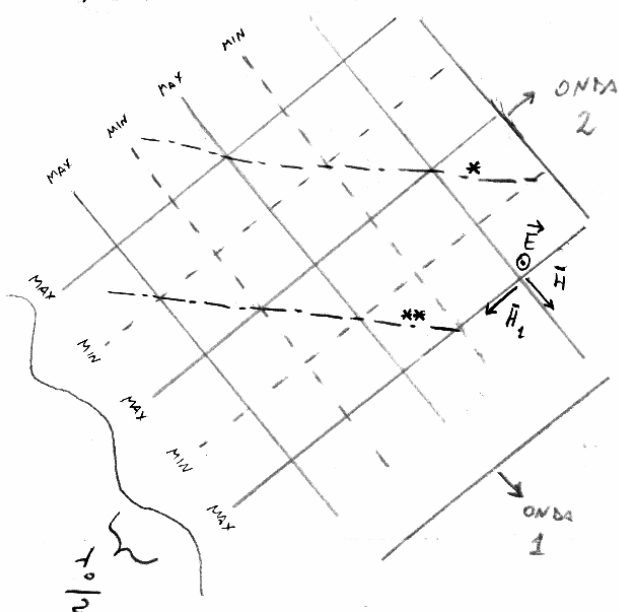
$$v_g \cdot v_z = v^2$$

IL PRODOTTO $v_g \cdot v_z$ RESTITUISCE COME RISULTATO
IL QUADRATO DELLA VELOCITA' DI PROPAGAZIONE

ABBIAMO FINORA STUDIATO IL COMPORTAMENTO
DELLE ONDE NEL MODO TEM. CASI PIU'
COMPLESSI SI PRESENTANO QUANDO DUE O
PIU' ONDE SI INCONTRANO. IN QUESTO CASO
SI DICE CHE IL MODO IN ESAME E' DI
ORDINE SUPERIORE.

MODI DI ORDINE SUPERIORE.

(18)



* QUESTA LINEA RICONGIUNGE TUTTI I PUNTI IN CUI I CAMPI ELETTRICI SI ANNULLANO VICINEVOLMENTE (COMPOSIZIONE DISTRUTTIVA)

** QUESTA LINEA RICONGIUNGE TUTTI I PUNTI IN CUI I CAMPI ELETTRICI SI SOMMANO (COMPOSIZIONE COSTRUTTIVA)

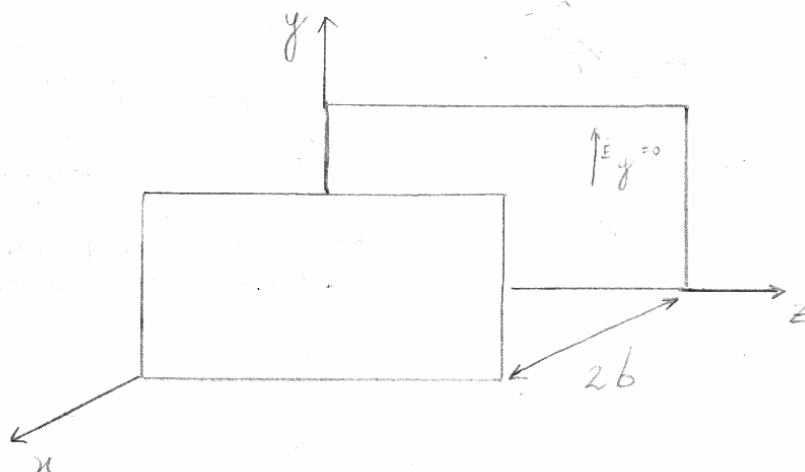
QUESTE DUE ONDE (SINGOLARMENTE TEM) SI COMBINANO A FORMARE UN MODO TE^z , MENTRE NON È POSSIBILE ESPRIMERE RIQUADRO AL MODO IN CUI SI COMpongono I CAMPI MAGNETICI. SI TRATTA DI UN MODO DI ORDINE SUPERIORE.

PER SEMPLICITÀ DI TRATTAZIONE, LE DUE ONDE HANNO UGUALE LUNGHEZZA D'ONDA λ_0 .

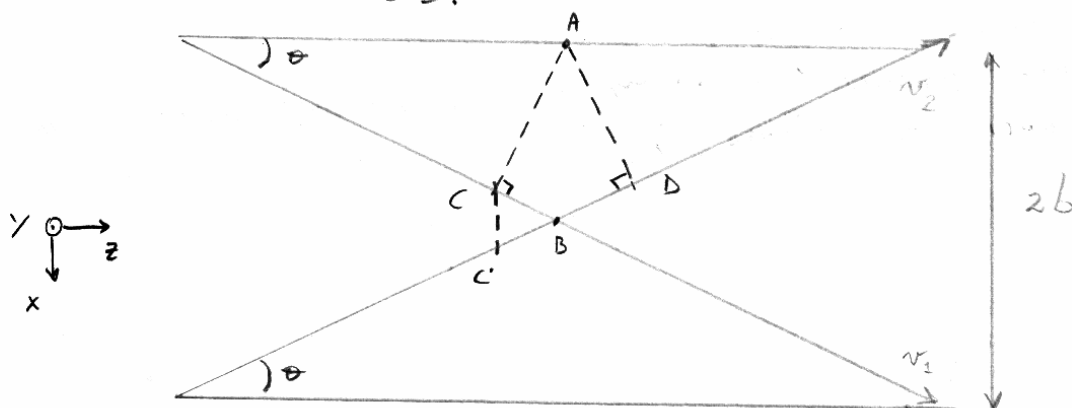
(19)

GUIDE D'ONDA:

CON RIFERIMENTO ALLE ONDE DESCRITTE NEL PARAGRAFO PRECEDENTE COSTRUIAMO DUE PIASTRE METALLICHE POSTE A DISTANZA $2b$



IL CAMPO ELETTRICO, NEI PIANI CONDUTTORI, È NULLO. POSSIAMO SOVRAPPORRE LE DUE ONDE DESCRITTE IN PRECEDENZA A GUISA DI FAR COINCIDERE I PUNTI DI COMPOSIZIONE DISTRUTTIVA CON I DUE PIANI. LA COMPATIBILITÀ GEOMETRICA SUSSISTE.



IL PUNTO A È UN PUNTO DI COMPOSIZIONE DISTRUTTIVA

IL PUNTO B È UN PUNTO DI COMPOSIZIONE COSTRUTTIVA

PER RAGIONI PURAMENTE GEOMETRICHE SI HA :

(20)

$$CB = BD, \quad C'B = CB = BD$$

$$CD = \frac{\lambda_0}{2} \quad CB = \frac{\lambda_0}{4}$$

$$CB = AB \sin \theta = b \sin \theta$$

$$\frac{\lambda_0}{4} = b \sin \theta \Rightarrow \lambda_0 = 4b \sin \theta$$

$$CB = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{INTERO}}}{m} \frac{\lambda_0}{4} \quad (\times \text{ multiple int.})$$

AL CRESCERE DI m DEFINIAMO TANTI MODI
AVENTI FREQUENZE SEMPRE MAGGIORI,

TUTTAVIA, PER $m=1$ ABBIAMO UNA LUNGHEZZA
D'ONDA DI CUT OFF. LE LUNGHEZZE D'ONDA
MAGGIORI NON PASSANO (FILTRO COMPOSTO DA
GUIDE D'ONDA)