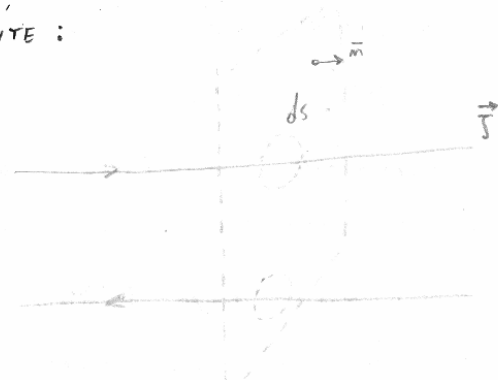


LEZIONE DEL 28/02/2007

(3)

UNIVOCITA' DELLA CORRENTE NEL MODO TEM:

NEL MODO TEM, RISPETTO AL PIANO DI PROPAGAZIONE DELL'ONDA, SIAMO IN GRADO DI DEFINIRE UNIVOCAMENTE LA CORRENTE:



e cio' IN QUANTO I FLUSSI DEI VETTORI $\vec{D}$ E $\vec{B}$ SU QUALUNQUE SUPERFICIE APPROPRIATA AD UN PERCORSO APPARTENENTE A TALE PIANO SONO NULLI. DA CIO' CONCLUDIAMO CHE:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{J} \cdot \vec{m} \, ds + \frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{D} \cdot \vec{m} \, ds$$

LA CORRENTE DI SPOSTAMENTO E' INFATTI, IN TALE CONDIZIONE, NULLA. PARIMENTI SI HA CHE SUL DOMINIO DEFINITO DAL PIANO DI PROPAGAZIONE IL CAMPO ELETTRICO E' CONSERVATIVO.

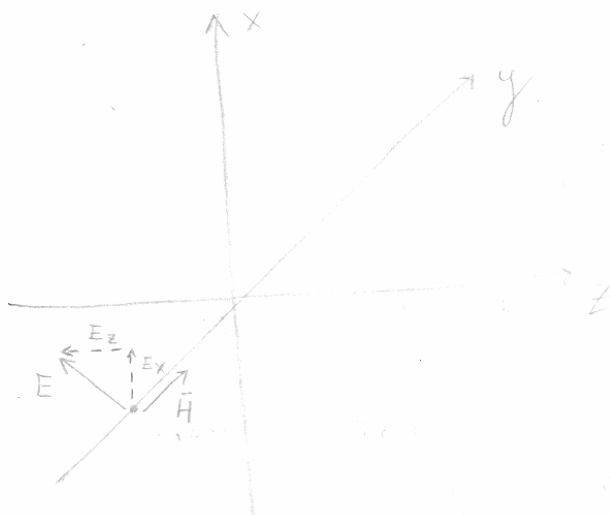
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} \cdot \vec{m} \, ds$$

NELL'ESEMPIO RIPORTATO SIAMO IN PRESENZA DI UN MODO TEM (TRASVERSO ELETTROMAGNETICO) PER QUANTO VISTO ALLA LEZIONE PRECEDENTE.

ESISTONO ANCHE DELLE RESTRIZIONI ALLA DEFINIZIONE DI MODI TEM. A SECONDA CHE LA TRASVERSALE INTERESSI SOLTANTO IL CAMPO ELETTRICO O IL CAMPO MAGNETICO SI PARLA DI MODO TE (TRASVERSO ELETTRICO) OPPURE DI MODO TM (TRASVERSO MAGNETICO). (4)

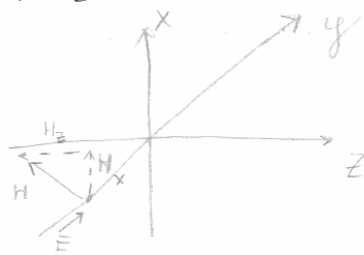
ESEMPIO:

SIA, NEL SISTEMA DI SEGUITO RAFFIGURATO, IL PIANO DI PROPAGAZIONE ORTOGONALE ALL'ASSE DELL'ASSE y .



IN QUESTO CASO SI TRATTA DI UN MODO TRASVERSO ELETTRICO (TE_y).

ANALOGAMENTE:

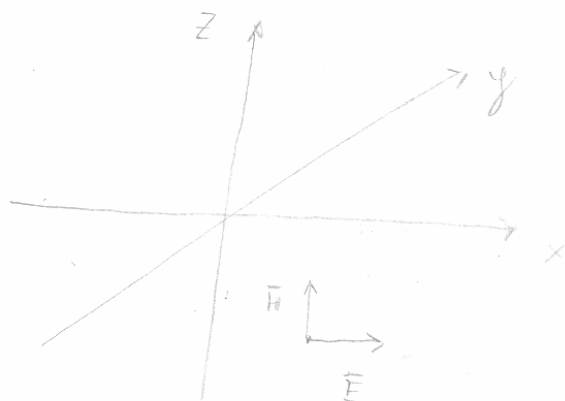


POSSIAMO AVERE UN MODO TM_y

⑤

NEI DUE SUCCITATI ESEMPI ABBIAMO CHE, VOLTA PER VOLTA, UNA GRANDEZZA FRA $\vec{H}$ ED $\vec{E}$ NON APPARTIENE AL PIANO DI PROPAGAZIONE.

QUESTI ESEMPI MOSTRANO UN ALTRO ASPETTO FONDAMENTALE DEL MODO TEM: ESSO PUÒ SUSSISTERE O MENO ANCHE A SECONDA DEI RIFERIMENTI SCELTI:



NELL'ESEMPIO QUI RAFFIGURATO RISPETTO AL PIANO ZX È POSSIBILE INDIVIDUARE UN MODO TEM, MENTRE CIÒ NON SUSSISTE RISPETTO, AD ES. AL PIANO xy.

L'ESISTENZA DI UN MODO TEM PREFIGURA L'ESISTENZA DI UN CAMPO STATICO.

IN BASE AL PIANO SCELTO, INOLTRE, VARIA IL RAPPORTO E/H .

EQUAZIONI PUNTUALI DI MAXWELL NELLO SPAZIO LIBERO.

6

SI RICORDA CHE NEL VUOTO SI HA:

$$\epsilon_0 \approx 8,856 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{D} = 0 \end{cases}$$

COMBINANDO TRA LORO QUESTE ESPRESSIONI OTTIENIAMO:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{d}{dt} \nabla \times \vec{H} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2} = 0$$

INFINE:

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{H}}{dt^2} = 0$$

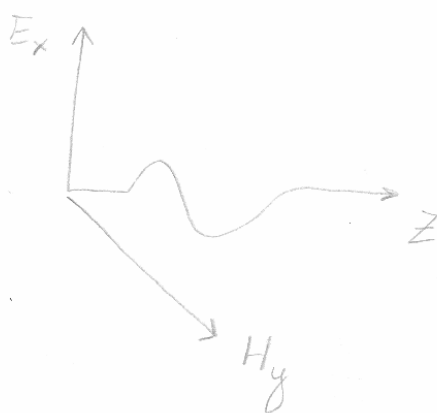
DETTA EQUAZIONE DI D'ALAMBERT O EQUAZIONE DELLE ONDE.

(7)

L'EQUAZIONE DI D'ALAMBERT SI COMPONE DI
6 EQUAZIONI SCALARI. CON RIFERIMENTO ALLA
SOLA COMPONENTE E_x SI HA:

$$\nabla^2 E_x - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 E_x}{dt^2} = 0$$

che descrive LA PROPAGAZIONE DI UN'ONDA:



$\vec{z}$ È LA
DIREZIONE
DI PROPAGAZIONE

PROPRIETÀ DELL'EQUAZIONE DELLE ONDE:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^2 f}{dt^2} = 0$$

f È DELLA FORMA:

$$f = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

I DUE ADDENDI RAPPRESENTANO UN'ONDA
PROGRESSIVA E UN'ONDA REGRESSIVA

(8)

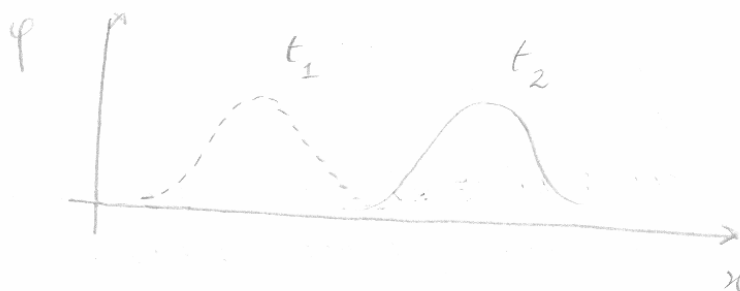
TALE FUNZIONE f DESCRIVE UN MOTO D'ONDA.
LA SPIEGAZIONE DI CIÒ RISIEME NEL FATTO
CHE, SCELTA UNA COPPIA x_1, t_1 , ESISTE
UNA COPPIA x_2, t_2 TALE CHE:

$$x_1 - c t_1 = x_2 - c t_2$$

QUESTO IMPLICA UNO SPOSTAMENTO.

$$\Delta x = c (t_2 - t_1)$$

OVVERO, A UN CERTO ISTANTE, SI RIPETE IN
UN PUNTO x_2 CIÒ CHE È ACCADUTO IN
UN ISTANTE PRECEDENTE NEL PUNTO x_1



SI PONGANO, PER COMODITÀ DI TRATTAZIONE,

$$\tilde{\gamma} = x - c t$$

$$\eta = x + c t$$

OVVERO

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{\gamma}} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial x} \right) = -c \frac{\partial f}{\partial \tilde{\gamma}}$$

↓
1

9

PARIMENTI SI HA:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{dt} = -c \frac{df}{d\gamma}$$

DERIVANDO UNA SECONDA VOLTA:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2}$$

TORNANDO AL PROBLEMA DI PARTENZA:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

RICORDIAMO CHE TALI EQUAZIONI ESCLUDONO I CAMPI SOLENOIDALI, MENTRE L'EQUAZIONE DI D'ALAMBERT, DA ESSE DERIVATA, E' VALIDA ANCHE PER CAMPI SOLENOIDALI.

INOLTRE NOTIAMO CHE LE SEI COMPONENTI DELL'EQUAZIONE DI D'ALAMBERT SONO TOTALMENTE DISACCOPPATE TRA DI LORO (CIASCUNA COMPONENTE E' SINGOLARMENTE RISOLVIBILE)

POICHE' STIAMO STUDIANDO UN'ONDA PIANA UNIFORME CHE SI PROPAGA LUNGO L'ASSE $\vec{z}$, POSSIAMO PORRE:

(10)

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

PARINENTI ANCHE IL IL CAMPO ELETTRICO
E' PRIVO DI COMPONENTI LUNGO L'ASSE Z.

ESSENDO :

$$0 = (\nabla \times \vec{E})_z = - \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

NE CONSEGUE CHE LA COMPONENTE DI
 $\vec{B}$ LUNGO L'ASSE Z NON DIPENDE DAL TEMPO.

SIANO :

$$E_x = \varphi_E (x - ct) + \psi_E (x + ct)$$

$$B_y = \varphi_B (x - ct) + \psi_B (x + ct)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_E}{\partial \zeta^2} - \mu_0 \epsilon_0 c^2 \frac{\partial^2 \varphi_E}{\partial \zeta^2} = 0$$

L'UNICO VALORE DI C CHE SODDISFA
QUESTA E QVAZIONE E'

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

N.B. : NELLO SPAZIO LIBERO E X ONDA PIANA

(11)

RIAVVALENDOCI NUOVAMENTE DELLE EQUAZIONI DI
MAXWELL:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{dE_x}{dz} = - \frac{dB_y}{dt} \Rightarrow \frac{d\varphi_E}{dz} = c \frac{d\varphi_B}{dz}$$

OVVERO:

$$\varphi_E = c \varphi_B, \quad \varphi_B = \mu_0 \varphi_H$$

$$\Rightarrow \varphi_E = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \mu_0 \varphi_H$$

TROVIAMO COSÌ IL RAPPORTO TRA CAMPO ELETTRICO
E CAMPO MAGNETICO:

$$\varphi_E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \varphi_H$$

$$\frac{|E|}{|H|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \, \Omega = 120 \pi \, \Omega$$

QUESTA RAPPRESENTA L'IMPIEDENZA INTRINSECA
DELLO SPAZIO LIBERO, ASSOCIATA AL MODO TEM
E, PIÙ IN PARTICOLARE, AD UN'ONDA PIANA UNIFORME
(ESSA È PERTANTO FALSA IN GENERALE).

PER LA SOLA ONDA PROGRESSEDIVA O PER LA SOLA
ONDA REGRESSEDIVA I CAMPI ELETTRICO E MAGNETICO
SONO ORTOGONALI TRA LORO.