

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{d}{dw} \frac{e^{i\omega t}}{\omega} \right) \Big|_{\omega=i} =$$

$$= \frac{1}{2} - \left[\frac{it e^{i\omega t}}{\omega^2} - \frac{e^{i\omega t}}{\omega} \right] \Big|_{\omega=i}$$

$$= \frac{1}{2} + (-te^{-t} - e^{-t}) \quad (t > 0)$$

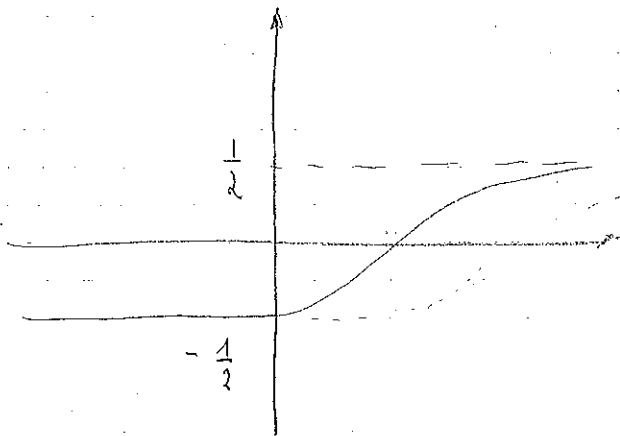
Se $t < 0$

$$- \left[\frac{1}{2} + \cancel{te^{-t}} - \cancel{e^{-t}} \right] \quad t < 0$$

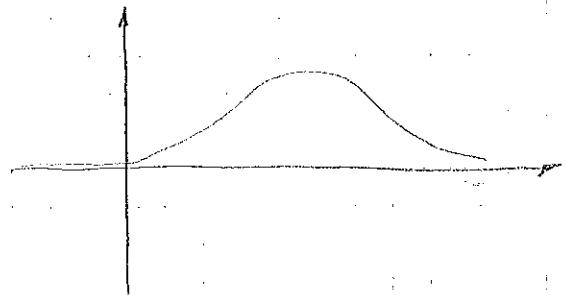
WWW.INGONLINE.IT

~~g(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} - te^{-t}~~

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - e^{-t} - te^{-t} & t > 0 \\ -\frac{1}{2} & t < 0 \end{cases}$$



Viene esattamente la stessa di prima
E' UN CASO



$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1 - e^{-T_0 z}}{z} e^{zt} \right] \Big|_{z=-1} =$$

non va a zero. all'infinito
va fatto come una traslazione

$$\frac{T_0 e^{-T_0 z}}{z^2} - \frac{(1 - e^{-T_0 z})}{z} e^{zt} \Big|_{z=-1}$$

$$= (-T_0 e^{T_0} - 1 + e^{T_0}) e^{-t} - (1 - e^{T_0}) t e^{-t}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\frac{1}{z(z+1)^2} - e^{-T_0 z} \frac{1}{z(z+1)^2} = \frac{v}{y}(z)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{z(z+1)^2} \right) = \sum_{w, \alpha_j = 1} \text{Res} \left(\frac{e^{zt}}{z(z+1)^2}, w \right)$$

$$1 + \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{zt}}{z} \right) \Big|_{z=-1} = 1 + \frac{t e^{zt} - e^{zt}}{z^2} \Big|_{z=-1} = 1 - t e^{-t} - e^{-t}$$

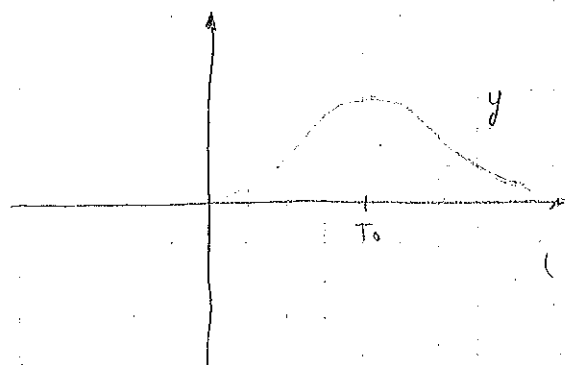
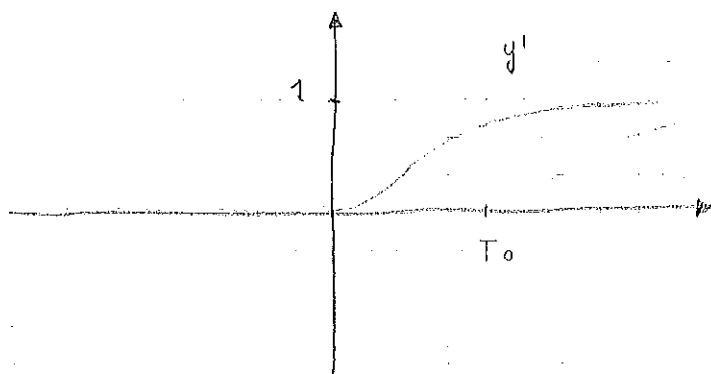
$t > 0$

$$y_1(t) = H(t) (1 - t e^{-t} - e^{-t})$$

$$y_1' = -e^{-t} + t e^{-t} + e^{-t}$$

sempre positiva
va a 0 all'infinito

$$y(t) = y_1(t) - y_1(t - t_0)$$



$$y'' + 2y' + y = b(t)$$

1) soluzione dell'equazione omogenea

$$Hy'' + 2Hy' + Hy = 0$$

WWW.INGONLINE.BIZ

APPLICO $\mathcal{L}(Hy'') + 2\mathcal{L}(Hy') + \mathcal{L}(Hy) = 0,$

$$(z^2 + 2z + 1)\mathcal{L}(Hy) = \alpha z y(0) + y'(0) + 2y(0)$$

$$= \alpha z + \beta$$

$$z(\mathcal{L}(Hy) - y(0)) = y'(0) + 2y(0) + 1$$

In generale se ho un'equazione $P(D)y = 0,$

$$P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$$

Interpondo per $[H]$ e applicando $\mathcal{L}$

$$P(z)\mathcal{L}(y) = Q(z)$$

Q polinomio di grado $n-1$
i cui coefficienti dipendono dai
dati iniziali

$$\mathcal{L}(Hy)(z) =$$

$$\frac{\alpha z + \beta}{(z+1)^2}$$

Se $\alpha = 0$ soluzione continua in zero $\times k e^{-t}$ l'ondamento e' piu' che lineare

$$\mathcal{L}(Ht)y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x+iR} \frac{\alpha z + \beta}{(z+1)^2} e^{zt} dz = \text{Res} \left(\frac{\alpha z + \beta}{(z+1)^2} e^{zt}, -1 \right)$$

$x > -1$ H_t dice che

$$Hy \leq k e^{-t}$$

per $c > -1$

$$y(t) \approx \text{polinomio} \cdot e^{-t}$$

$$= \frac{d}{dz} (\alpha z + \beta) e^{zt} \Big|_{z=-1} = \alpha e^{zt} + (\alpha z + \beta) t e^{zt} \Big|_{z=-1} =$$

$$\sum_{w=\pm ai} \text{Residui} \left(\frac{y_1 + y_0 z}{z^2 + a^2} e^{zt}, w \right)$$

$$= \sum_{z=\pm ai} \frac{y_1 + y_0 z}{2z} e^{zt} = \underbrace{\frac{y_1}{2} \frac{e^{at} - e^{-at}}{ai}}_{\boxed{y_1 \frac{\sinh(at)}{a}}} + \underbrace{\frac{y_0}{2} (e^{iat} + e^{-iat})}_{\boxed{y_0 \cos(at)}}$$

Supponiamo ora $y_1 = y_2 = 0$ $b \neq 0$

$$f(z) = \frac{\overset{\vee}{H} b(z)}{z^2 + a^2}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

esempio $b(t) = t$

$$(\overset{\vee}{H} b)(z) = \frac{1}{z^2}$$

$$\mathcal{L} \{ H(t) t^k \} = \frac{k!}{z^{k+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(z)} = \frac{1}{z^2(z^2 + a^2)}$$

$$\frac{1}{z^2(z^2 + a^2)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2 + a^2}$$

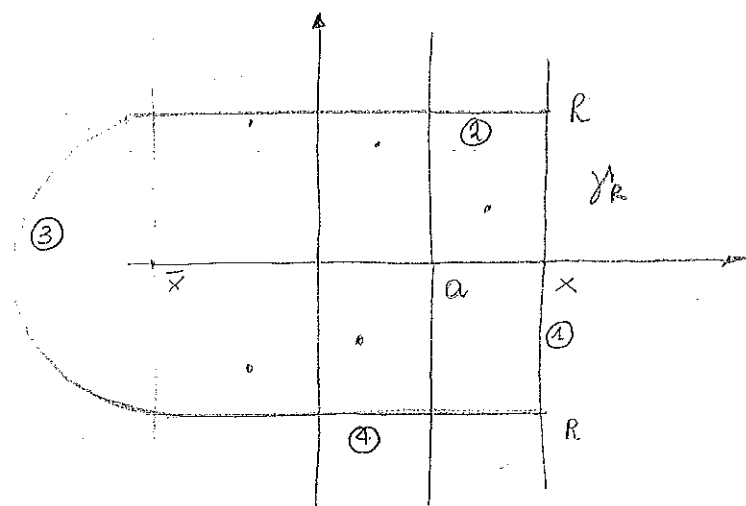
$$\underline{y(t)}_{(t>0)} = \sum_{w=0, \pm ai} \left(\frac{a^{zt}}{z^2(z^2 + a^2)}, w \right)$$

$$w = \pm ai \quad ai \rightarrow \frac{a^{zt}}{z^2} \Big|_w = \frac{a^{ait}}{2a^3} = \frac{1}{2a^3} e^{ait}$$

$$-ai \rightarrow -\frac{1}{2a^3} e^{-ait}$$

$$w=0 \quad \frac{d}{dz} \frac{e^{zt}}{z^2 + a^2} \Big|_{z=0} =$$

Notro x cui vale l'uguaglianza



WWW.INGONLINE.BIZ

per la teoria dei residui

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} p(z) e^{zt} dz = \left(\sum \text{Residui} \right)$$

① è quello che mi interessa

② e ④ vanno a 0

avere una lunghezza costante

che è una lunghezza finita, e

e $p \rightarrow 0$

③ $\rightarrow 0$ perché $t > 0$

$\text{Re } z < 0$ sul semicerchio e quindi

c'è un esponente < 0

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_R} p(z) e^{tz} dz = 0$$

$$\left| \int_{(2)(4)} () dz \right| \leq \frac{\text{cost}}{R^{1+\epsilon}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$\left[\textcircled{1} \right] \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} - \frac{1}{2\pi i} \int_{x_1 + iR} p(z) e^{zt} dz \quad p(z) e^{zt} dz = 0$$

Chiamo $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_1 + iR} p(z) e^{zt} dz$ per $t > 0$

WWW.INGONLINE.BIZ

Se t negativo $f(t)$ fa 0 $f(t) = 0$

perché $|f(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |p(x+iy)| e^{xt} dy$ ~~xxxxx~~

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |p(x+iy)| e^{xt} dy \quad \forall x > a$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M}{1+|y|^{1+\epsilon}} dy \right) e^{xt}$$

Ho trovato questa disuguaglianza

$$|f(t)| \leq \text{cost} e^{xt}$$

$$\forall x > a \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Se t negativo $f(t) = 0$

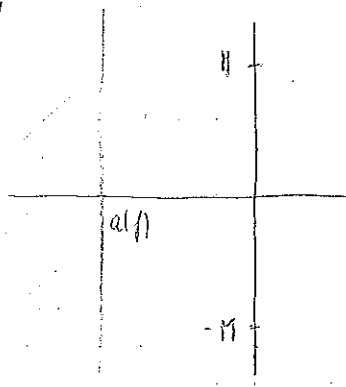
Su $t > 0$ trovo $|f(t)| \leq \text{cost} e^{at} \Rightarrow a(f) \leq a$

dove $\underline{p_x(t)} = \underline{e^{-xt} f(t)}$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{f(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \check{f}(x+iy) e^{(x+iy)t} dy =$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{x+iR}^{x-iR} \check{f}(z) e^{zt} dz \right]$$



$$\underline{f(t)} = \lim_{H \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_H} \check{f}(z) e^{zt} dz$$

$\gamma_H = \begin{matrix} H \\ -H \end{matrix}$

PROBLEMA: $\rightarrow$ sappiamo che parte da a

Dato $p: \mathbb{R}_a \rightarrow \mathbb{C}$

Quando posso trovare f tale che

$$\boxed{\check{f} = p}$$

TEOREMA

se $\boxed{|p(z)| \leq \frac{M}{1+|z|^{1+\varepsilon}}}$

WWW.INGONLINE.BIZ

con $\underline{M > 0}$, $\underline{\varepsilon > 0}$

se me va a zero un po' piu' che asintoticamente

(Esempio $\underline{p(z) = \frac{p(z)}{q(z)} > \text{polinomi}} \cdot \boxed{\text{grado}(Q) > \text{grado } P + 2}$)

(2) l' integrale

$$\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{x+iR}^{x-iR} p(z) e^{zt} dz \right]$$

ESISTE $\forall x > a$

(NEL SENSO FORTE) ED E' INDIPENDENTE DA x

POSTO

DIM.

$$(Hf')(z) = z(H\check{f}) - f(0)$$

se $\text{Re}(z) \rightarrow +\infty$

TEOREMA DEL VALORE FINALE

Ipotesi $\alpha(H\check{f}) < 0$

(molto prob. < 0)

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} z(H\check{f})(z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$$

$$\exists \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

$$(H\check{f}')(z) = z(H\check{f}) - f(0)$$

$z \rightarrow 0$

$$(H\check{f}')(0) = \int_0^{+\infty} f'(t) dt = e^{-f(0)}$$

Se zero è interno al dominio di convergenza, $x \in \mathbb{R}$ la trasf. è continua

WWW.INGONLINE.BIZ

se chiamiamo e limite all'infinito

COMPORTAMENTO RISPETTO ALLE TRASLAZIONI

$$f \in L^1_{loc}$$

$$f(t)$$

messa PRIMA DI

$$[-H]$$

(inf supporto $f > -\infty$)

Possiamo considerare

$$f(t-t_0)$$

$$= f_{t_0}$$

HA LE STESSA PROPRIETA'

$$a(f_{t_0}) = a(f)$$

$$\check{f}_{t_0}(z) = e^{-t_0 z} \check{f}(z)$$

$$L(f_{t_0}) = e^{-t_0 z} L(f)$$

$$\mathcal{L}(Hf') = z \mathcal{L}(Hf)(z) - f(0)$$

Più in generale

$$\mathcal{L}(Hf^{(k)}) = z^k \mathcal{L}(Hf)(z) - \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(0) z^{k-1-j}$$

29/11/2005

WWW.INGONLINE.BIZ

f ha derivata k-esima in L^1_{loc}

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

$$a(Hf^{(k)}) < +\infty$$

ALLORA $a(Hf) \leq a(Hf') \leq \dots \leq a(Hf^{(k)})$

$$\mathcal{L}(Hf^{(k)})(z) = z^k \mathcal{L}(Hf)(z) - \sum_{j=0}^{k-1} z^{k-1-j} f^{(j)}(0)$$

f ha derivate fino a $k-1$, CONTINUE PERCHÉ HA DERIVATA k -ESIMA IN L^1

Segue dal caso $k=1$

$$\mathcal{L}(Hf') = z \mathcal{L}(Hf) - f(0)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Hf'') &= z \mathcal{L}(Hf') - f'(0) = z(z \mathcal{L}(Hf) - f(0)) - f'(0) = \\ &= z^2 \mathcal{L}(Hf) - z f(0) - f'(0) \end{aligned}$$

$$f^{(k-1)}(0) + z f^{(k-1)}(0) + \dots + z^{k-1} f(0)$$

DIM
idea

così in eu. $f \in C^1$

$$\boxed{L(f')} = \int_{-M}^{+\infty} f'(t) e^{-zt}$$

prendo z in $D(\check{f}')$

$\check{f}' \uparrow f'$

$$\boxed{L(f')} = \int_{-M}^{+\infty} f'(t) e^{-zt} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-M}^R f'(t) e^{-zt} dt = \text{per parti}$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\left[f(t) e^{-zt} \right]_{-M}^R + \int_{-M}^R z f(t) e^{-zt} dt \right)$$

$\downarrow$
0

$\downarrow$
 $\boxed{z \check{f}(z)}$

supponendo che esista

www.ingocorebiz

TEOREMA: SUPPONIAMO CHE $\boxed{f}$ ABBAIA DERIVATA IN L^1_{loc} $\boxed{f(t)=0}$

se $t \leq M$

$\Rightarrow$

$$\underline{a(f)} \leq \underline{a(f')} \leq \dots \leq \underline{a(f^{(k)})}$$

$$\text{e } \boxed{L(f^{(k)})} = \boxed{z^k L(f)}$$

RICORDIAMO

$$\boxed{H(t)} = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Prendiamo $\boxed{f}$ con $\boxed{f' \in L^1_{loc}}$ (NON CHIEDO $\boxed{f=0}$ prima di $-M$)

$$\Rightarrow y(t) = \{ h(t+T_0) - h(t-T_0) \} =$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \sin(t+T_0) \frac{1 - \cos(t+T_0)a}{a^2} - \sin(t-T_0) \frac{1 - \cos(t-T_0)a}{a^2} \right\}$$

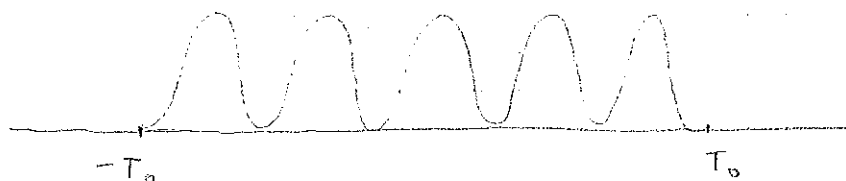
ma perché la condizione era $aT_0 = K\pi$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left\{ \sin(t+T_0) \frac{1 - (-1)^K \cos(at)}{a^2} - \sin(t-T_0) \frac{1 - (-1)^K \cos(t-T_0)}{a^2} \right\}$$

Se $t < -T_0$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -T_0 \\ -\frac{(-1)^K \cos(at) + 1}{a^2} & -T_0 < t \leq T_0 \\ 0 & \text{se } t > T_0 \end{cases}$$

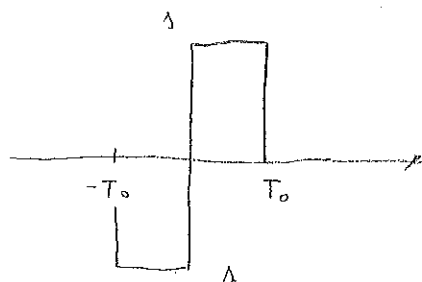
WWW.INGONLINE.BIZ



$$y'' + ay = b(t)$$

$$a > 0$$

$$b(t)$$



Posso trovare $\hat{y} \Leftrightarrow$ il termine di destra è in $L^2(\mathbb{R})$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \quad \alpha > 1$$

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{1}{(x-x_0)^\alpha} \quad \alpha < 1$$

Al finito non ci sono poli sull'asse reale

$$\in L^2 \quad xke^{-} \text{ del infinito } \approx \boxed{\frac{1}{\omega^3}}$$

In $0 \pm a$ è continua ammette amite finito ($m \pm a$) < la condizione che abbiamo imposto

se la soluzione c'è è unica

Condizione È NECESSARIA E SUFFICIENTE xke^{-} il problema abbia

una e una sola soluzione

$$\boxed{f(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) \xrightarrow{L^2} f \quad \text{per } M \rightarrow +\infty$$

però se

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{per (quasi) ogni } t$$

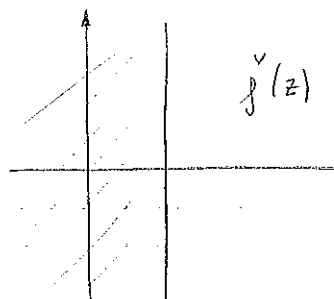
$\Rightarrow$ questo limite è per quasi $\forall t$ la f di partenza

$$f(t)$$

$$f(z)$$

$$H(t) e^{ct}$$

$$\frac{1}{z-c}$$



$$t^k H(t) e^{ct}$$

$$(-1)^k \frac{d^k}{dz^k} \frac{1}{z-c} =$$

$$= (-1)^k \frac{d^k}{dz^k} (z-c)^{-1}$$

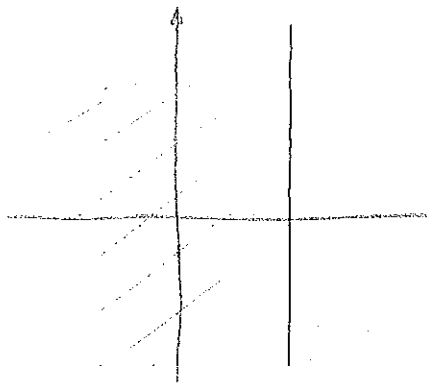
$$= (-1)^k (-1)^k k! (z-c)^{-k-1}$$

$$= \boxed{\frac{k!}{(z-c)^{k+1}}}$$

So $c=0$

$$\boxed{f(t) = H(t) t^k}$$

$$\boxed{f(z) = \frac{k!}{z^{k+1}}}$$

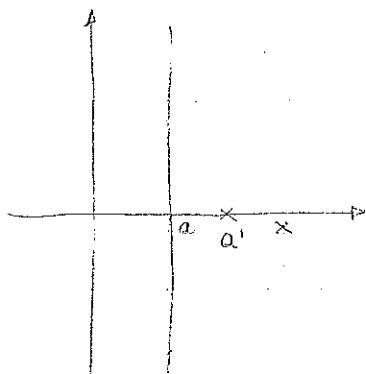


$$D(\check{f}) = \text{PARTE INTERNA DI } D(\check{f}) = \Omega_0 \quad \left\{ z \mid \operatorname{Re}(z) > a \right\} \text{ dove } a = a(f)$$

TEOREMA : $a = a(f) < +\infty$,

$$\check{f} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt \rightarrow \mathbb{C} \quad e^{-\text{AUCHORFA ANZI}}$$

$$z \in \Omega_0 \quad C' e^{-a'} \quad \text{con } a < a' < \operatorname{Re} z = x$$



WWW.INGONLINE.BIZ

$$\underbrace{|f(t)| e^{-a't}}_{\in L^1}$$

$$\check{f}(z) = \int_{-H}^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt$$

se mi sposto un po' a destra

$$\Rightarrow |t f(t) e^{-xt}| = \underbrace{|t e^{-(x-a')t}|}_{\text{LIMITATO su } [-H, +\infty[} \underbrace{|f(t)| e^{-a't}}_{\in L^1} \in L^1$$

Lo stesso

$$\underbrace{t^k |f(t)| e^{-xt}}_{\in L^1}$$

TRASFORMATA DI LAPLACE (UNILATERA)

Funzioni mulle prima di zero, o di $[-H]$, ammettendo crescita
grandi a $+\infty$

Si ammette una crescita molto grande all'inf. ma funz. deve essere
mulla prima di zero)

NOTAZIONE: Chiamo $L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$$= \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ per } \forall [a, b] \quad f \in L^1([a, b]) \right\}$$

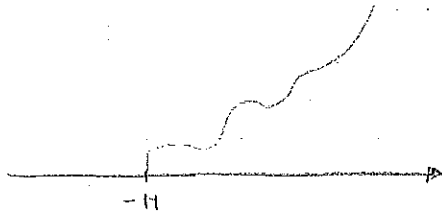
$$e^x \in L^1_{loc}$$

$$\frac{e^x}{\sqrt{|x|}}$$

$$e^{-x} \in L^1_{loc}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

DEFINIZIONE: Se $f \in L^1_{loc}$ e se $\exists M.t.c.$ $\sqrt{|f(t)|} = 0$ per $t \leq -M$



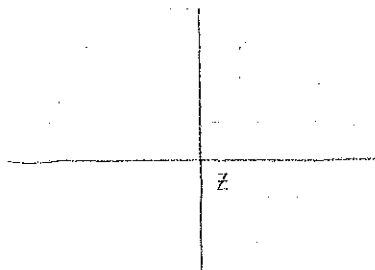
f è a supporto destro

Chiamo trasformata di Laplace l'espressione

$$\boxed{\check{f}(z)} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt}_{= \mathcal{L}(f)} = \underbrace{\int_{-H}^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt}$$

Definita su $\mathcal{D}(\check{f}) = \left\{ z \in \mathbb{C} : f(t) e^{-zt} \in L^1(\mathbb{R}) \right\}$

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |f(t)| e^{-\operatorname{Re}(z)t} \in L^1(\mathbb{R}) \right\}$$



$$\mathcal{F}(e^{i\omega_0 t} f(t)) = \mathcal{F}(f)(\omega - \omega_0)$$

$$\hat{f}_{t_0}(\omega) = e^{it_0\omega} \hat{f}(\omega)$$

$$e^{i\omega t} F(t)(\omega) = \hat{F}_{t_0}(\omega)$$

La trasformata si presta alla soluzione di equazioni differenziali

lineari

$$(Eq) \quad y^{(m)} + a_{m-1} y^{(m-1)} + \dots + a_0 y = b(t)$$

$$P(D)y = b \quad \text{dove} \quad P(z) = z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0$$

Se applico la trasformata $P(i\omega) \hat{y} = \hat{b}$

$$\hat{y} = \frac{\hat{b}}{P(i\omega)}$$

torno indietro se posso

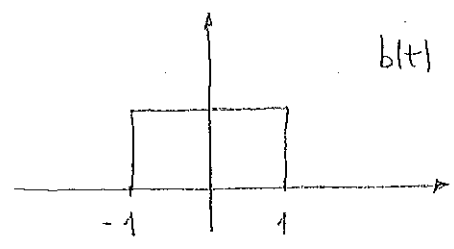
WWW.INGONLINE.BIZ

Mi permette di trovare le soluzioni in L^2

TROVO TUTTE E SOLE LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONI DIFFERENZIALI IN $L^2(\mathbb{R})$

Nasce all'infinito

$$\begin{cases} y'' - y = b \\ y \in L^2 \end{cases}$$



$$\widehat{y'' - y}(\omega) = [-\omega^2 + 1] \hat{y}(\omega)$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{-b(\omega)}{1 + \omega^2}$$

SI PUO' SICURAMENTE TORNARE qualunque sia b e $y \in C^1$

24/11/2005

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

Se $f \in L^1 \Rightarrow \mathcal{F}(f) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$

Se mo $\hat{f}$ si definisce "per approssimazione"

$$f_m \xrightarrow{L^2} f \text{ definisco } \hat{f} = \lim_{(L^2)} \hat{f}_m$$

$L^1 \cap L^2$

$\hat{f} \in L^2$ (non necessariamente continua e nulla a $+\infty$)

PROPRIETÀ DI $\mathcal{F}$ su L^2

WWW.INGONLINE.BIZ

$\mathcal{F}$ lineare

Se $[f^{(k)}] \in L^2 \Rightarrow [f]$ ha derivata k -esima in L^2

f ha derivata in L^1/L^2 se $\exists p_m \xrightarrow{L^1/L^2} p$, p_m in $\mathcal{C}$ e

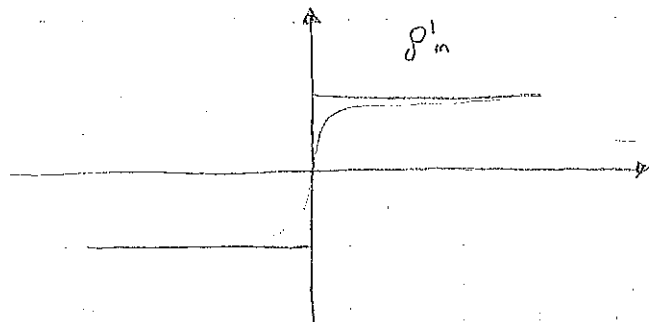
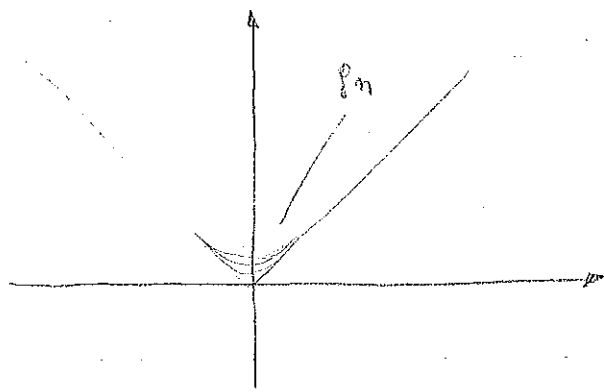
$$p_m' \xrightarrow{L^1/L^2} \text{qualcosa}$$

$\downarrow$

$[p']$

$$p(x) = |x|$$

$$p' = \text{sign}(x), \text{ su }]-1, 1[$$



$\mathcal{F}_m L^1$ le derivate tendono alla funzione

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & u(t, x) \quad \begin{cases} t \geq 0, \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \\ u(0, x) = u_0(x) & \forall t \quad x \mapsto u(t, x) \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Facciamo la trasformata in x $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) (t, \omega) = (i\omega)^2 \mathcal{F}(u) (t, \omega)$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\mathcal{F}(u) = \hat{u}(t, \omega)$$

$$\frac{\partial \hat{u}(t, \omega)}{\partial t} = -\omega^2 \hat{u}(t, \omega) \quad , \quad \hat{u}(t, \omega) = e^{-\omega^2 t} \hat{u}_0(\omega)$$

Ora posso tornare indietro ?

$$\text{Dato che } \omega \mapsto e^{-\omega^2 t} \hat{u}_0(\omega) \in L^2 \quad (\forall t \geq 0)$$

$$\text{Posso definire } u(t, x) = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-\omega^2 t} \hat{u}_0(\omega) \right)$$

Se $t > 0$

non solo sta in L^2

$$\text{Per qualunque } k \quad \omega^k e^{-\omega^2 t} \hat{u}_0(\omega) \in L$$

$$\int \omega^k e^{-\omega^2 t} |\hat{u}_0(\omega)| d\omega \leq \left(\int |\hat{u}_0(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \left(\int \omega^{2k} e^{-2\omega^2 t} d\omega \right)^{1/2}$$

$\Rightarrow u(t, x)$ è infinitamente derivabile rispetto ad x

$$\text{e } \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) = \mathcal{F}^{-1} \left(-\omega^2 e^{-\omega^2 t} \hat{u}_0(\omega) \right)$$

$\Rightarrow \hat{f}_R$ sono CONVERGENTI a qualcosa in $L^2_{\mathbb{R}}$ LO CHIAMO $\hat{f}(\omega)$

$$\| \hat{f}_R - \hat{f}_{R'} \|_2^2 = \| f_R - f_{R'} \|_2^2 \leq 2\pi \| f_R - f_{R'} \|_2^2$$

Dato f in $L^2(\mathbb{R})$ posso definire la sua trasformata

$$\hat{f} \quad (\hat{f} = (L^2) \quad \hat{f}_H \quad \text{se } f_H \xrightarrow{L^2} f, \quad f_H \text{ "buona"})$$

e valgono ancora le formule di prima

WWW.INGONLINE.BIZ

Fatto

$\forall f$ in L^2 vale l'uguaglianza di Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

è una ISOMETRIA

$$f, g \in L^2 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{g}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-H}^H \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \xrightarrow{L^2} f(t) \quad \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega = f(t) \right)$$

VICEVERSA se $g \in L^2(\mathbb{R})$

$$\text{e se } \boxed{h_n(t)} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-H_n}^H g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right)$$

$$\Rightarrow \exists h \text{ tale che } \boxed{h_n(t)} \xrightarrow{L^2} h, \quad \text{e } \hat{h} = g$$

$$\int_{-H}^H \int_{-H}^H g(\omega) \overline{g(\omega')} \int_{-R}^R e^{i(\omega - \omega')t} dt = \int_{-H}^H g(\omega) \left(\int_{-H}^H \overline{g(\omega')} \frac{2 \sin(\omega - \omega')R}{\omega - \omega'} d\omega' \right) d\omega$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_H|^2 dt = 2\pi \int_{-H}^H g(\omega) \overline{g(\omega)} d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{f_H(t)} dt$$

↑

$$\int_{-R}^R f(t) \overline{f_H(t)} dt = \int_{-R}^R f(t) \overline{\frac{1}{2\pi} \left(\int_{-H}^H \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right)} dt$$

Scambio ordine di integrazione (integrabile nel prodotto e allora $\times t$ prima)

$$\int_{-H}^H \left(\int_{-R}^R f(t) \overline{\hat{f}(\omega)} e^{-i\omega t} dt \right) d\omega = \text{WWW.INGONLINE.BIZ}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-H}^H \overline{\hat{f}(\omega)} \int_{-R}^R f(t) e^{-i\omega t} dt d\omega \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-H}^H |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_H(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{f_H(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-H}^H |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

$$\text{con } f_H(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-H}^H \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\left[\frac{e^{i(\omega - \omega')t}}{i(\omega - \omega')} \right]_{-R}^R = \frac{2 \sin[(\omega - \omega')R]}{\omega - \omega'}$$

II

$$\int_{-R}^R e^{i(\omega - \omega')t} dt$$

$$\omega = \omega' + h \quad h = \omega - \omega' \quad d\omega' = -dh$$

$$= \int_{-H}^H \frac{\hat{f}(\omega)}{2\pi} \left(\int_{\omega-H}^{\omega+H} \frac{\hat{f}(\omega-h)}{\pi} \frac{\sin(Rh)}{h} dh \right) d\omega =$$

variable $f(\xi)$

$$\hookrightarrow \hat{f}(\omega) \quad \forall \omega$$

$$= \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-H}^H \hat{f}(\omega) \overline{\hat{f}(\omega)} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-H}^H |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Quindi $f_m \in L^2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_m(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-H}^H |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{Finito } \times K e^{-} \hat{f} \text{ continuo})$$

$R > 0$ qualunque

$\omega \rightarrow \infty$

$$\int_{-R\omega}^{R\omega} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$$

$$\int_{|t| > R} \frac{f(t)}{t} \sin(\omega t) dt = 0$$

$\in L^1$ perché vale zero in $[-R, R]$

$$\int_{-R}^R \frac{(f(t) - f(0))}{t} \sin(\omega t) dt = 0$$

integrabile perché è derivabile in zero

WWW.INGONLINE.BIZ

PRENDIAMO f

in L^2 , nulla fuori da un intervallo

$[a, b]$,

$\Rightarrow f \in L^1$

$$\int_a^b |f| = \int_a^b |f| \cdot 1 \leq \left(\int_a^b |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_a^b 1^2 \right)^{1/2} < +\infty$$

$\hat{f}$ È INFINITAMENTE DERIVABILE $(\cdot t^k f) \in L^1$ perché t^k è

limitata su $[a, b] \Rightarrow \hat{f}^{(k)}(\omega)$

Dato $M > 0$ pongo

$$f_M(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}$$

esiste x_k e $\hat{f}$ continua

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(wt) dt = \sum c_i \int_a^b \operatorname{sen}(wt) dt \rightarrow 0$$

3- Per la definizione di integrale data $f \in L^1$ si trova

una successione $\{f_n\}$ di funzioni costanti a tratti con

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \quad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n - f| dt \rightarrow 0 \right)$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(wt) dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) - f_n(t)) \operatorname{sen}(wt) dt}_{(1)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) \operatorname{sen}(wt) dt}_{(2)}$$

Sia $\varepsilon > 0$ trovo n tale che $|(1)| < \varepsilon/2 \quad \forall w \in \mathbb{R}$

perché $|(1)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n - f| dt \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$

Preso un tale n se w grande $|(2)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \text{se } w \text{ grande } \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(wt) dt \right| < \varepsilon$$

A-
Se f integrabile

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(wt) dt \xrightarrow{w \rightarrow +\infty} 0$$

B-
Se $f \in L^1$ e f è derivabile in zero

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\operatorname{sen}(wt)}{t} dt$$

$$\xrightarrow{+\infty} f(0) \pi$$

17/11/2005

Se $f \in L^1$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$\hat{f}$ è CONTINUA / TENDE A ZERO SE $(\omega \rightarrow 0)$

Dovrebbe succedere

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

*

$$\tilde{C}_n = \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$f(t) = \sum_{(L_2)} \frac{1}{2\pi} \tilde{C}_n e^{i\omega_n t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Osservazione

Se $\hat{f}(\omega) \in L^1 \Rightarrow t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

CONTINUO $\omega \rightarrow 0$ a $+\infty$ int

Quindi se f è discontinua non può essere che $\hat{f} \in L^1$ e

valga *



Sarà vera (*) in senso di L^1

Definizione: Dico che $f \in L^1$,

è derivabile nel senso di L^1 o che f ha derivata in L^1 . Se esiste (f_n) di funzioni C^1 e L^1 $\exists g \in L^1$

con $f_n' \in L^1$ e con $f_n \xrightarrow{L} f$, $f_n' \xrightarrow{L^1} g$

Chiamo g la derivata di f

Se $f \in C^1$ e $f' \in L^1$ posso prendere $f_n = f \quad \forall n$
 $f \in L^1$

Devo verificare che se g esiste non dipende dalla
successione. Infatti prendiamo t

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^t f_n'(x) dx$$

$\downarrow$

$$f(t)$$

$\downarrow$

$$\int_{-\infty}^t g(x) dx$$

WWW.INGONLINE.BIZ

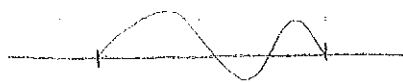
se sapessi che $f_n(t) \rightarrow f(t)$ avrei trovato l'integrale
della derivata - Individuo uniformemente g

Questo ragionamento non funziona

Facciamo in un altro modo

Finito una funzione φ derivabile con supporto compatto
in $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n'(t) \varphi(t) dt =$$



4) Supponiamo che $[tf(t)] \in L^1 \Rightarrow \hat{f}$ è derivabile e vale

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (-it) e^{-i\omega t} dt = \widehat{y(-it f(t))}$$

Infatti ricordiamo che

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \quad \text{se so che}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} p(x, y) \right| \leq H(y) \quad \text{con } H \in L^1 \Rightarrow G'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} p(x, y) dy$$

$$|f(t) (-it) e^{-i\omega t}| \leq |f(t)| t \in L^1$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Se so $[t^K f(t)] \in L^1 \Rightarrow \hat{f}$ ammette derivato

Lemma

$$\hat{f}^{(K)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (-it)^K e^{-i\omega t} dt = \widehat{y((-it)^K f(t))}$$

5) Supponiamo $\exists [f']$ e che $f' \in L^1$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt = \left[f(t) e^{-i\omega t} \right]_{-\infty}^{+\infty} -$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-i\omega t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) e^{-i\omega t}$$

se questo va a 0

Se $f \in L^1 \Rightarrow$ esiste una successione f_n di funzioni costanti
 a tratti tale che $f_n \xrightarrow{L^1} f$ ($\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n - f| \rightarrow 0$)

$\Rightarrow \hat{f}_n \rightarrow f$ uniformemente

$$\Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} f(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\omega \rightarrow \infty} f_n(\omega) = 0$$

Quindi è vera la TESI

$$\hat{f}(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$$

Esempio

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{1+t^2} dt$$

$$\omega > 0 \quad * \quad -2\pi i \operatorname{Res}(f, -i)$$

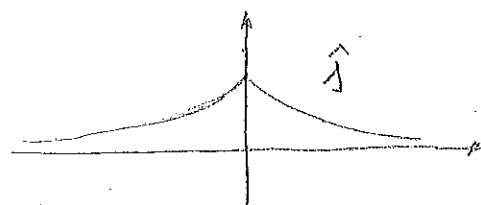
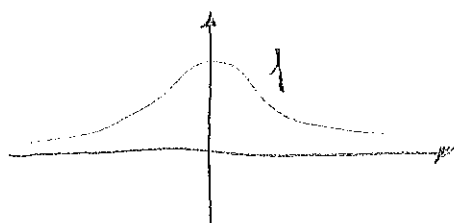
$1+t^2$ ha 2 poli semplici i e $-i$

$$2\pi i \cdot \frac{e^{-i\omega t}}{2t} \Big|_{t=-i} = \frac{-2\pi i}{-2i} e^{-\omega} = \pi e^{-\omega} \quad \omega > 0$$

$$\omega < 0 \quad 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-i\omega t}}{2t} \Big|_{t=i} = \frac{2\pi i}{2i} e^{\omega}$$

$$= \pi e^{\omega}$$

$$\pi e^{-|\omega|}$$



$\hat{f}$ non è derivabile in 0

10/11/2005

TRASFORMATA DI FOURIER

Prendiamo $f \in L^1(\mathbb{R})$ (funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, f integrabile)

Definisco $\hat{f}(f) = \hat{f}$ TRASFORMATA DI FOURIER $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

ha senso $\forall \omega \in \mathbb{R}$ $f(t) e^{-i\omega t} \in L^1$ in quanto $|f(t) e^{-i\omega t}| = |f(t)|$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

(1) $\hat{f}$ È CONTINUA IN ω

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \hat{f}(\omega) = \hat{f}(\omega_0)$$

Teorema di Lebesgue - conv. dominata

$$\forall t \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} f(t) e^{-i\omega t} = f(t) e^{-i\omega_0 t}$$

$$|f(t) e^{-i\omega t}| = |f(t)| \in L^1$$

(2) $\hat{f}(\omega)$ LIMITATA SU $\mathbb{R}$, ANZI

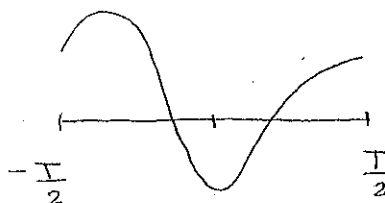
$$|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$$

Questo equivale a dire $\|\hat{f}\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \|f\|_{L^1}$

Serie di Fourier fatte per funzioni su un intervallo

se $f \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\omega k t}$$



$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y) e^{-i\omega y} dy e^{i\omega k t}$$

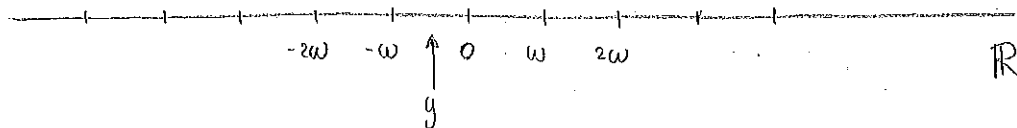
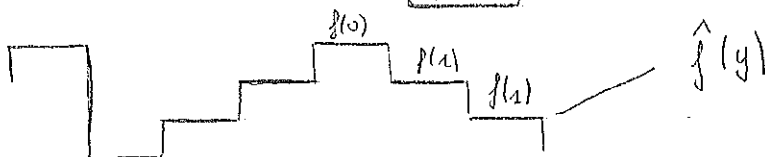
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

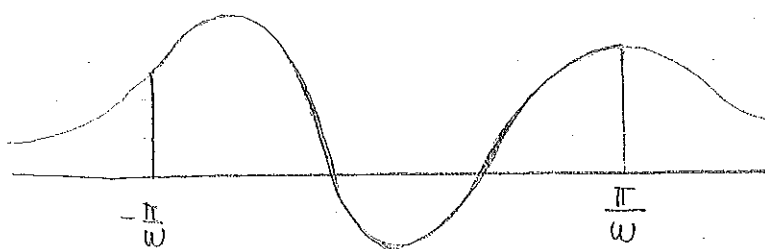
WWW.INGONLINE.BIZ

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega \left(\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(y) e^{-i\omega k y} dy \right) e^{i\omega k t}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(y) e^{-i\omega k y} dy \right)}_{F_{\omega}(k)} e^{i\omega k t} \quad \omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} F_{\omega}(k) \omega$$



Potro da una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$



$$\omega \rightarrow 0$$

$$T \rightarrow +\infty$$

III° FISSO x
PRENDIAMO $t_0 > 0$ mi chiedo se

$$\exists \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$$

$$u(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-\omega^2 k^2 t} e^{i \omega k x}$$

e se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{d}{dt} \left(e^{-\omega^2 k^2 t} \right) e^{i \omega k x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (-\omega^2 k^2) e^{-\omega^2 k^2 t} e^{i \omega k x} = \sum p_k(x, t)$$

la risposta è sì se riesco a dimostrare

$$\sum \max_{t \in [a, b]} |p(t, x)| < +\infty \leq \sum \bar{c} \omega^2 k^2 e^{-\omega^2 t_0 k^2} < \boxed{+\infty}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}$ ESISTE se $t > 0$ e vale l'equazione

↓

u periodica in x

Il comportamento $\boxed{u(t, x)}$ per $\boxed{t \rightarrow 0}$ è delicato e

dipende da quanto è regolare $\boxed{u_0}$

(se $\sum |c_k| < +\infty \Rightarrow u(t, x) \rightarrow u_0(x)$ se $t \rightarrow 0^+$)

se $t \rightarrow +\infty$ $u(t, x) \rightarrow$ costante $= C_0$

$$= \frac{1}{L} \int_0^L u_0(x) dx$$

]

non posso tornare indietro.

Equazioni differenziali alle derivate parziali

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u(t, x)$$

su $t \geq 0$

$0 \leq x \leq L$

$x \in \mathbb{R}$



WWW.INGONLINE.BIZ

$u(0, x) = u_0(x)$

(Data)

$\forall t$
 $u(t, x) = L$ -periodica in x



(Propagazione del calore in un anello di circonferenza L)

Cercio

$$u(t, x) = \sum c_k(t) e^{i\omega_k x}$$

$\omega = \frac{2\pi}{L}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k'(t) e^{i\omega_k x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(t) (-\omega^2) k^2 e^{i\omega_k x}$$

$c_k'(t) = -\omega^2 k^2 c_k(t)$

$\Rightarrow c_k(t) = c_k(0) e^{-\omega^2 k^2 t} \quad | \quad k_0 = 0 \quad c_0(k) = 0$

$c_k(0)$ sono i coefficienti di Fourier di $u_0(x)$

la stessa f per la potrei ottenere solo in coseni (faccendo in modo $\tilde{f}$ vanda pari)

FATTI ANALOGHI AL CASO VECCHIO

$$f \underset{(L^2)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\omega n t)$$

se $\sum |a_n| < +\infty \Rightarrow f$ continua e $f(0) = f(T) = 0$ e $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n S_n$

se $\sum n |a_n| < +\infty \Rightarrow f$ derivabile e derivato continuo ($f(0) = f(T) = 0$)

$$f' \underset{\text{unif.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n S_n' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega n \cos(\omega n t)$$

se $\sum n^2 |a_n| < +\infty \Rightarrow f$ derivabile 2 volte

$$f'' \underset{\text{unif.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n S_n'' = \sum_{n=1}^{\infty} -\omega^2 n^2 a_n \sin(\omega n t)$$

WWW.INGONLINE.BIZ

DEFINIZIONE: Dico che f è derivabile $[L^2]$ se $\sum |n^2 a_n|^2 < +\infty$ tra le funzioni nulle agli estremi

$$\left(f \underset{L^2}{=} \sum a_n S_n \right)$$

Chiamo L^2 derivato $\sum a_n S_n' \in L^2$ (funzione di soli coseni)

FATTO - Se f derivabile in questo senso $\Rightarrow f$ continua e $f(0) = f(T) = 0$

- Se f DERIVABILE $\Rightarrow f$ È DERIVABILE in senso L^2 e tutto coincide

8/11/2005

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = f, & \text{su } [0, T] \\ \text{condizione } u(0) = u(T) = 0, \end{cases}$$

Fourier dice che, data $f \in L^2(-T, T)$,

$$f = \sum c_k e^{i\omega_k t}$$

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt$$

sto prendendo $\left(\begin{matrix} [-T, T] \\ \text{di } [0, 2T] \end{matrix} \right)$ invece

$$\omega = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$$

Potro approssimare (in energia) f in $L^2(-T, T)$ con polinomi trigonometrici.

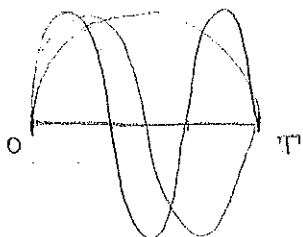
WWW.INGONLINE.BIZ

Voglio approssimare solo con 1 seno

$$S_k(t) = \sin(\omega_k t)$$

$$in [0, T]$$

$$\left(\omega = \frac{\pi}{T} \right)$$



TEOREMA : Data f in $L^2(0, T)$

non posso le
stare.

Es.
già ora
c'è il 90°

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k$$

dove

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_k t) dt$$

$$\lambda \neq k^2$$

soluzione unica $\forall f$

Se invece $\lambda = k_0^2$

e' e" soluzione

$\Leftrightarrow$

$$C_{k_0} = C_{-k_0} = 0$$

ortogonale sia al seno che al coseno

$$C_{k_0} = a_{k_0} + b_{k_0}$$

$$a_{k_0} = b_{k_0} = 0 \quad \left| 0 = \int f(t) \cos(k_0 t) = \int f(t) \cos(k_0 t) \right|$$

λ autovalore

Se $\lambda = 0$ e' e" soluzione

$\Leftrightarrow$

$$\int_0^{2\pi} f(t) = 0$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\begin{cases} \ddot{u} + \lambda u = f \\ u(0) = u(T) = 0 \end{cases}$$

con
f reale

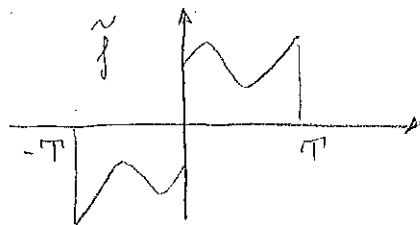
$\rightarrow$ cerca di sviluppare in serie seno xke' multi al bordo

Osservazione:

Se partendo da una f definita su $[0, T]$, la posso estendere

a $\tilde{f} : [-T, T] \rightarrow \mathbb{R}$

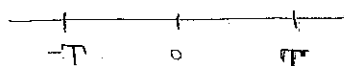
$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } t \geq 0 \\ f(-t) & \text{se } t < 0 \end{cases}$$



simmetrica
rispetto
all'origine

poi se voglio estendo $\tilde{f}$ su $\mathbb{R}$ in modo che venga $2T$ -periodica

Risolvo
$$\begin{cases} \ddot{u} + \lambda u = -\tilde{f} \\ u \text{ } 2T\text{-periodica} \end{cases} \text{ su } [-T, T]$$



(3a) Pongo dire che u è soluzione

o.e. pongo dire $\sum |k^2 y_k|^2 < +\infty$

$$\sum |k y_k|^2 < +\infty$$

$$u' \in L^2$$

basta
verificare
questa

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum |k^2 y_k|^2 < +\infty \\ u'' \text{ esiste in senso } L^2 \end{array} \right.$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{k^2 c_k}{\omega^2 k^2 + i\omega \mu k + \lambda} \right|^2 < +\infty$$

$$\left| \frac{k^2}{-\omega^2 k^2 + i\omega \mu k + \lambda} \right| < \boxed{k}$$

all'infinito tende a $\frac{1}{\omega^2}$

$\Rightarrow$

$$\leq k^2 \sum |c_k|^2$$

perché
sommaabili

WWW.INGONLINE.BIZ

$\Rightarrow$ SE NESSUN K ANNULLA

$$-\omega^2 k^2 + i\omega \mu k + \lambda$$

ipotesi su μ e λ

$$\Rightarrow \forall f \in L^2$$

$\exists$ $\boxed{u}$ in L^2 "derivabile 2 volte in L^2 " che verifica

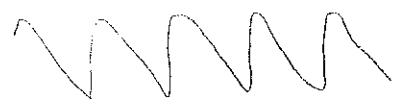
l'equazione, INOLTRE $\boxed{u}$ e $\boxed{u'}$ SONO CONTINUE e T -PERIODICA

$$\boxed{u} = \sum \frac{c_k}{-\omega^2 k^2 + i\omega \mu k + \lambda} e_k$$

uniforme

ANZI $\boxed{u'} = \frac{i\omega k c_k}{-\omega^2 k^2 + i\omega \mu k + \lambda} e_k$

[uniforme]



f'_m

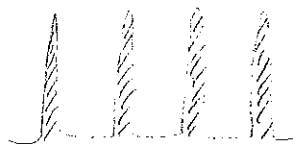


deve di
sepa

occoro di chiamare derivati
Amite in energia delle
derivate

Se lo spazio carico

non può essere derivabile $\times k^2$ non è continuo



non tendono in
energia a una funzione

$$T > 0$$

$$p, \lambda \in \mathbb{C}$$

$$f \in L_2(0, T)$$



Considero il problema f periodica di periodo T

$$\begin{cases} \ddot{u} + p\dot{u} + \lambda u = f \\ u \text{ T-periodica} \end{cases}$$

(P)

WWW.INGONLINE.BIZ

È sempre possibile risolvere (P), in che senso, quante soluzioni si trovano?

Se avo $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k$ $\sum |c_k|^2 < +\infty$

Però $u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e_k$ (serie di funz. periodiche quindi se la trovo u è periodica)

$\Rightarrow$

Se f è buona e "BUONA"

per es. $\sum |f_n| < +\infty \Rightarrow f$ continua

$\Rightarrow y \in C^2$ e RISOLVE in senso usuale

$$\sum |n^2 y_n| < +\infty \Rightarrow y \text{ continua}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

7/11/2005

DEF $f \in L^2 \Leftrightarrow f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$

ove $c_k = \langle f, e_k \rangle$ $e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T e^{-i\omega \tau k}$ e $\sum |c_k|^2 = \|f\|^2 = \int_0^T |f|^2$

se $\sum |k c_k| < +\infty$ dico che

f derivabile in senso di L^2 periodico

e chiamo derivata "generalizzata" la $f' = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{i\omega k}_{\delta_k} c_k$

(che converge a causa di $*$)

$$\sum |f_k|^2 < +\infty$$

Idea $f = \lim_{L_2} f_n$ ($f_n = \sum_{-n}^n c_k e_k$) se $f'_n \rightarrow g$ chiamo

$g =$ derivata di f

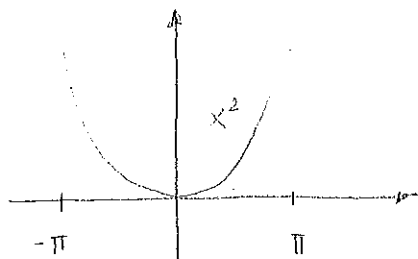
Ricordo che se

$f \in L_2$ derivabile $\Rightarrow$ CONTINUA

vale $\sum |k c_k| < +\infty \Rightarrow \sum |c_k| < +\infty$

Fatto Se f è T -periodica, continua, derivabile, f' continua

$\Rightarrow f$ è derivabile in senso L_2 e le 2 derivate coincidono



Provare a fare gli stmi calcoli

Supponiamo di dover risolvere

$$\ddot{y} = f$$

+ condizione

soluzione generale

So che $y(t) = \int_0^t \left(\int_0^{\gamma} f(\sigma) d\sigma \right) d\gamma + c_1 t + c_2$

c_1 e c_2 costante e arbitrarie

Potrei risolvere problema Cauchy, imponendo posiz. e velocità a $t=0$

y T-PERIODICA

$y(0) = y(T)$, nulla al bordo

WWW.INGONLINE.BIZ

Potrei considerare la forma * e imporre la condizione

→ sistema in $[c_1 \text{ e } c_2]$

ALTRO SISTEMA

Suppongo che $f \in L^2(0, T)$

$$f = \sum f_m e^{i\omega_m t}$$

$$f_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_m t} dt$$

Cercò y della forma $y = \sum y_m e^{i\omega_m t}$ y_m numeri

$$\Rightarrow \ddot{y} = \sum y_m (-\omega_m^2) e^{i\omega_m t} = \sum f_m e^{i\omega_m t}$$

$$\underline{\tilde{C}_0} = \boxed{\frac{2}{3} \pi^2}$$

$$\underline{f} = \underline{\frac{2}{3} \pi^2} + \underbrace{\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} -\frac{2}{k^2} (-1)^k e^{i k t}}_{\text{ }}$$

NOTA $f' = -2f$

In effetti "derivando x serie

$$\underline{f'} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} -2 \frac{(-1)^k}{k} i e^{i k t}$$

Uguale a quella di prima

Posso formalizzare discorso dicendo

$$\boxed{f' \Big|_{L^2} = -2f}$$

intendendo che

$$\underline{f_1} = \underline{\sum p_m} \quad \text{in } L^2 \quad \text{e}$$

$$\underline{2f} = \underline{\sum p_m} \quad \text{in } L^2 \quad \text{e}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\underline{2f} = \underline{\sum p'_m} \quad \text{in } L^2$$

$$\underline{f'} \Big|_{L^2} = \underline{f} \quad \text{se} \quad \underline{p_1 f} = \underline{\sum f_m} \quad \text{e} \quad \underline{p \Big|_{L^2}} = \underline{\sum f'_m}$$

e p limite delle derivate di f

In questo senso f è osservabile nel senso di L^2 se

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |m c_m|^2 < +\infty$$

$$\underline{f} \Big|_{L^2} = \sum c_m e_m \quad \sum |c_m|^2 < +\infty \quad \left(e_m(t) = \frac{e^{i \omega_m t}}{\sqrt{T}} \right)$$

$$(c_m e_m)' = i \omega_m c_m e_m$$

$$e'_m(t) = i \omega_m e_m(t)$$

$$\tilde{c}_k = \left[\frac{(-1)^k}{k} \right] \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} (-1)^n e^{jnt} = f$$

funzione non
è continua
e derivabile

$k \neq 0$

$$\sum |c_k| = +\infty$$

se forse

$$\sum |c_k| < +\infty$$

f continua su $\mathbb{R}$

$$f(-T) = f(T)$$

l'unica cosa se so

$$\sum |c_k|^2 < +\infty$$

è sommabile

$$\tilde{c}_0 = 0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) dt$$

$$\tilde{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jnt} + \bar{c}_n e^{-jnt}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re}(c_n e^{jnt}) =$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{n} \sin(nt)$$

$$a_k = 0 \quad \text{perché } f \text{ è DISPARI}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

f DISPARI

$\Leftrightarrow$

c_k immaginari p.w.

SOLO SENI

$\Leftrightarrow$

$$a_k = 0 \quad \forall k$$

f PARI

$\Leftrightarrow$

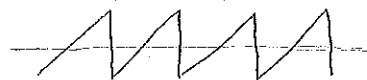
$$b_k = 0 \quad \forall k$$

SOLO COSINI

$\Leftrightarrow$

c_k reali

f



DENTE DI SEGHA

$$\tilde{c}_k = \left[\frac{1}{k} (-1)^k \right]$$

$$\tilde{b}_k = \left[\frac{(-1)^k}{k} \right]$$

$$\tilde{c}_0 = 0$$

SE $\sum k|c_k| < \infty$

$\Rightarrow f$ è derivabile

$f'_n \rightarrow f'$ UNIFORMEMENTE

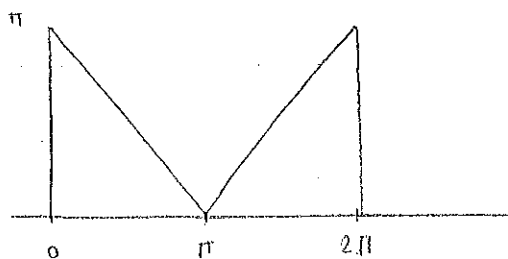
Infatti basta verificare che $\sum \left\| \frac{d}{dt} c_k e^{i\omega k t} \right\|_\infty < +\infty$, $e^{i\omega k t} = \frac{e^{i\omega k t}}{\sqrt{T}}$
 $\dot{e}^{i\omega k t} = \frac{i\omega k e^{i\omega k t}}{\sqrt{T}}$

$= \sum \|c_k k e^{i\omega k t}\|_\infty = \omega \sum |c_k| k$

Se $c_k \approx \frac{1}{k^2}$ va male
va bene
x la convergenza

Se $c_k \approx \frac{1}{k^3}$ O.K.

WWW.INGONLINE.BIZ



$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i\omega k t} dt$ $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i\omega k t} dt$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^0 (t+\pi) e^{-i\omega k t} dt + \int_0^{\pi} (\pi-t) e^{-i\omega k t} dt =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} (\pi-t) (e^{i\omega k t} + e^{-i\omega k t}) dt$

$$f = \sum c_k e_k = \sum c_k \frac{e^{i\omega_k T}}{\sqrt{T}}$$

se $f \in \mathbb{R}$

se chiamo $c_k = a_k - i b_k$

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f e^{-i\omega_k T}$$

se f reale se posso $c_k = a_k - i b_k$

$$\Rightarrow f = \frac{a_0}{\sqrt{T}} + \frac{2}{\sqrt{T}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \cos(\omega_k t) f(t)$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \sin(\omega_k t) f(t)$$

$$c_k = \frac{\sqrt{T}}{2k\pi} [\sin(\omega_k a) + i(\cos(\omega_k a) - 1)]$$

$$a_k = \frac{\sqrt{T}}{2k\pi} \sin(\omega_k a)$$

$$b_k = -\frac{\sqrt{T}}{2k\pi} (\cos(\omega_k a) - 1)$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(t) = \frac{a}{\sqrt{T}} = a_0$$

$$f = \frac{a}{T} + \frac{2}{\sqrt{T}} \left[\sum a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t) \right] =$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\leq \sum_{k \geq m+1} |c_k|^2 + \sum_{k \leq -m-1} |c_k|^2 \leftarrow *$$

Dato $\sum_{k>0} |c_k|^2 < +\infty$, $\sum_{k<0} |c_k|^2 < +\infty$

Dato $\varepsilon > 0$ trovo $\bar{m}$: il termine a destra in $\varepsilon < \varepsilon^2$

$\Rightarrow E$ di Cauchy e

x il teo di completezza $\Rightarrow$ (serie limite)

HA SENSO CONSIDERARE $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e_k$ (in L^2) NON APPENA $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 < +\infty$

$$(f, e_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, e_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_k = c_k$$

$f \in L^2 \iff (c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ t.c. $\sum |c_k|^2 < +\infty$ WWW.INGONLINE.BIZ

$e_k(t) = e^{i\omega_k t}$ funzione periodica

$\Rightarrow$ invece di $[0, T]$, potrei ripensare la funzione come periodica

se estendo f a tutto $\mathbb{R}$ in maniera periodica $\Rightarrow$

f_n sono già definite su $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{L^2} f$ SU OGNI INTERVALLO $[a, b]$

$$c_k = \int_0^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt = \int_a^b f(t) e^{-i\omega_k t} dt$$

lunghezza T

su qualunque $[a, b]$ di

27/10/2005

$$f \in L^2(0, T)$$

$$\left(\int_0^T |f|^2 < +\infty \right)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{e^{i\omega_n t}}{\sqrt{T}} = e_n(t)$$

WWW.INGONLINE.BIZ

dove $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$c_n = \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

$$c_n = (f(t), e_n(t))$$

PRODOTTO SCALARE

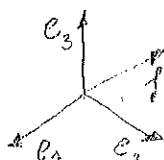
La struttura sopra significa che : $f(t) \rightarrow f$

$$\sum_{k=-M}^M c_k e_k \xrightarrow{L^2} f \iff \int_0^T \left| \sum_{k=-M}^M c_k e_k(t) - f(t) \right|^2 dt \rightarrow 0$$

non è t per t ma in senso integrale

INOLTRE

$$\int_0^T |f|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$



$\in \mathbb{R}^N$

$$\underline{v} = (x_1, \dots, x_m)$$

$$|\underline{v}|^2 = x_1^2 + \dots + x_m^2$$

$$\underline{v} = \sum x_i e_i$$

VICEVERSA data una successione

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n ? \quad \underline{\text{SI}}$$

$$(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

HA SENSO PRENDERE

$$\text{con } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$$

Infatti la successione

$$f_n = \sum_{k=-M}^M c_k e_k \quad \text{ha come limite } f \text{ in } L^2$$

Esiste f in $L^2(0, T)$ tale che $f_n \xrightarrow{L^2} f$ e $c_n = (f, e_n) = \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt$

$$\| \text{dist}_{L_2} (f, E_m) \|^2 = \| f_m - f \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{j=-m}^m |\hat{c}_j|^2 \geq 0$$

stare come

$$\text{se } m \rightarrow +\infty$$

spero che

$$\sum_{j=-m}^m |\hat{c}_j|^2 \rightarrow \| f \|^2$$

(c_m sono sufficienti a generare L^2)

In effetti ciò è vero

e quindi

$$f_m \xrightarrow{L_2} f, \quad \left(\int |f_m - f|^2 \rightarrow 0 \right)$$

$$\left(\sum |\hat{c}_j|^2 \right) = \| f \|^2$$

Alla fine

$$\forall f \in L^2(0, T)$$

Le f_m DATE PRIMA tendono a f in L^2

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (f, e_n) e_n$$

in senso di L_2

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\text{se } f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\hat{c}_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(t) \cos(\omega_k t) dt$$

$$- \frac{i}{\sqrt{T}} \int_0^T f(t) \sin(\omega_k t) dt = \boxed{a_k - i b_k}$$

$$\langle f_m - f, e_k \rangle = 0,$$

$$\forall k = -m, \dots, m$$

elemento della base

$$\left\langle \sum_{j=-m}^m \hat{c}_j e_j - f, e_k \right\rangle = 0$$

$$k = -m, \dots, m$$

$$\left\langle \sum_{j=-m}^m \hat{c}_j e_j, e_k \right\rangle = \langle f, e_k \rangle$$

$$\sum_{j=-m}^m \langle \hat{c}_j e_j, e_k \rangle = \langle f, e_k \rangle$$

$$\parallel \text{ se } j \neq k \langle e_j, e_k \rangle = 0$$

$$\hat{c}_k \langle e_k, e_k \rangle = \hat{c}_k$$

$$\langle e_k, e_k \rangle = 1$$



$$\hat{c}_k = \langle f, e_k \rangle$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$f_m = \sum_{j=-m}^m \langle f, e_j \rangle e_j$$

$$\langle f, e_j \rangle = \int_0^T f(t) \frac{e^{-i\omega_j t}}{\sqrt{T}} dt$$

$$m \in \mathbb{N} \quad E_m = \left\{ \sum_{j=-m}^m c_j e_j, c_j \in \mathbb{C} \right\}$$

$$f_m = \sum_{k=-m}^m \langle f, e_k \rangle e_k$$

$$f_m \in E_m \quad f_m - f \perp E_m$$

L^2 ($T : L^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lin. continuo $T \leftrightarrow$ funzioni di L^2)

C^0 ($T : C^0 \rightarrow \mathbb{R}$ lin. continuo non è corrispondenza con L^1)

L^2 SPAZIO VETTORIALE , CON UN PRODOTTO SCALARE (È UNA NORMA)

$$\int f \bar{g} = (f, g)$$

$$\|f\|_2^2 = (f, f) = \int |f|^2 \text{ energia}$$

prendiamo $T > 0$

$T > 0$ in $L^2([0, T])$

$$e_m(t) = \frac{e^{i\omega m t}}{\sqrt{T}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$(e_m, e_m) = \int_0^T e_m(t) \bar{e}_m(t) dt =$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega m t} e^{-i\omega m t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega(m-m)t} dt$$

$$n = m$$

$\Rightarrow$

$$1$$

$$\|e_m\| = 1$$

$$n \neq m \quad \frac{1}{T} \left[\frac{e^{i\omega(m-m)t}}{i\omega(m-m)} \right]_0^T = 0$$

oggetti formano funzioni

ORTONORMALI

$$e_m(t)$$

funzioni tra loro linearmente indipendenti

$\Leftrightarrow$ se f_1, f_2

$$\boxed{\int f_1 f} = \boxed{\int f_2 f} \quad \forall f \in C_0^\infty \Rightarrow$$

$$\boxed{f_1 = f_2} \quad \text{quasi ovunque}$$

$T(f) = f(0)$ non è un integrale

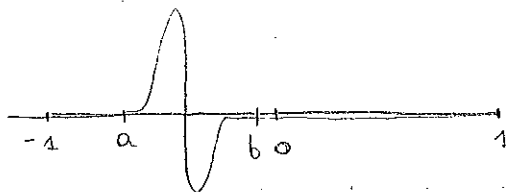
Non esiste $f_0 \in L^1$ tale che

$$\boxed{\int_{-1}^1 f_0(x) f(x) dx} = f(0)$$

FISSO $]a, b[$ $\in]-1, 1[$

$$0 \notin]a, b[$$

se $f \in C_0^\infty(a, b)$



Posso prolungare f A $] -1, 1[$ mettendola a zero su $]a, b[$

$$\boxed{\int_a^b f_0 f} = \boxed{\int_{-1}^1 f_0 f} = \underline{f(0)} = \underline{0}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\forall f \in C_0^\infty(a, b) \quad \boxed{\int_a^b f f_0 = 0}$$

$$\Rightarrow f_0 = 0 \quad \text{quasi ovunque su }]a, b[$$

$$\Rightarrow f_0 = 0 \quad \text{q. ov. su }]-1, 1[\quad \text{ASSURDO} \quad \boxed{\int f f = 0 \quad \forall f}$$

CASO $A = [-1, 1]$, $x_0 = 0$

$f(0)$ non è del tipo $\int_{-1}^1 f(x) f_0(x) dx$

per assurdo

~~per assurdo~~

ma ε positivo

è pseudo f continua

~~$f(x) = 0$ su $[-\varepsilon, \varepsilon]$~~ $f(0) = 0$

$$\Rightarrow \int f(x) f_0(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$f_0(x)$ fa zero per quasi $\forall x$ $x \neq 0$

* se $f_0(x)$ fosse positiva su un insieme di misura > 0

FATTO (Ricordate gli intervalli)

Se $[a, b]$ intervallo

se $f_0 \in L^1([a, b])$

se $\int_A f_0 f = 0 \quad \forall f$ continua $\Rightarrow f_0 = 0$ quasi ovunque

senza dimostrazione

$\Rightarrow$

Caso $A = [-1, 1]$, $x_0 = 0$

$$f(0) = \int_{-1}^1 f(x) f_0(x) dx$$

se $[a, b] \subset [-1, 1]$

$[a, b] \neq \emptyset$

$f \in C^0(a, b)$

WWW.INGONLINE.BIZ

Dato $T \quad \exists f_0 \in L^2$

In L^1 si può dire che

$$f \in L^1, \quad p \text{ limitata} \Rightarrow \boxed{f \cdot p} \in L^1$$

- Se fino p limitata

$$\underline{T(f)} = \boxed{\int_A f(x) p(x)} \quad \left(\left| \int f p \right| \leq \int |f p| \leq \sup p \int |f| \right) \quad \|f\|_1$$

$T : \underline{L^1} \rightarrow \mathbb{R}$, lineare, continuo

$$|T(f)| \leq \sup |p| \|f\|_1$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Problema analogo al precedente

Dato $T : \underline{L^1(A)} \Rightarrow \mathbb{R}$, lineare e continuo

$\exists K : |T(f)| \leq K \|f\|_1$ posso trovare limitata p tale che

$$\boxed{T(f)} = \int p f$$

NON
importante

SI

$$\int f \longrightarrow \int f p \quad (f \in L^1) \quad \text{ma posso anche considerare}$$

$$g \longrightarrow \int f g \quad \text{Facendo variare } g \text{ nelle continue}$$

(A compatto) $(g \text{ continua} \Rightarrow p \text{ limitata})$

$$T(g) = \int_A f g \quad T(g) \leq \int_A |f(x) g(x)| dx \leq \|g\|_\infty \int |f(x)| dx = \|g\|_\infty \|f\|_{L^1}$$
$$T : C^0(A) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A = [0, T] \quad T > 0$$

$$m \in \mathbb{Z} \quad (\text{INTERO RELATIVO})$$

$$e_m(t) = e^{i \frac{2\pi}{T} m t} \quad \text{per } T = 2\pi \quad \text{velo } e^{i m T}$$

$$(DA [0, T] \rightarrow \mathbb{C})$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$(e_m, e_m)_{L^2(0, T)} = \int_0^T e_m(t) \overline{e_m(t)} dt \quad \left(\frac{dati}{m, m \in \mathbb{Z}} \right)$$

$$= \int_0^T e^{i \frac{2\pi}{T} m t} e^{-i \frac{2\pi}{T} m t} dt = \int_0^T e^{i \frac{2\pi}{T} (m-m) t} dt$$

$$e^{i \text{interi}} = 1$$

$$\begin{aligned} n=m & \quad = T \\ n \neq m & \quad = \frac{e^{i \frac{2\pi}{T} (m-m) t}}{i \frac{2\pi}{T} (m-m)} \Big|_0^T = \frac{e^{i \frac{2\pi}{T} (m-m) T} - 1}{i \frac{2\pi}{T} (m-m)} = 0 \end{aligned}$$

se $m \neq n$ SONO ORTOGONALI

$$e_m \perp e_n \quad \text{se } m \neq n$$

$$e_m \|_{L_2} = \sqrt{T} \Rightarrow \text{mette } \sqrt{T} \text{ al denominatore e si normalizza}$$

CASO COMPLESSO

Fino ad ora ho considerato

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

se considero

$$f: A \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(f = f_1 + i f_2)$$

dico che

$$f \in L^1$$

$$/ \quad f \in L^2$$

se

$$|f| \in L^1 \quad | \Leftrightarrow \quad (f_1, f_2) \in L^1$$

$$|f|^2 \in L^1 \quad | \Leftrightarrow \quad f_1, f_2 \in L^2$$

$$(f, g) = \int_A f \bar{g}$$

Allora

$$(tf, g) = t(f, g)$$

$$(f, tg) = \bar{t}(f, g)$$

$$(f, g) = \overline{(g, f)}$$

$$\|f\|_1 = \int_A |f|$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_A |f|^2 \right)^{1/2} = (f, f)^{1/2}$$

PRODOTTO SCALARE

Mi dice l'angolo tra 2 vettori

In $\mathbb{R}^N$ e' il prodotto scalare

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \theta$$



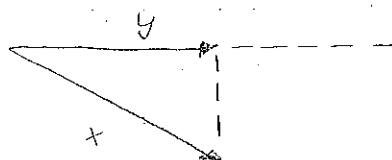
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

se x e y SONO ORTOGONALI

se $|\vec{y}| = 1$

$$\vec{x} \cdot \vec{y}$$

E' LA PROIEZIONE DI $\vec{x}$ sulla retta individuata da $\vec{y}$



$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}^{1/2}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

In $L^2(A)$

POSSO INTRODURRE

PRODOTTO SCALARE COME SEGUE

$$f, g \in L^2(A)$$

$$\int_A f(x) g(x) dx = (f, g)$$

(Andrebbe pre-dimostrato che $f, g \in L^2 \Rightarrow f \cdot g \in L^1$)

infatti: $|f(x) g(x)| \leq \frac{1}{2} |f(x)|^2 + \frac{1}{2} |g(x)|^2$

In L^1 non si può xke es. non e' detto che f, g sono integrabili. $\Rightarrow$ il prodotto non e' detto che sia integrabile)

In generale non c'e' relazione tra L^1 e L^2

$\frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1([0,1])$ ma non in $L^2([0,1])$

$\frac{1}{x^{3/4}} \in L^1(1, +\infty)$ ma $\frac{1}{x^{3/4}} \in L^2(1, +\infty)$

$$f(x) = 0 \quad \boxed{x \neq 0}$$

$$f(0) = 1 \quad \boxed{x = 0}$$

$$\int |f(x)| = 0$$

$$\mathcal{L}(A) = \left\{ f: A \rightarrow \mathbb{R}, \text{ INTEGRABILI } \right\}$$

$$L(A) = \left\{ f: A \rightarrow \mathbb{R}, \text{ integrabili "a meno di un quasi ovunque"} \right\}$$

funzioni definite quasi ovunque

Nel senso che se due funzioni di $\mathcal{L}$ verificano $f(x) = g(x)$ per quasi $\forall x$, allora sono lo stesso elemento di $L(A)$

Ex $f(x) = 0 \quad \forall x$

$g(x) = 0$, x razionali $\quad \boxed{g(x) = 1, \quad x \in \mathbb{Q}}$

con questa occorrenza quella di $\mathbb{I}$ è una norma

In $\boxed{L(A)}$ $\boxed{\|f\|_1} = \boxed{\int_A |f(x)| dx}$

"È UNA BUONA NORMA"

lo chiamiamo

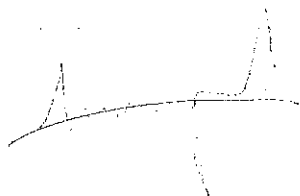
$$L^1(A)$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$f_n \rightarrow f$$

$$m \quad \underline{L^1(A)}$$

se $\boxed{\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0}$ cioè $\boxed{\int_A |f_n - f| dx \rightarrow 0}$



$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi$$

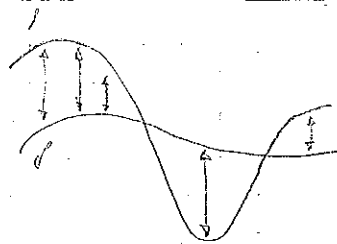
NORME "INTEGRALE"

DISTANZE "INTEGRALE" (tra funzioni)

f, g $\text{dist}_\infty(f, g) = \max_{x \in A} |f(x) - g(x)|$

$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$, $\text{dist}_\infty(f, g) = \|f - g\|$

(LA NORMA ∞
VA BENE NELLE
FUNZIONI CONTINUE)



con questa nozione

$f_n \rightarrow f$ in NORMA ∞ se

$f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE

In altre parole possibile NORMA SI PUÒ OTTENERE COME SEGUE:

Dati f, g INTEGRABILI su A
ANGO $\|f\|_1 = \int_A |f(x)| dx$



semplicemente
e' area

$\text{dist}_1(f, g) = \|f - g\|$

Dimo' che $f_n \rightarrow f$ IN NORMA 1

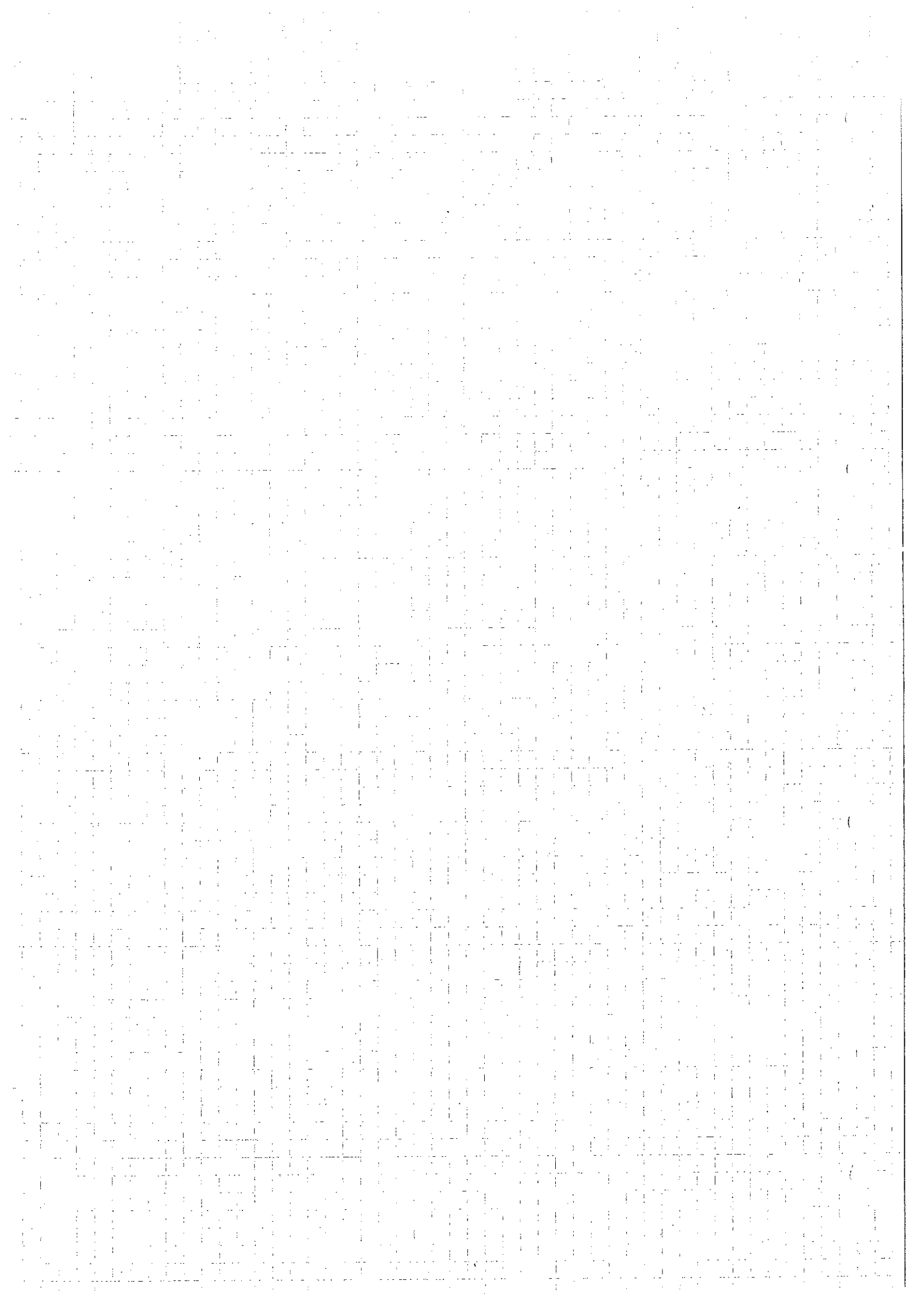
SE $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$

WWW.INGONLINE.BIZ

Esempio

$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } -\frac{1}{n^2} < x < \frac{1}{n^2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$A = [-1, 1]$



$$\Rightarrow e^{-t} - e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$b(t) = H(t) \cos(2t) e^{-t}$$

$$\mathcal{L}(b(t)) = \frac{2}{z^2 + 4}$$

$$\mathcal{L}(b(t)) = \frac{2}{(z+1)^2 + 4} = \frac{2}{z^2 + 2z + 5}$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \frac{2}{(z^2 + z + 1)(z^2 + 2z + 5)}$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma + i\mathbb{R}} \frac{2e^{zt}}{(z^2 + z + 1)(z^2 + 2z + 5)} dz = \sum_{z = -1 \pm 2i, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i} \text{Res} \left(\frac{2e^{zt}}{(z^2 + z + 1)(z^2 + 2z + 5)}, z_j \right)$$

$$\Rightarrow \frac{2e^{zt}}{(z^2 + z + 1)(z^2 + 2z + 5)}$$

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$z^2 + 2z + 5 = 0 \quad z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i$$

$$\frac{2e^{zt}}{(z^2 + z + 1)(2z + 1)} = \frac{e^{zt}}{(z^2 + z + 1)(z + 1/2)} = \frac{e^{-t} e^{2it}}{(-3 - 4i - 1 + 2i + 1/2)(2i)}$$

$$= \frac{e^{-t} e^{2it}}{(-3 - 2i)2i} = \frac{-2i e^{-t} e^{2it} (-3 + 2i)}{2i \cdot 13} = \frac{(3i + 2) e^{-t} e^{2it}}{26}$$

$$\frac{e^{-t} e^{-2it}}{(-3 + 4i - 1 - 2i + 1/2)(-2i)} = \frac{e^{-t} e^{-2it}}{(2i - 3) - 2i} = \frac{2i(-3 - 2i) e^{-t} e^{-2it}}{A_2 \cdot 13}$$

$$= \frac{(-3i + 2) e^{-t} e^{-2it}}{26}$$

$$= \frac{3}{13} e^{-t} \sin(2t) + \frac{2}{13} e^{-t} \cos(2t)$$

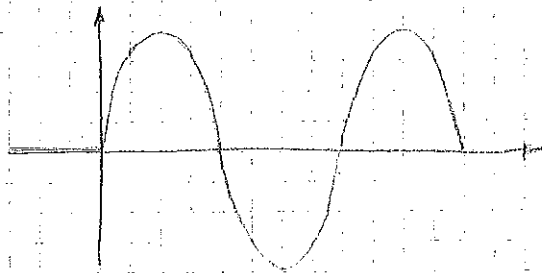
$$\frac{2e^{zt}}{(z^2 + 2z + 5)(2z + 1)} = \frac{2e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it}}{\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \sqrt{3}i + 5\right) \cdot (-1 + \sqrt{3}i + 1)} = \frac{-2\sqrt{3}i e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it}}{\left(\frac{7}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)3}$$

$$= \frac{-4\sqrt{3}i e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it} (7 - \sqrt{3}i)}{13 \cdot 3} = \frac{-7\sqrt{3}i - 3}{13 \cdot 3} e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$y(t) = 1 - \cos(t)$$

$$y(t) - y(t - T_0) = 1 - \cos(t) - 1 + \cos(t - T_0)$$



$$b(t) = H(t) \sin(at)$$

$$\check{b}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t) e^{-zt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{at} - e^{-at}}{2i} e^{-zt} dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(ai-z)t}}{2i} - \frac{e^{(-ai-z)t}}{2i} dt$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\frac{1}{2i} \frac{1}{z - ai} + \frac{1}{2i} \frac{1}{z + ai} = \frac{a}{z^2 + a^2}$$

$$\check{y}(z) = \frac{a}{(z^2 + a^2)(z^2 + 1)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma + R_1} \frac{a e^{zt}}{(z^2 + a^2)(z^2 + 1)} dz = \sum_{\substack{z = \pm ai \\ z = \pm i}} \text{Res} \left(\frac{a e^{zt}}{(z^2 + a^2)(z^2 + 1)}, z_j \right)$$

$$\text{Res}(f, \pm ia) = \frac{\frac{a e^{\pm iat}}{z^2 + 1}}{2z} = \frac{a e^{\pm iat}}{(z^2 + 1) 2z} = \frac{a e^{\pm iat}}{(1 - a^2) 2ai}$$

$$= \frac{-2i e^{\pm iat}}{(1 - a^2) 4} = \frac{-i e^{\pm iat}}{(1 - a^2) 2}$$

$$\text{Res}(f, -ai) = \frac{\frac{a e^{-iat}}{(1 - a^2) - 2ai}}{2ai} = \frac{2ai e^{-iat}}{(1 - a^2) 4} = \frac{i e^{-iat}}{(1 - a^2) 2}$$

$$\frac{1}{(1 - a^2)} \sin(at)$$

$$\text{Res}(f, i) = \frac{\frac{a e^{it}}{(z^2 + a^2)}}{2z} = \frac{a e^{it}}{(z^2 + a^2) 2z} = \frac{a e^{it}}{(a^2 - 1) 2i} = \frac{-2ai e^{it}}{4(a^2 - 1)} = \frac{-ai e^{it}}{2(a^2 - 1)}$$

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = H(t) \operatorname{seu}(at) \\ y \text{ nulla prima di zero} \end{cases}$$

$$(z^2 + 2z + 1) \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(b)$$

$$\mathcal{L}(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t) e^{-zt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) \operatorname{seu}(at) e^{-zt} dt = \int_0^{+\infty} \operatorname{seu}(at) e^{-zt} dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{at} - e^{-at}}{2i} e^{-zt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(ai+z)t}}{2i} - \frac{e^{-(ai-z)t}}{2i} dt$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z - ai} - \frac{1}{z + ai} \right) = \frac{a}{z^2 + a^2}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\check{y}(z) = \frac{a}{(z^2 + a^2)(z^2 + 2z + 1)}$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma + R i} \frac{a}{(z^2 + a^2)(z^2 + 2z + 1)} e^{zt} dz = \sum_{z_j = \pm ai / -1} \operatorname{Res} \left(\frac{a e^{zt}}{(z^2 + a^2)(z + 1)^2}, z_j \right)$$

$$\operatorname{Res}(f, ai) = \frac{a e^{zt}}{(z + 1)^2 \cdot 2z} = \frac{a e^{ait}}{(a^2 + 1 + 2ai)(2ai)} = \frac{e^{ait}}{-2a^2 i + 2i - 4a}$$

$$= \frac{-e^{ait}}{i(2a^2 - 2) + 4a} = \frac{[4ai - i(2a^2 - 2)] e^{ait}}{16a^2 + 4a^4 + 4 - 8a^2} = \frac{-[4a - i(2a^2 - 2)] e^{ait}}{4a^4 + 8a^2 + 4} =$$

$$= \frac{-[2a - i(a^2 - 1)] e^{ait}}{2a^4 + 4a^2 + 2}$$

$$\operatorname{Res}(f, -ai) = \frac{a e^{-ait}}{(-a^2 + 1 - 2ai)(-2ai)} = \frac{2a^2 i e^{-ait}}{[1 - a^2 - 2ai] 4a^2} = \frac{[2a^2(1 - a^2)i - 4a^3] e^{-ait}}{(1 + a^4 - 2a^2 + 4a^2) 4a^2} =$$

$$\cancel{\operatorname{Res}(f, ai)} = \cancel{\frac{a e^{ait}}{(z + 1)^2 \cdot 2z}} = \cancel{\frac{2a^2 i e^{-ait}}{[1 - a^2 - 2ai] 4a^2}} = \frac{[2a^2(1 - a^2)i - 4a^3] e^{-ait}}{4a^4 + 8a^2 + 4}$$

$$\text{Res}(f, 0) = \left. \frac{d}{dz} \frac{e^{zt}}{z^2 + a^2} \right|_{z=0} = \left. \frac{e^{zt} \cdot t(z^2 + a^2) - 2ze^{zt}}{(z^2 + a^2)^2} \right|_{z=0} =$$

$$\frac{a^2 t}{a^4} = \frac{t}{a^2}$$

$$\text{Res}(f, ai) = \left. \frac{e^{zt}}{z^2 \cdot 2z} \right|_{z=ai} = \frac{e^{ait}}{-a^2 + 2ai} = \frac{e^{ait}}{-2a^3 i}$$

$$\text{Res}(f, -ai) = \left. \frac{e^{zt}}{z^2 \cdot 2z} \right|_{z=-ai} = \frac{e^{-ait}}{-a^2 - 2ai} = \frac{e^{-ait}}{2a^3 i}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{a^2} - \frac{1}{a^3} \sin(at) \quad \text{soluzione particolare}$$

$$y'' + 2y' + y = b(t)$$

WWW.INGONLINE.BIZ

1 - Soluzione dell'equazione omogenea

$$Hy'' + 2Hy' + Hy = Hb \quad \text{applico } \mathcal{L}$$

$$z^2 \mathcal{L}(Hy) - zy(0) - y'(0) + 2z \mathcal{L}(Hy) - 2y(0) + \mathcal{L}(Hy) = \mathcal{L}(Hb)$$

$$\mathcal{L}(Hy) (z^2 + 2z + 1) = zy(0) + y'(0) + 2y(0) = \underbrace{\alpha z + \beta}_{\text{in generale polinomio di grado } m-1}$$

$$\mathcal{L}(Hy) = \frac{\alpha z + \beta}{z^2 + 2z + 1} = \frac{\alpha z + \beta}{(z+1)^2}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\alpha z + \beta}{(z+1)^2} e^{zt} dz = \sum_{z_j = -1} \text{Res} \left(\frac{\alpha z + \beta}{(z+1)^2} e^{zt}, z_j \right)$$

$$\text{Res}(f, -1) = \left. \frac{d}{dz} (\alpha z + \beta) e^{zt} \right|_{z=-1} = \alpha e^{zt} + t e^{zt} (\alpha z + \beta) \Big|_{z=-1} =$$

$$\alpha e^{-t} + t e^{-t} (\beta - \alpha) \quad t > 0$$

$$f(t)$$

$$\check{f}(z)$$

$$H(t) e^{ct}$$

$$\frac{1}{z-c}$$

$$t^k H(t) e^{ct}$$

$$(-1)^k \frac{d^k}{dz^k} \frac{1}{z-c} = (-1)^k \frac{d^k}{dz^k} (z-c)^{-1}$$

$$= (-1)^k (-1)^k k! (z-c)^{-k-1}$$

$$= \frac{k!}{(z-c)^{k+1}}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Se $c=0$

$$H(t) t^k$$

$$\frac{k!}{z^{k+1}}$$

TEOREMA: Supponiamo che f abbia derivata in $L_{1,loc}$ $f(t) = 0$ $t \leq -M$

$$a(f) \leq a(f') \leq \dots \leq a(f^k) \quad e$$

$$\mathcal{L}(f^k) = z^k \mathcal{L}(f)$$

Prolungiamo f con $f' \in L_{1,loc}$. Non chiedo che $f=0$ prima di $-M$

$$\mathcal{L}(Hf') = z \mathcal{L}(Hf)(z) - f(0)$$

Più in generale $\rightarrow$

$$\mathcal{L}(Hf^{(k)}) = z^k \mathcal{L}(Hf)(z) - \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(0) z^{k-1-j}$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(0) z^{k-1-j}$$

TEOREMA DEL VALORE INIZIALE: $f \in L_{1,loc}$, $f' \in L_{1,loc}$ $a(Hf') < +\infty$

$$\lim_{\operatorname{Re}(z) \rightarrow +\infty} z \mathcal{L}(Hf')(z) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (Hf')(t) = (f(0)) \quad \text{dato che } f \text{ è continua in zero}$$

TEOREMA DEL VALORE FINALE

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \mathcal{L}(Hf')(z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$$

COMPORTAMENTO RISPETTO ALLE TRASLAZIONI

$f \in L_{1,loc}$ $f(t)$ nulla prima di $-M$

$$a(f(t-t_0)) = a f(t)$$

$$\mathcal{L}(f(t-t_0)) = \mathcal{L}(f(t)) e^{-t_0 z}$$

$$* \Delta \quad \frac{1}{2\pi} \int \frac{2 e^{i\omega t}}{(\omega^2 + 2i\omega - 5)(\omega^2 - i\omega - 1)} d\omega =$$

$$\omega^2 + 2i\omega - 5 = 0$$

$$\omega = -i \pm \sqrt{-1+5} = -i \pm 2$$

$$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Res}(f(\omega), -i+2) = \frac{2e^{i\omega t}}{\omega^2 - i\omega - 1} = \frac{2e^{(4+2i)t}}{3-4i-1-2i-1}$$

$$= \frac{2e^t e^{2ti}}{-4 + 24i} = \frac{(-2-12i)e^t e^{2ti}}{148} = \frac{(-1-6i)e^t e^{2ti}}{74}$$

$$\text{Res}(f(\omega), -i-2) = \frac{2e^{(4-2i)t}}{3+4i-1+2i-1} = \frac{2e^t e^{-2ti}}{4 + 24i}$$

$$= \frac{(2-12i)e^t e^{-2ti}}{148} = \frac{(1-6i)e^t e^{-2ti}}{74}$$

$$\text{Res}(f, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{2e^{i\omega t}}{\omega^2 + 2i\omega - 5}$$

$$\frac{-2\omega^2 + 10}{(\omega^2 + 5)^2 + 4\omega^2} = \frac{-2\omega^4 + 10}{\omega^4 + 25 + 10\omega^2 + 4\omega^2}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$= \frac{2\omega^2 + 10}{\omega^4 + 14\omega^2 + 49} =$$

~~Handwritten scribbles~~

$$y'' + y' + y = b(t)$$

$$b(t) = H(t) \sin(2t) e^{-t}$$

(2)

$$\hat{y}(\omega) = \frac{\hat{b}(\omega)}{(-\omega^2 + i\omega + 1)}$$

$$\hat{b}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{2ti} - e^{-2ti}}{2i} \right) \cdot e^{-t} \cdot e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{(2-i-\omega)i}t} {2i} - \frac{e^{(-2-i-\omega)i}t} {2i} dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\gamma t}} {2i} = \left[\frac{e^{-\gamma t}} {-2i\gamma} \right]_0^{+\infty} = \frac{-1}{-2i\gamma} = \frac{1}{2i\gamma} = -\frac{i}{2\gamma}$$

$$= -\frac{i}{2(1-(2-i)\gamma)} + \frac{i}{2(1+(-2-i)\gamma)}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$= \frac{-(1+2i+\omega i)\gamma + (1-2i+\omega i)\gamma} {2(1+2i+\omega i-2i+\omega i+4-\omega^2)} = \frac{4} {2(5+2i\omega-\omega^2)}$$

$$= \frac{-2} {\omega^2 - 2i\omega - 5}$$

$$= (\omega^2 - 5) + 4$$

$$= (\omega^2 - 5) + 2i\omega - 4$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{2} {(\omega^2 - 2i\omega - 5)(\omega^2 - i\omega - 4)}$$

$$\omega^2 - 2i\omega - 5 = 0$$

$$\omega = \frac{i \pm \sqrt{1+5}} {2} = \frac{i \pm 2}{2}$$

$$\omega^2 - i\omega - 4 = 0$$

$$\omega = \frac{i \pm \sqrt{1+4}} {2} = \frac{1}{2} i \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Res} \left(\frac{e^{i\omega t}}{(\omega-i)(\omega^2-i\omega-1)}, i \right) = \left. \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2-i\omega-1} \right|_{\omega=i} = \frac{e^{-t}}{-2+1} = -e^{-t}$$

$$\text{Res} \left(f(\omega), \frac{1}{2}i \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left. \frac{e^{i\omega t}}{\omega-i} \right|_{\omega=\frac{1}{2}i \pm \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{e^{\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t}}{-\frac{1}{2}i \pm \frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2}} = \frac{2e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it}}{3 - \sqrt{3}i}$$

$$= \frac{(6 + 2\sqrt{3}i) e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it}}{9 + 3} = \frac{(3 + \sqrt{3}i) e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it}}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{i\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t}}{-\frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2e^{-\frac{1}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}it}}{\sqrt{3}i + 3} =$$

WWW.INCONLINE.BIZ

$$\frac{2(3 - \sqrt{3}i) e^{-\frac{1}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}it}}{9 + 3} = \frac{(3 - \sqrt{3}i) e^{-\frac{1}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}it}}{6}$$

$$= e^{-t} - \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}it} + \frac{\sqrt{3}}{6} i e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it} - \frac{\sqrt{3}}{6} i e^{-\frac{1}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}it} \right)$$

$$= e^{-t} - \left(e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right)$$

$$= e^{-t} - e^{-\frac{1}{2}t} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega(-\omega^2 + a)} d\omega = \frac{1}{2} \sum_{\omega_j = 0/\pm\sqrt{a}} \text{Res} \left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega(-\omega^2 + a)}, \omega_j \right) \quad t > 0$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{\omega_j = 0/\pm\sqrt{a}} \text{Res} \left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega(-\omega^2 + a)}, \omega_j \right) \quad t < 0$$

$$= \frac{\text{sgn}(t)}{2} \sum_{\omega_j} \frac{e^{i\omega t}}{-3\omega^2 + a} \Bigg|_{\substack{\omega_j = 0 \\ \omega_j = \pm\sqrt{a}}} =$$

$$= \frac{\text{sgn}(t)}{2} \left\{ \frac{1}{a} + \frac{e^{\sqrt{a} i t}}{-3a + a} + \frac{e^{-\sqrt{a} i t}}{-3a + a} \right\}$$

$$= \frac{\text{sgn}(t)}{2} \left\{ \frac{1 - \cos(\sqrt{a} t)}{a} \right\}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\text{sgn}(t) \left\{ \frac{1 - \cos(\sqrt{a} t)}{a} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \text{sgn}(t + T_0) \frac{1 - \cos(\sqrt{a}(t + T_0))}{a} + \text{sgn}(t - T_0) \frac{1 - \cos(\sqrt{a}(t - T_0))}{a} \right\}$$

$$\sqrt{a} T_0 = 2k\pi \Rightarrow$$

$$\text{sgn}(t) \left\{ \frac{1 - \cos(\sqrt{a} t)}{a} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \text{sgn}(t + T_0) \frac{1 - \cos(\sqrt{a} t)}{a} + \text{sgn}(t - T_0) \frac{1 - \cos(\sqrt{a} t)}{a} \right\}$$

$$\begin{cases} t + T_0 > 0 & t > -T_0 \\ t - T_0 > 0 & t > T_0 \end{cases}$$

$$t > T_0$$

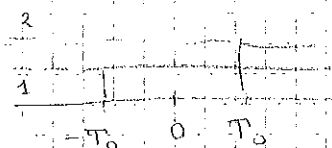
$$t < -T_0$$

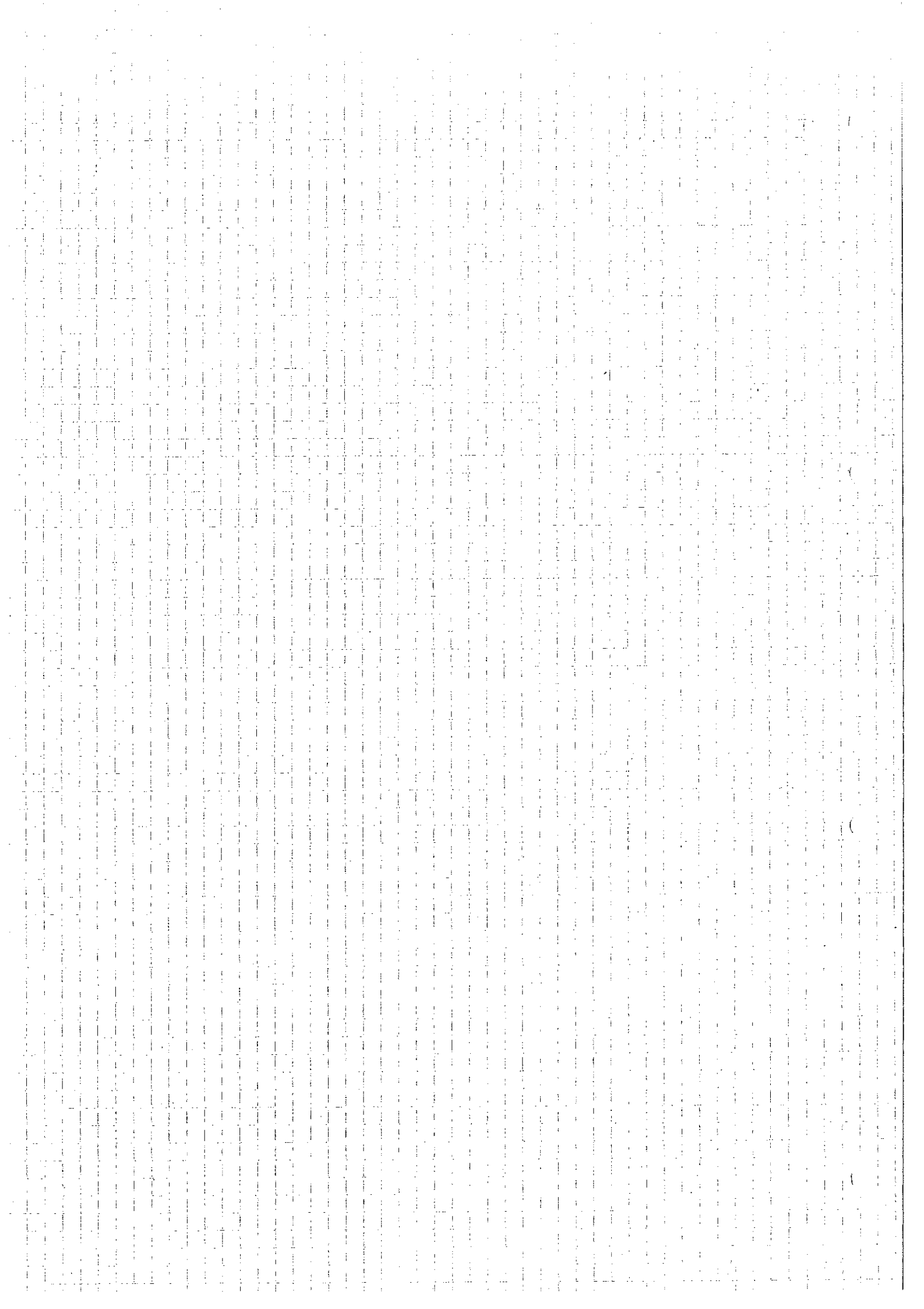
$$T_0 < t < T_0$$

$$-T_0 < t < 0 \quad \frac{\cos(\sqrt{a} t) - 1}{a}$$

$$0 < t < T_0$$

$$\frac{1 - \cos \sqrt{a} t}{a}$$





$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin(\omega T_0)}{(a^2 - \omega^2)\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{j\omega T_0} - 2e^{-j\omega T_0}}{2j(a^2 - \omega^2)\omega} e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega(T_0+t)} - e^{j\omega(t-T_0)}}{j(a^2 - \omega^2)\omega} d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega(\overbrace{T_0+t}^{\gamma})}}{(a^2 - \omega^2)\omega} d\omega = \frac{1}{2} \sum_{\text{Im } z_j > 0} \text{Res}(f(\omega), \omega_j) \quad \gamma > 0$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{\text{Im } \omega_j < 0} \text{Res}(f(\omega), \omega_j) \quad \gamma < 0$$

POLI $\pm a$ 0

$$\text{Res}(f, \omega_j) = \frac{e^{j\omega_j \gamma}}{a^2 - 3\omega_j^2}$$

$$\begin{array}{l} \frac{e^{j\gamma a}}{-2a^2} \\ \frac{e^{-j\gamma a}}{-2a^2} \\ \frac{1}{a^2} \end{array}$$

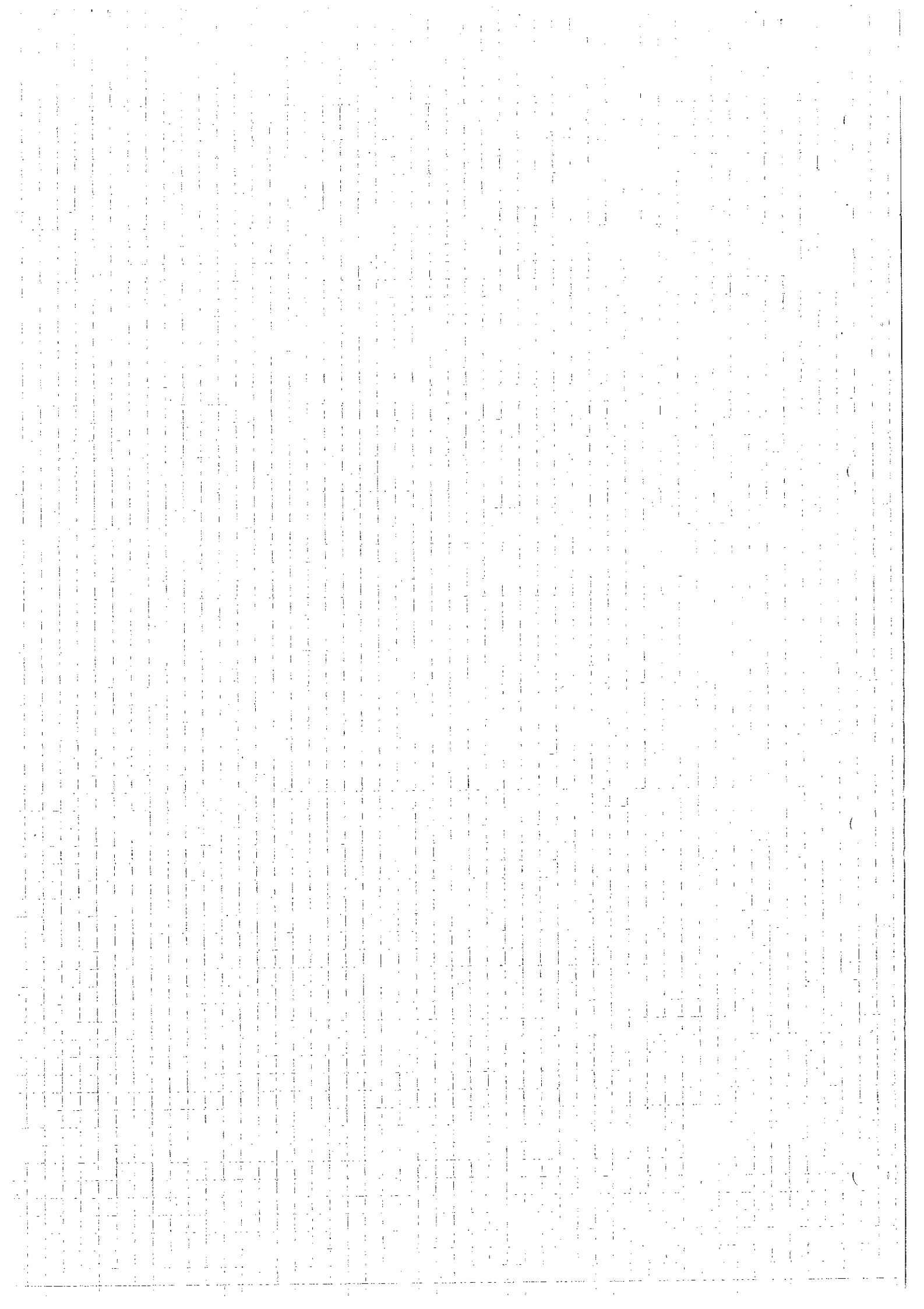
$$\frac{\text{sgn}(\gamma)}{2} \sum \text{Res}$$

$$= \frac{\text{sgn}(\gamma)}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{e^{j\gamma a}}{-2a^2} + \frac{e^{-j\gamma a}}{-2a^2} \right) =$$

$$= \frac{\text{sgn}(\gamma)}{2} \left(\frac{1 - \cos(\gamma a)}{a^2} \right) = h(\gamma)$$

NOTA: $h(\gamma)$ è di classe C^1 $h(0) = 0$ $h'(0) = 0$

$$y(t) = h(t+T_0) - h(t-T_0) = \frac{1}{2} \left\{ \text{sgn}(t+T_0) \frac{1 - \cos[(t+T_0)a]}{a^2} - \text{sgn}(t-T_0) \frac{1 - \cos[(t-T_0)a]}{a^2} \right\}$$



Viceversa se $g \in L^2(\mathbb{R})$ e se

$$h_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-H}^H g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \Rightarrow \exists h \text{ tale che } h_n(t) \xrightarrow{L^2} h$$

e $\hat{h} = g$

La TRASFORMATA DI FOURIER È UN'APPLICAZIONE BIUNIVOCA, LINEARE, CONTINUA

$$L^2 \longleftrightarrow L^2$$

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \longleftrightarrow L^2(\mathbb{R}) \quad \mathcal{F} \text{ lineare}$$

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_2 \quad \mathcal{F} \text{ invertibile}$$

$$\mathcal{F}^{-1}(g) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\tilde{g}) \quad \text{dove } \tilde{g}(\omega) = g(-\omega)$$

PROPRIETÀ DI $\mathcal{F}$ si preservano in L^2

$$\hat{f} \in L^2$$

$\mathcal{F}$ lineare

Se $t^k f \in L^2 \Rightarrow \hat{f}$ ha derivata kesima in L^2 (p ha derivata in L^1/L^2 se $\exists f_n \xrightarrow{L^2/L^2} f$ e $f_n' \xrightarrow{L^1/L^2} g$ qualcosa = f')

Se f ha derivata kesima in L^2 $\omega^k \hat{f} \in L^2 \quad \hat{f}^{(k)} = (i\omega)^k \hat{f}$

Se g ha derivata in $L^2/L^1 \Rightarrow g$ continua

$\Rightarrow$ se $\omega \hat{f} \in L^2$ ($\omega^2 \hat{f}^2 \in L^2$)

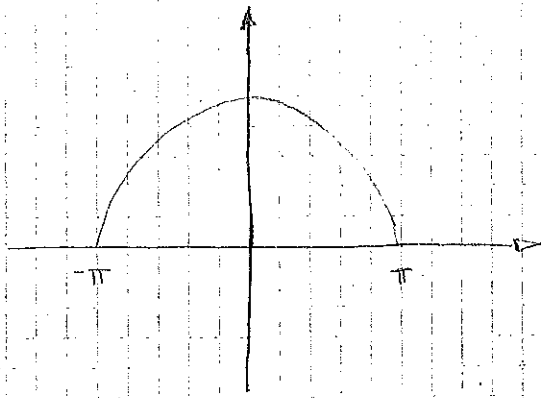
$\Rightarrow f$ CONTINUA (perché f ha derivata in L^2)

$f \in L^2, t_0 \quad f_{t_0} = f(t-t_0) \quad f$ TRASLATA di t_0

$$\mathcal{F}(f(t-t_0)) = e^{-i\omega t_0} \mathcal{F}(f)$$

$$\mathcal{F}(f(t)e^{i\omega_0 t}) = \mathcal{F}(f)(\omega-\omega_0)$$

WWW.INGONLINE.BIZ



$$f(t) = -t^2 + \pi^2 \quad -\pi < t < \pi$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-t^2 + \pi^2) e^{-i\omega kt} dt = \frac{1}{2\pi} \left\{ \left(-t^2 + \pi^2 \right) \frac{e^{-i\omega kt}}{-i\omega k} \right\}_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i\omega kt}}{-i\omega k} (-2t) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ - \left[\frac{e^{-i\omega kt}}{-\omega^2 k^2} - 2t \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i\omega kt}}{-\omega^2 k^2} (-2) dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ - \frac{2e^{-i\omega k\pi}}{-\omega^2 k^2} - 2\pi + \frac{2e^{-i\omega k(-\pi)}}{i\omega^3 k^2} \right\} =$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{2(-1)^k}{\omega^2 k^2} 2\pi = - \frac{2(-1)^k}{\omega^2 k^2} = - \frac{2(-1)^k}{k^2}$$

$$= \tilde{a}_k = \tilde{b} \quad \tilde{a}_k = \frac{2(-1)^k}{k^2}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-t^2 + \pi^2) dt = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{t^3}{3} + \pi^2 t \right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\pi^3}{3} + \pi^3 - \left(-\frac{\pi^3}{3} + \pi^3 \right) \right] = \frac{2}{2\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$f(t) = \frac{2\pi^2}{3} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2(-1)^k}{k^2} \cos(kt)$$

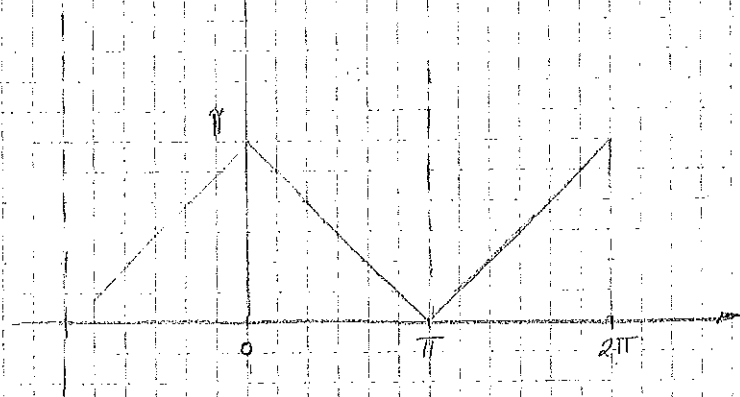
$$c_k \sim \frac{1}{k}$$

la funzione di potenza non è continua

la CONVERGENZA NON È UNIFORME xke la serie di

funzioni continue non è continua

$$\sum \|c_k e_k\| = \sum \|c_k\| \|e_k\|_\infty = \sum \|c_k\|$$



$$f(t) = \begin{cases} -t + \pi & 0 < t < \pi \\ t - \pi & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i\omega k t} dt = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} (-t + \pi) e^{-i\omega k t} dt + \int_{\pi}^{2\pi} (t - \pi) e^{-i\omega k t} dt \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[(-t + \pi) \frac{e^{-i\omega k t}}{-i\omega k} - \int_0^{\pi} \frac{e^{-i\omega k t}}{-i\omega k} dt \right] + \left[(t - \pi) \frac{e^{-i\omega k t}}{-i\omega k} - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-i\omega k t}}{-i\omega k} dt \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[\frac{\pi}{-i\omega k} - \frac{e^{-i\omega k t}}{\omega^2 k^2} \right]_0^{\pi} \right\} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[\frac{\pi}{-i\omega k} - \frac{e^{-i\omega k t}}{\omega^2 k^2} \right]_{\pi}^{2\pi} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{-\pi}{i\omega k} - \frac{e^{-i\omega k \pi} - 1}{k^2} \right\} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{-\pi}{i\omega k} - \frac{e^{-i\omega k 2\pi} - 1}{k^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{k} i + \frac{1 - e^{-i\omega k \pi}}{k^2} \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{k} i + \frac{1 - (-1)^k}{k^2} \right\}$$

$$= \frac{i}{k} + \frac{1 - (-1)^k}{\pi k^2}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (t + \pi) e^{-i\omega k t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-t + \pi) e^{-i\omega k t} dt$$

$$t = -w \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^0 (-w + \pi) e^{i\omega k w} - dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (-w + \pi) e^{i\omega k w} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (-t + \pi) e^{i\omega k t} dt$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Infatti $\sum |n y_n| < +\infty$

$$\frac{1}{w^2} \sum \frac{f_n}{n} \leq \frac{1}{2w^2} \sum \left(|f_n|^2 + \frac{1}{n^2} \right) < +\infty$$

se $\sum |f_n| < +\infty$ (f continua)

g.e. C^1 e risolve in senso usuale.

WWW.INGONLINE.BIZ

SE LA FUNZIONE f È DISPARI $\Rightarrow$

C_k immaginari puri } Si sviluppa in soli SENI
 $a_k = 0$

SE LA FUNZIONE f È PARI $\Rightarrow$

$b_k = 0$ } Si sviluppa in soli COSENI
 C_k reali

WWW.INGONLINE.IT

Sia $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 < +\infty$

e sia f in L^2 per (T) la somma della serie di Fourier associata a C_n

$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e_k$ Indichiamo con f_m i polinomi di Fourier

$f_m = \sum_{k=-m}^m C_k e_k$ (quindi $f_m \xrightarrow{L^2} f$)

1]- Se si ha $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n| < +\infty$ f continua T periodica

Inoltre f_m converge uniformemente a f su qualunque intervallo

$[a, b]$ di $\mathbb{R}$

2]- Se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n |C_n| < +\infty$ f è derivabile f' è continua e T periodica

Inoltre $f_m \rightarrow f$ uniformemente $f'_m \rightarrow f'$ su qualunque intervallo

$[a, b]$ di $\mathbb{R}$

3]- In generale dato un numero h se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^h |C_n| < +\infty$ f è

derivabile h volte tutte le derivate di ordine minore o uguale ad h sono

continue e T periodiche inoltre $f_m^{(h)} \rightarrow f^{(h)}$ $h = 0, \dots, h$ su

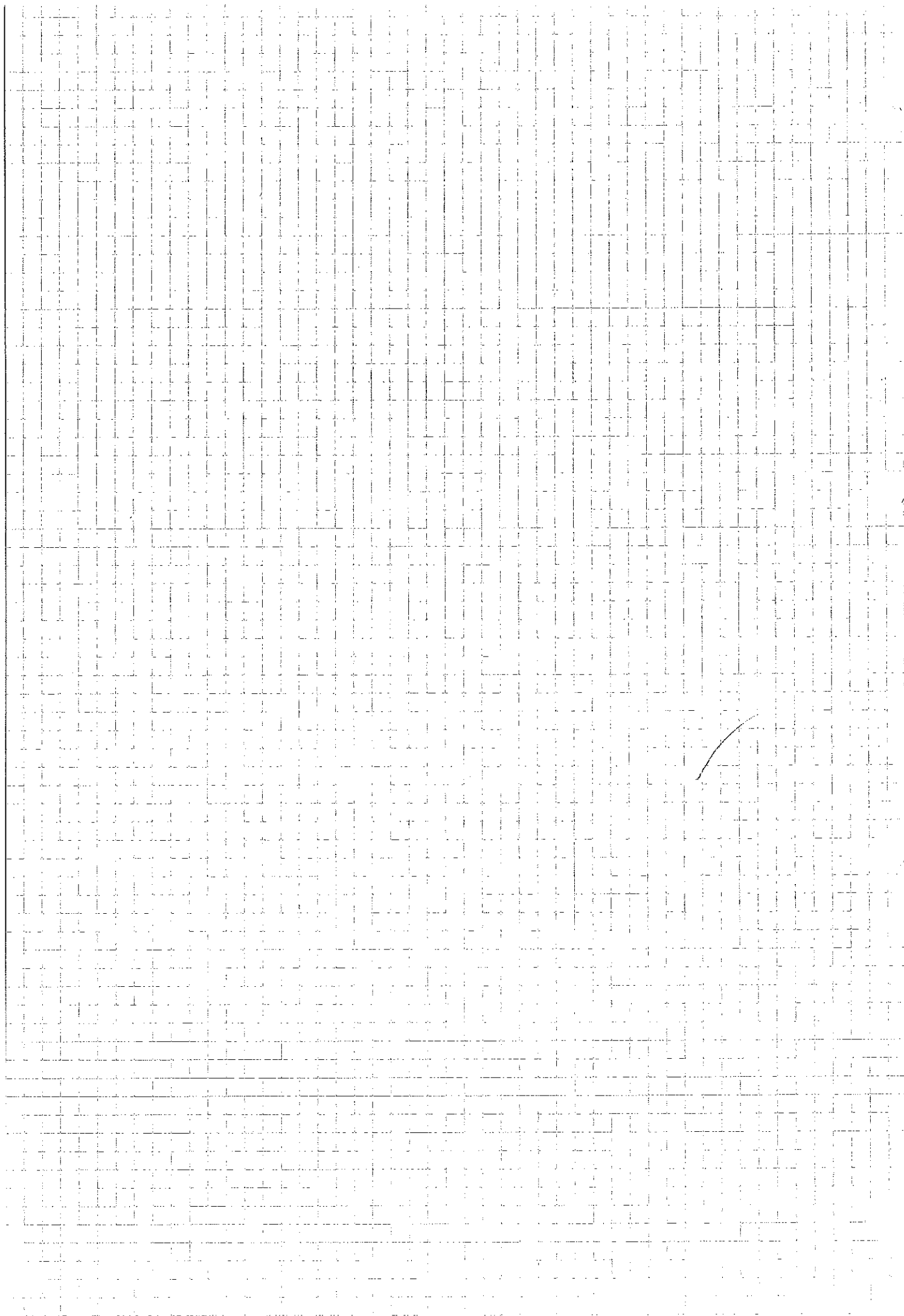
l'intervallo $[a, b]$ di $\mathbb{R}$

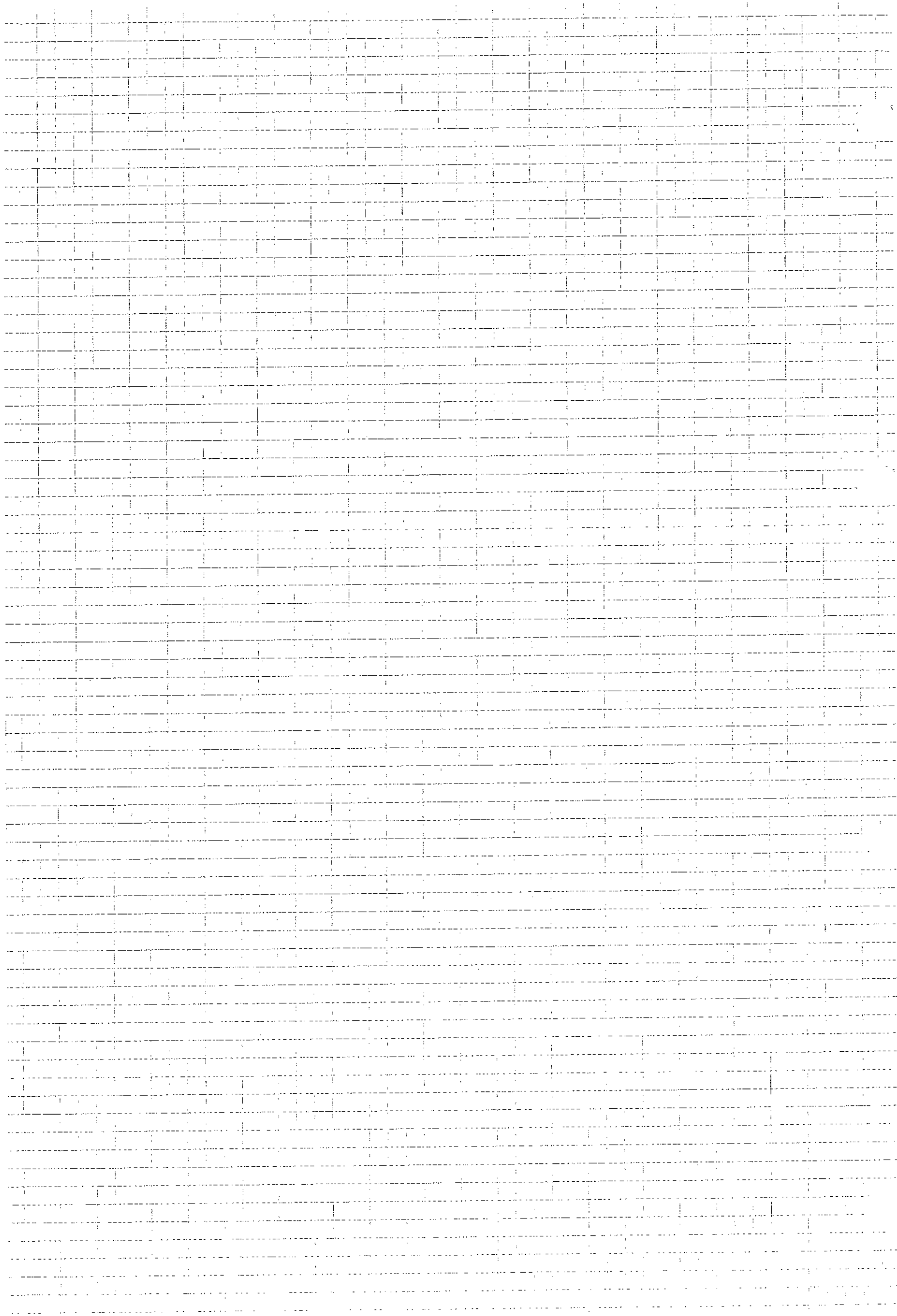
Sia f una funzione in L^2 per (T) siano $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ i suoi coefficienti

di Fourier $\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |C_n|^2 < +\infty$ la funzione f è derivabile

in senso di L^2 e la sua derivata generalizzata è:

$f|_{L^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i n C_n e_n$ Inoltre f è continua T periodica e $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e_n$





$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(mx)$$

$$\|f_n(x)\|_{\infty, \mathbb{R}} = \frac{1}{n}$$

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} 0$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Le derivate non convergono

$$f'_n(x) = \cos(mx)$$

NON CONVERGE

$$\|f'_n(x)\| = 1$$

Se convergesse dovrebbe convergere unif a 1

Se la fone $f: f'_n \xrightarrow{\text{unif}} f \Rightarrow \|f\|_{\infty} = 1$ f continua

Se $\|f_n - f\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|f_n\| \rightarrow \|f\|$

$$\int_a^b f'_n(t) dt = f_n(b) - f_n(a) \rightarrow 0$$

$\downarrow$

$$\int_a^b f$$

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \quad \forall a, b$$

$$\|f\|_{\infty} = 1$$