

$$= \frac{a}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega_k a)}{k\pi} \cos(\omega_k t) - \frac{\cos(\omega_k a) - 1}{k\pi} \sin(\omega_k t)$$

249

in complesso

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2k\pi} \left(e^{-i\omega_k a} - 1 \right) e^{i\omega_k t}$$

$$c_k \sim \frac{1}{k}$$

NON CONVERGIZ

la funzione di potenza non è continua

$\Rightarrow$ la convergenza non può essere uniforme x.e. la serie

di funz. continue non è continua

x.e. $\left[\sum \frac{1}{k} \right] = +\infty$ (non è sommabile)

$$\sum |c_k|^2 < +\infty \quad \nRightarrow \quad \sum |c_k| < +\infty$$

questo implicherebbe che la funz. è continua

Osservazione: se parta da c_k tale che $\sum |c_k| < +\infty \Rightarrow$
 $\Downarrow \quad \Uparrow$
 $\sum |c_k|^2 < +\infty$

$f = \sum c_k f_k$ È CONTINUA E $[f_n \rightarrow f]$ UNIFORMEMENTE

infatti $\left[\sum \|c_k e_k\|_{\infty} \right] = \sum \|c_k\|_{\infty} = \sum |c_k|$

deve venire una serie a quadrato sommabile ma non sommabile
 x.e. altrimenti avremmo convergenza uniforme.

$$f: [0, T]$$

$$L^2(0, T)$$

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_k e^{i\omega_k t} \quad \tilde{c}_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt$$

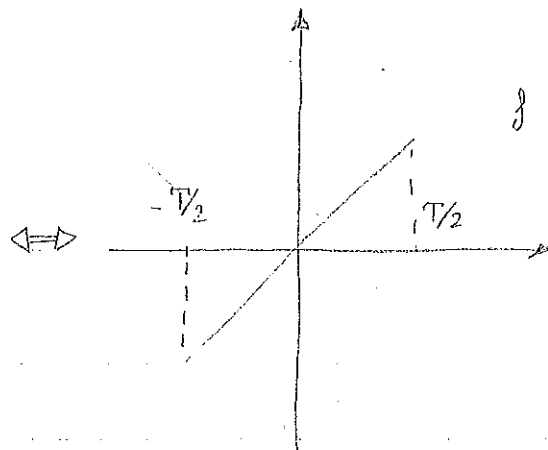
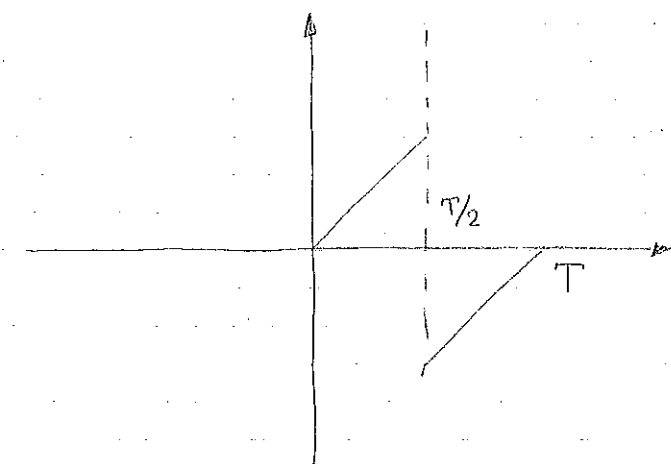
non potremo dire $\sqrt{T}$

$$\tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos(\omega_k t) + \tilde{b}_k \sin(\omega_k t)$$

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} f(t) \cos(\omega_k t) dt$$

$$\tilde{b}_k = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} f(t) \sin(\omega_k t) dt$$



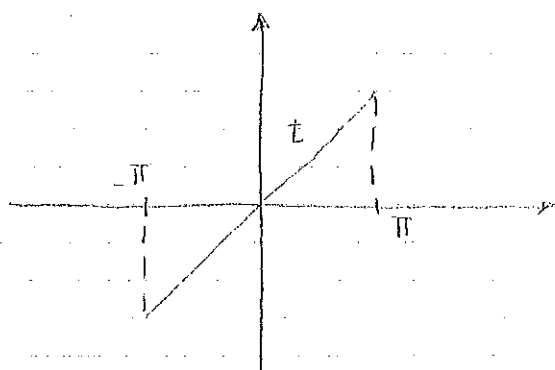
CASO

$$T = 2\pi$$

$$\omega = 1$$

$$f(t) = t \quad \text{per } -\pi < t < \pi$$

funzione di periodo 2π



WWW.INGONLINE.DIZ

$$fG - f'G$$

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i\omega_k t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-i\omega_k t} dt = \text{(per parti)}$$

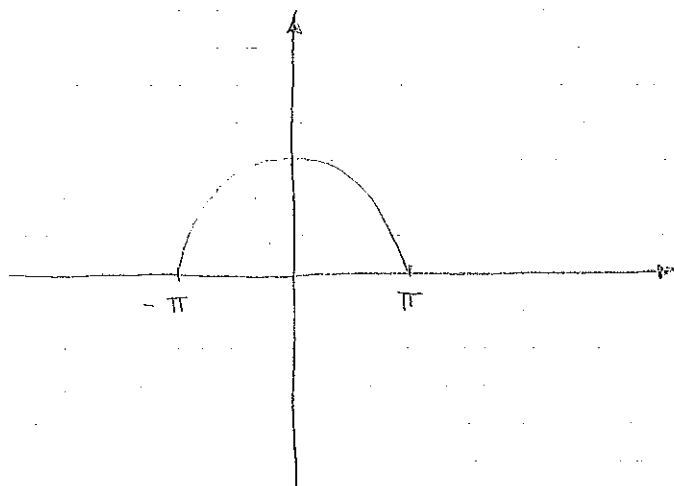
$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t e^{-i\omega_k t}}{-i\omega_k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi i\omega_k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega_k t} dt = \frac{1}{2\pi i} 2\pi e^{-i\omega_k \pi}$$

$$= \frac{i}{k} e^{-i\omega_k \pi} = \frac{(-1)^k i}{k}$$

$$f(t) = -t^2 + \pi^2$$

$$-\pi \leq t \leq \pi$$

253



$$\tilde{c}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2) e^{-ikt} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(\pi^2 - t^2) e^{-ikt}}{-ik} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \frac{-2}{-ik} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-ikt} dt$$

$$\parallel$$

$$0 \quad (\pi^2 - t^2 = 0)$$

$$\ln \pi e^{-\pi}$$

WWW.MICOMI.NET.DZ

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{-ik} \left[\frac{t e^{-ikt}}{-ik} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(-ik)^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} dt$$

$\parallel 0$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{-k^2} 2\pi e^{-ik\pi} = \left[-\frac{2}{k^2} (-1)^n \right]$$

$$\tilde{c}_k = -\frac{2}{k^2} (-1)^n$$

(fun réel)

funz. PAIR

$$\tilde{c}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2) dt = \frac{1}{2\pi} \left[\pi^2 t - \frac{t^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$\frac{2}{2\pi} \left[\pi^3 - \frac{\pi^3}{3} \right] = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$f \in L^2 \iff \sum |c_n|^2 < +\infty$$

$$f \text{ continua} \iff \sum |c_n| < +\infty$$

$$f(0) = f(T)$$

$$f \in C^1 \iff \sum |n c_n| < +\infty$$

$$f \text{ derivabile in senso di } L^2 \iff \sum |n c_n|^2 < +\infty$$

Se f ha derivata nel senso di $L^2 \Rightarrow f$ CONTINUA e $f(0) = f(T)$

infatti $\sum |n c_n|^2 < +\infty \Rightarrow \sum |c_n| < +\infty$ PERCHÉ

$$|c_n| = \frac{n|c_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(n^2 |c_n|^2 + \frac{1}{n^2} \right) \rightarrow \text{2 serie sommabili}$$

Dente di sega no! x ke' una e^- continua

WWW.INGONLINE.BIZ

$$f_1(t) = \pi^2 - t^2$$

$$-\pi \leq t \leq \pi$$

$$f_1 = \sum \frac{-2(-1)^n e^{im\pi}}{m^2} + \frac{2}{3} \pi^2$$

$$\frac{2}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4(-1)^n}{m^2} \cos(mt) = f_1(t)$$

vali + part

Visto che $\sum |c_n| < +\infty \Rightarrow f_1$ continua

e $\sum \rightarrow f$ uniformemente e dunque puntualmente.

Mettiamo $t=0 \Rightarrow \pi^2 = \frac{2}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4(-1)^n}{m^2} \iff$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$y_m = -\frac{f_m}{\omega^2 m^2}$$

(y_0 qualunque)

$y_0 = 0$ se impone $y = 0$ 259

Vediamo di capire meglio

Prendo y_m come sopra

$$y = y_m e^{im\omega t}$$

$$y_m = -\frac{f_m}{\omega^2 m^2}$$

??
 $m=0$

$$(f = \sum_{m=0} f_m e^{im\omega t})$$

WWW.INGONLINE.IT

$$y = \sum (-\omega^2 m^2) y_m e^{im\omega t} = \sum f_m e^{im\omega t} \iff -\omega^2 m^2 y_m = f_m$$

$f_0 = 0$
impone

Se voglio risolvere con questo sistema devo imporre che $f_0 = 0$

IPOTESI (con i quali definire i coefficienti)

Prendo

$$y = \sum y_m e^{im\omega t}$$

coefficienti
della serie
in serie di Fourier

MI DEFINISCE una funzione

C^1 PERIODICA

$$(\exists y' \text{ cont. e } y'(0) = y'(\tau))$$

$$\sum |m \cdot y_m| < +\infty$$

||

$$\frac{1}{\omega^2} \sum \frac{f_m}{m} \leq \frac{1}{2\omega^2} \sum \left(|f_m|^2 + \frac{1}{m^2} \right) < +\infty$$

funzione C^1 ma non C^2

CONTINUA

DERIVABILE

PERIODICA

DERIVATA PERIODICA

$$y = \sum y_m e^{im\omega t}$$

Inoltre

$$(\ddot{y} = f)$$

NEL SENSO DELL'ENERGIA (la serie delle

derivate seconde converge a f in energia)

Dm. f, f' continue ($\Rightarrow$ entrambe L_2) :

261

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k \quad ; \quad f' = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k e_k$$

$$c_k = \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt \quad \text{integrando per parti}$$

/ per normalizzare

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{T}} \left[\frac{f(t) e^{-i\omega_k t}}{-i\omega_k} \right]_0^T}_{\parallel 0} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{i\omega_k} \int_0^T f'(t) e^{-i\omega_k t} dt}_{\parallel}$$

$\times k \in \mathbb{Z}$ la funzione f è periodica

$$\frac{y_k}{i\omega_k}$$

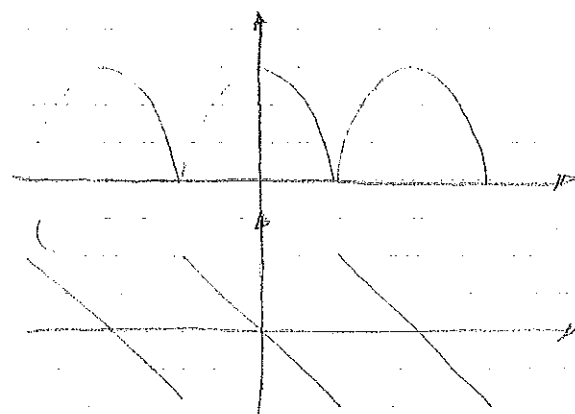
$$c_k = \frac{y_k}{i\omega_k}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\sum |c_k|^2 = \frac{1}{\omega^2} \sum |y_k|^2 < +\infty$$

$f \in L_2$ derivabile

$$\underbrace{f'}_{(L_2)} = \sum i\omega_k c_k e_k = \sum y_k e_k = f'$$



ok!

no!

$$\underline{\dot{u}} = \left[\sum \gamma_k i\omega k e_k \right]$$

$$\underline{\ddot{u}} = \left[\sum \gamma_k (-\omega^2 k^2 e_k) \right]$$

$$\underline{\ddot{u}} + \mu \underline{\dot{u}} + \lambda \underline{u} = \sum_k \gamma_k (-\omega^2 k^2 + i\omega k \mu + \lambda) e_k = \sum c_k e_k$$

$$\gamma_k (-\omega^2 k^2 + i\omega k \mu + \lambda) = c_k$$

$$\textcircled{1} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

cerco $\underline{u}$ tale che $\underline{u}$ derivabile 2 volte nel senso di L^2 e vale l'equazione

1) se $\underline{u}$ è soluzione vale $\textcircled{1}$

$$\underline{u} = \left[\sum \gamma_k e_k \right]$$

$$\underline{\dot{u}} = \sum \gamma_k i\omega k e_k$$

$$\underline{\ddot{u}} = \sum \gamma_k (-\omega^2) k^2 e_k$$

$$\underline{\ddot{u}} + \mu \underline{\dot{u}} + \lambda \underline{u} = \left[\sum \gamma_k (-\omega^2 k^2 + i\omega k \mu + \lambda) \right]$$

$$\gamma_k (-\omega^2 k^2 + i\omega k \mu + \lambda) = c_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

(2a)

se $\forall k \quad -\omega^2 k^2 + i\omega k \mu + \lambda \neq 0$

Trovo

$$\gamma_k = \frac{c_k}{-\omega^2 k^2 + i\omega k \mu + \lambda}$$

(UNICA POSSIBILITÀ DI TROVARE $\underline{\gamma}$)

↓
A sono al max 2 interi che annullano denominatore

Se poi $\sum |c_k| < +\infty \Rightarrow u$ CONTINUA

e $\ddot{u} = \sum \frac{-\omega^2 k^2 c_k}{-\omega^2 k^2 + i\omega k \mu + \lambda} e_k$

(unif)

Senso generalizzato dell'equazione

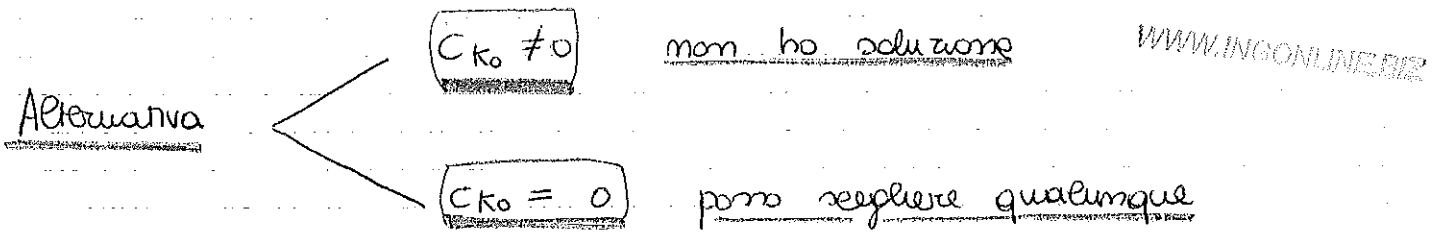
$\forall f \exists!$ soluzione u

Se f è regolare $\Rightarrow u$ soluzione classica

$y_k (-\omega^2 k^2 + i\omega k \mu + \lambda) = c_k$

Se c'è k_0 tale che annulla (questa) $\Rightarrow c_{k_0} = 0$

ALTRIMENTI NON C'È SOLUZIONE



$u = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq k_0 \\ k \neq k_1}} \frac{c_k}{-\omega^2 k^2 + i\omega k \mu + \lambda} + y_0 e_{k_0} + y_1 e_{k_1}$

$y_1, y_0 \in \mathbb{C}$

Come un'eq. lineare

$Lu = \ddot{u} + \mu \dot{u} + \lambda u$ $Le_k = (-\omega^2 k^2 + i\omega k \mu + \lambda) e_k$

Caso particolare

$-\omega^2 k^2 + \lambda = 0 \quad \omega=1 \Rightarrow \lambda = k^2$

f a valori reali, cerco u a valori reali $\mu=0$

$\ddot{u} + \lambda u = f$ u periodica di periodo 2π Ha soluzione $\forall f$

So che u esiste unica se $\boxed{\tilde{\omega}^2 k^2 \neq \lambda} \quad \forall k$

267

$$\left(\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \tilde{\omega} = \frac{\pi}{T} \right)$$

$$\lambda \neq k^2 \frac{\pi^2}{T^2}$$

$$\boxed{-\omega^2 k^2 + \lambda \neq 0}$$

$$u = \sum \frac{c_k}{-\omega^2 k^2 + \lambda} e_k$$

$$\tilde{e}_k(t) = e^{i\tilde{\omega} k t}$$

$$c_k = \int_{-T}^T f(t) \tilde{e}_k(t) dt$$

$\boxed{c_k}$ immaginaria pura

poiché $(-\omega^2 k^2 + \lambda)$ reali

$$\boxed{\frac{c_k}{-\omega^2 k^2 + \lambda}}$$

immaginaria pura

Anche lei u esiste in soli semi

WWW.INCONLINE.IT

$$u = \sum y_k \tilde{e}_k$$

dove y_k immaginaria pura

$$-u, u' \text{ continue e } \sum y_k \tilde{e}_k \xrightarrow{\text{anif}} \underline{u} \quad \left(\begin{array}{l} a_k = 0 \\ \forall k \end{array} \right)$$

$$\sum b_k \sin(\tilde{\omega} k t) = \sum b_k \sin\left(\frac{\pi}{T} k t\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(0) = u(T) = 0}$$

Inoltre $\frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \|f\|_2^2 = \int_0^T f^2(t) dt$

b) VICEVERSA DATI DEI (u_k) ta che

$\sum u_k^2 < +\infty \Rightarrow$ ESISTE $f \in (L_2) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k S_k$

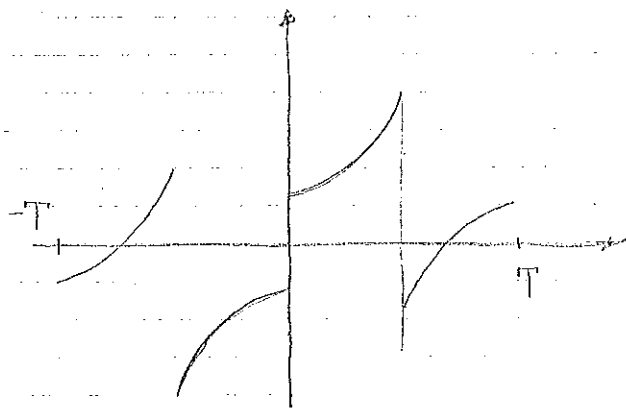
Inoltre se applico la parte (a) ad f trovo gli stessi (u_k)

Corrispondenza tra $f \in L^2 \leftrightarrow u_k : \sum u_k^2 < +\infty$

WWW.INGONI.INGEGRIE

Dimostrazione: Data f definisco

$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & [0, T] \\ -f(-t) & [-T, 0] \end{cases}$



per Fourier

$\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\omega_k t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega_k t)$

dato che $\tilde{f}$ dispari $\Rightarrow a_k = 0, \forall k$

$f \in (L^2) = \sum b_k \sin(\omega_k t) \quad b_k = \frac{2}{2T} \int_{-T}^T \tilde{f}(t) \sin(\omega_k t) dt$

$= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_k t) dt = a_k \quad \left| \begin{array}{l} \frac{T}{2} \sum a_k^2 = \int f^2 \\ \text{segue da } \sum c_k^2 = \int f^2 \end{array} \right|$

$$\begin{cases} u'' + \lambda u' = f & \text{su } [0, \pi] & (\omega = 1) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

Dove sono dati $\lambda \in \mathbb{R}$ $f \in L^2(0, \pi)$,

- Chiamo soluzione di (P) una funzione u che sia derivabile
e volte nel senso di L^2 nulla al bordo $(u = \sum a_m s_m \text{ con } \sum |m^2 \cdot a_m|^2 < +\infty)$

oè che valga l'equazione

TEOREMA, (P) ha soluzione $\forall f \in L^2(0, \pi)$

$\Leftrightarrow \lambda \neq k^2 \quad \forall k \text{ intero}$

se invece

$$\lambda = k_0^2$$

(P) ha soluzione se e solo se $\Leftrightarrow$

$$\int_0^\pi f \sin(k_0 t) dt = 0$$

e in tal caso u non è unica

$$\text{con } \int u_0 \cos(k_0 t) dt = 0, \quad u = u_0 + c \sin(k_0 t), \quad c \in \mathbb{R}$$

Insomma $u \in C^{1,1}$ $u(0) = u(\pi) = 0$

se poi a como ipotesi più forti su f $\sum |f_m| < +\infty$
 $u \in C^2$ e vale l'equazione

$$c_k(0) = \frac{1}{L} \int_0^L u_0(x) e^{-i\omega_k x} dx = c_k$$

273

$$\Rightarrow u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-\omega^2 k^2 t} e^{i\omega_k x}$$

CANDIDATO
SOLUZIONE *

PROBLEMA: Mi chiedo se $\boxed{x}$ ha senso e in che senso risolve il problema

(I) $\forall t \geq 0$ $x \mapsto u(t, x)$ ha senso in L^2

PERCHÉ

$$\boxed{u(t, x)} = \sum c_k(t) e^{i\omega_k x}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$e \sum |c_k(t)|^2 < +\infty \quad (|c_k(t)| \leq |c_k|)$$

$$\sum |c_k|^2 \quad (\text{basta sapere } \boxed{u_0} \in L^2(0, L))$$

(II) Se $\boxed{t > 0}$ $\sum |c_k(t)| k^m < +\infty \quad \forall m$

Infatti

$$\boxed{c_k \leq \bar{C}}$$

$$c_k(t) \leq \bar{C}_1 \left(e^{-\omega^2 t} \right)^{k^2}$$

$$\text{fatto } \boxed{A < 1}$$

$$\sum A^k k^m < +\infty$$

e con k^2 ancora meglio

funzione derivabile di qualunque ordine

$\Rightarrow$ se $t > 0$ $x \mapsto u(t, x)$ è INFINITAMENTE DERIVABILE

$$e \frac{\partial^m}{\partial x^m} = \sum \frac{\partial^m}{\partial x^m}$$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0) = u(t) = 0 \end{cases}$$

Risultati analoghi.

$$(u(t, x) \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow \infty$$

WWW.KINGONLINE.BIZ

ALTRI RISULTATI SULLA CONVERGENZA DELLA SERIE

Data f in che senso $f(t) = \sum c_k e_k(t)$

- Se f è continua non è detto che valga la formula (F) per t

- Se f è (continua e regolare) a tratti *

$$\Rightarrow \forall t \quad f_m(t) \rightarrow \frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

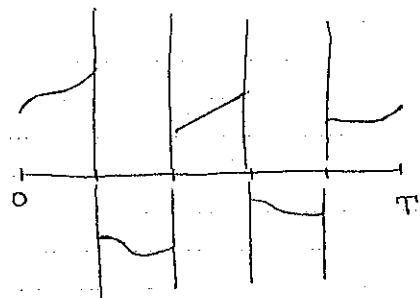
* e sono $t_1, \dots, t_m$ punti in $[0, T]$

in $\forall [t_1, t_m]$ f è continua e derivabile

$$f \leq \text{cost}$$

- Se $f \in C^1$

$$f_m \xrightarrow{\text{unif}} f$$



$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(f(y) e^{-iyt} \right)}_{\hat{f}(y)} e^{-iyt} dy$$

$\omega \rightarrow 0$
 $T \rightarrow \infty$

Suggerisco di considerare

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx} dx$$

er di nuovo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{\omega}(y) dy$$

$$F_{\omega}(y) = \left(\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) e^{-i\omega k x} dx \right) e^{i\omega k t}$$

WWW.INGONLINE.RIZ

$$k\omega < y < (k+1)\omega$$

quando $\omega \rightarrow 0$ $\omega k \rightarrow a$ essere y $\frac{\pi}{\omega} \rightarrow +\infty$ $-\frac{\pi}{\omega} \rightarrow -\infty$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{iyt} dy$$

TRASFORMATA DI FOURIER

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$\gamma: L^1 \rightarrow C_B$ (funzione continue e limitata)

279

γ continua se $f_n \xrightarrow{L^1} f \Rightarrow \gamma(f_n) \xrightarrow{unif} \gamma(f)$

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_{\infty} \leq \|f_n - f\|_{L^1}$$

3)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{f}(w) = 0$$

γ è LINEARE

$$\gamma(\lambda f + \mu g) = \lambda \gamma(f) + \mu \gamma(g)$$

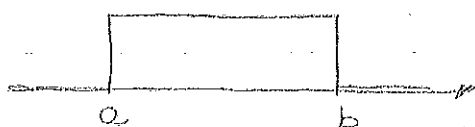
vediamo da casi particolari

$$f(t) = \mathbb{1}_{[a,b]}$$

dove

WWW.LINGONLINE.IT

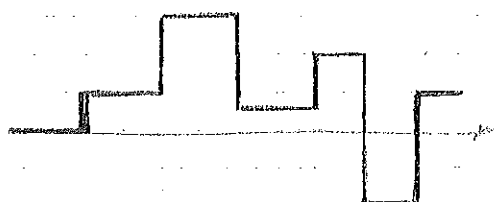
$$\mathbb{1}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{se } t \notin [a,b] \end{cases}$$



$$\hat{f}(w) = \int_a^b e^{-iwt} dt = \left[\frac{e^{-iwt}}{-iw} \right]_a^b = \frac{e^{-iwb} - e^{-iwa}}{-iw} \xrightarrow{w \rightarrow \infty} 0$$

Se più in generale $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{[a_k, b_k]}$

$$\Rightarrow \hat{f}(w) \xrightarrow{w \rightarrow \infty} 0$$



$$\hat{f}(w) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \widehat{\mathbb{1}_{[a,b]}}(w)$$

$$\widehat{f}(\omega) = i\omega \widehat{f}'(\omega)$$

Se $f \in L^1, f' \in L^1$

Più generale se $f^{(k)} \in L^1$

$$\widehat{f^{(k)}}(\omega) = (i\omega)^k \widehat{f}(\omega)$$

Conseguenza se $f^{(k)} \in L^1$

$$\omega^k \widehat{f}(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$$

se $k=2 \Rightarrow \widehat{f} \in L^1 \quad (|\widehat{f}| \leq \frac{\cos t}{\omega^2})$

$k=1$ non basta per $\widehat{f} \in L^1$ ($\frac{1}{\omega}$ non basta)

WWW.INGONLINE.BIZ

$$f = \frac{1}{1+t^2}$$

ha infinite derivate

$$\omega^k \widehat{f}(\omega) \rightarrow 0$$

Più la funzione è regolare meno caotica le frequenze alte)

(Più f è sommabile più $\widehat{f}$ è regolare)
(Più f è regolare più $\widehat{f}$ è sommabile)

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\frac{t}{1+t^2} \in L^1, \text{ in effetti}$$

$$\widehat{f}(\omega) = -\pi e^{-|\omega|}$$

NON è C^1 in zero

NOTA

Se f derivabile, $f' \in L^1$
 $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$

Dim Basta far vedere che esiste

283

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

$$\Rightarrow f = 0 \text{ dato che } f \in L^1$$

ma scrivere

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(y) dy$$

dat t_1, t_2

$$f(t_2) - f(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f'(y) dy$$

$$\Rightarrow |f(t_2) - f(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f'(y)| dy$$

dato che $|f'| \in L^1 \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{T}$ tale che $t_1, t_2 > \bar{T}$

$$|f(t_2) - f(t_1)| < \varepsilon, \quad (f(t) \text{ è di Cauchy}) \Rightarrow \exists \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

OSO ANCHE SCRIVERE

WWW.MATHSINTELLIGENCE.IT

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t f'(y) dy \quad (\text{mando } t_0 \rightarrow \infty)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^t f'(y) dy \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f'(y) dy = 0$$

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega) \quad \text{se } f, f' \in L^1$$

Supponiamo di avere (f_n) funzioni derivabili $f_n \xrightarrow{L^1} f, \quad f'_n \xrightarrow{L^1} g$

$$f_n \xrightarrow{UNI} f, \quad f'_n \xrightarrow{UNI} g \Rightarrow \widehat{g}(\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega) \quad \boxed{g} = \text{derivata in senso } L^1 \text{ di } f_n$$

per parti)

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t) \varphi(t) dt \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t) \varphi'(t) dt$$

285

0 x re $\varphi = 0$ fuori da
 $[-m, m]$

Passo al limite e ottengo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi'(t) dt$$

$\forall \varphi \in C^1_{\text{compatto}}$

WWW.LINGONI.IT/EDIZIONE

Una volta fatto questo si individua un'unica f .

Questa relazione individua un'unica f (A meno di un quasi ovunque).

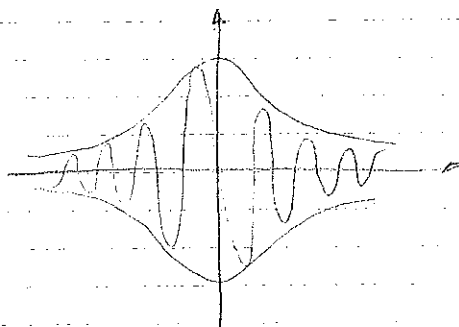
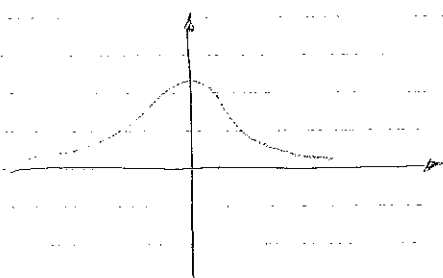
Se ce ne fossero 2 $\int (f_1 - f_2) \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C^1_{\text{comp.}}$

$\Rightarrow f_1 - f_2 = 0$ quasi ovunque

Dimostrate se $f' \in L^1 \Rightarrow \hat{f}'(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$

Sia $f \in L^1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(\omega t) dt = \delta(\omega) \rightarrow 0 \text{ se } |\omega| \rightarrow \infty$$

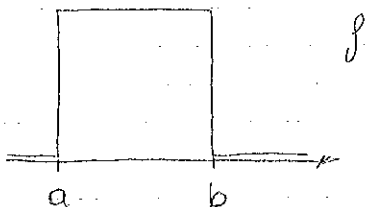


WWW.INGOMLINE.BIZ

Dimostrazione

1-
200 m. eu

$$1_{[a,b]} = f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{se } t \notin [a,b] \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(\omega t) dt = \int_a^b \operatorname{sen}(\omega t) dt = \left. -\frac{\cos \omega t}{\omega} \right|_a^b = \frac{-\cos \omega b + \cos \omega a}{\omega}$$

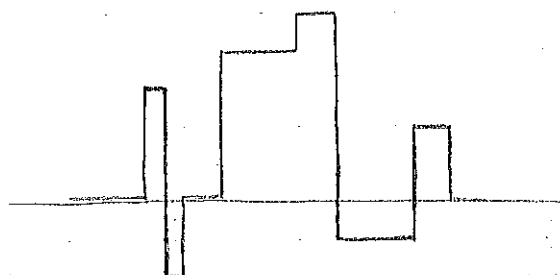
↓
0

si compensano (area sotto e sopra)

2-

$$\sum c_i 1_{[a,b]}$$

funzione costante a tratti



l'integrale ha senso $\forall \boxed{w \neq 0}$ perché

$$\left| \frac{\sin(wt)}{t} \right| \leq w$$

Dim. Ricordiamo che

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin(wx)}{x} dx = \boxed{\pi}$$

WWW.INGOONLINE.IT

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(wx)}{x} dx$ non esiste nel senso di Lebesgue

perché il modulo non è integrabile $\Rightarrow \left| \frac{\sin(wx)}{x} \right| \Rightarrow +\infty$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{R}{w}}^{\frac{R}{w}} \frac{\sin(y)}{y} dy = \pi = \frac{1}{2} 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) \sin(wt)}{t} dt = \int_{-R}^R (f(t) - f(0)) \frac{\sin(wt)}{t} dt +$$

$$+ \int_{|t| > R} f(t) \frac{\sin(wt)}{t} dt + f(0) \int_{-R}^R \frac{\sin(wt)}{t} dt$$

$$\int_{-R}^R \frac{\sin(wt)}{t} dt \quad \begin{aligned} wt &= y \\ t &= \frac{y}{w} & dt &= \frac{dy}{w} \end{aligned}$$

$$\int_{-wR}^{wR} \frac{\sin y}{y/w} \frac{dy}{w} = \int_{-wR}^{wR} \frac{\sin y}{y} dy$$

Voglio mostrare a dire

$$f_m \xrightarrow{L^2} f$$

294

(a) calcoliamo $\|f_m\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_m(t)|^2 dt$ (può essere)

$$R > 0 \quad \int_{-R}^R |f_m(t)|^2 dt = \int_{-R}^R f_m(t) \overline{f_m(t)} dt =$$

$$= \int_{-R}^R \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-H}^H \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) \overline{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-H}^H \hat{f}(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' \right)} dt$$

$$= \int_{-R}^R \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-H}^H \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-H}^H \overline{\hat{f}(\omega')} e^{-i\omega' t} d\omega' \right) dt$$

$$= \int_{-H}^H \frac{\hat{f}(\omega)}{2\pi} \left(\int_{-H}^H \frac{\overline{\hat{f}(\omega')}}{2\pi} \left(\int_{-R}^R e^{i(\omega-\omega')t} dt \right) d\omega' \right) d\omega$$

FUBINI

WWW.INGONLINE.IT

ci serve che $\hat{f}(\omega') \hat{f}(\omega) e^{i(\omega-\omega')t}$ sia integrabile su $[-H, H] \times [-H, H] \times [-R, R]$

Sono funzioni continue $\Rightarrow$ su un cubo è integrabile

$$\int_{-H}^H \frac{\hat{f}(\omega)}{2\pi} \left(\int_{-H}^H \frac{\overline{\hat{f}(\omega')}}{2\pi} \frac{\sin(\omega-\omega')R}{\omega-\omega'} d\omega' \right) d\omega$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

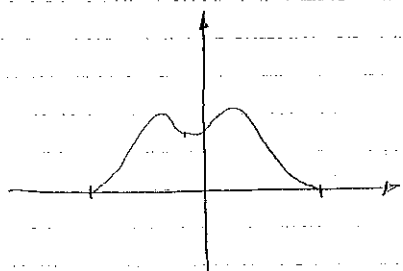
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad ??$$

Dato $H > 0$

$$f_H(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-H}^H \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (H \rightarrow \infty, f_H \text{ dovrebbe tendere a } f)$$

$$f \in L^2$$

NULLA FUORI DA UN INTERVALLO



WWW.INGONLINE.BIZ

Gia' visto (1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_H(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-H}^H |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \Rightarrow \forall H, f_H \in L^2(\mathbb{R})$$

osservazione: non conta che $\hat{f}$ sia la trasformata - Data p derivabile

$$f_H(t) = \int_{-H}^H p(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f_H|^2 = \int_{-H}^H |p(\omega)|^2 d\omega$$

$$\int_{-R}^R f_H(t) \overline{f_H(t)} dt = \int_{-R}^R \left(\int_{-H}^H p(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) \left(\int_{-H}^H \overline{p(\omega')} e^{-i\omega' t} d\omega' \right) dt =$$

Ne segue che

$$(f - f_n, f_n) = 0$$

$$\Rightarrow \|f\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f_n\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-H}^H |\hat{f}(w)|^2 dw$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-H}^H |\hat{f}(w)|^2 dw \leq \|f\|_2^2 \quad \boxed{VH}$$

$$\Rightarrow \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \quad e \quad \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$$

www.indoonline.it

VALE $\iff$

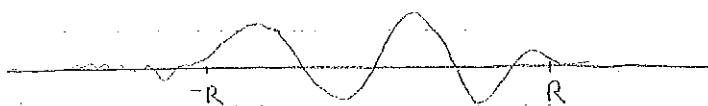
$$\Rightarrow \hat{f} \in L^2 \quad e \quad \|\hat{f}\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_2$$

$$f_n \xrightarrow{L_2} f$$

$$\|f\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2^2 + \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2$$

CONSEGUENZA

Dato $f \in L^2(\mathbb{R})$ posso definire la sua trasformata $\hat{f}$
 Scelgo una qualunque successione f_n di funzioni L^2 , nulle
 fuori da un intervallo con $f_n \xrightarrow{L_2} f$



trasformata è una applicazione

bijettiva, lineare, continua

2/7

$$L^2 \longleftrightarrow L^2$$

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \longleftrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$\mathcal{F}$ lineare

$$\| \mathcal{F}f \|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \| f \|_2$$

$\mathcal{F}$ invertibile

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\tilde{f})$$

dove $\tilde{f}(\omega) = f(-\omega)$

WWW.ONLINE.BIZ

$$f_H \xrightarrow{L_2} f$$

$$\int_{-H}^H \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-H}^H \hat{f}(-\omega) e^{-i\omega t} \quad (H \rightarrow +\infty)$$

Se f è molto compatta la trasf. è molto regolare e viceversa

Se $\hat{f}$ è molto compatta $\Rightarrow f$ è MOLTO REGOLARE

$$\text{Se } t^k f \in L^1 \Rightarrow \hat{f}^{(k)} \in L^1$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x^2} & \text{su } \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{DATA} \end{cases} \quad u(t, x) \text{ è "zero all'infinito"}$$

poniamo invece al posto di questa

$$x \mapsto u(t, x) \in L^2(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow$

D'altra parte

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\omega^2 t} \hat{u}_0(\omega) \right) = -\omega^2 e^{-\omega^2 t} \hat{u}_0(\omega)$$

299

poiché è integrabile pono derivare sotto forma di integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-\omega^2 e^{-\omega^2 t} \hat{u}_0(\omega)) d\omega$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x)$$

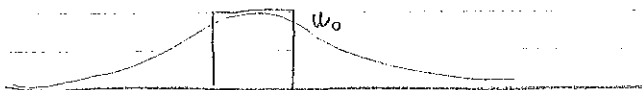
$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, u(t, x)$ è C^∞ e verifica l'equazione
(anche se u_0 non è regolare)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0$$

WWW.ONLINE.BIZ

$u \neq 0$ quasi
per $\forall x$

$u(t, x) \neq 0$
quasi ogni x



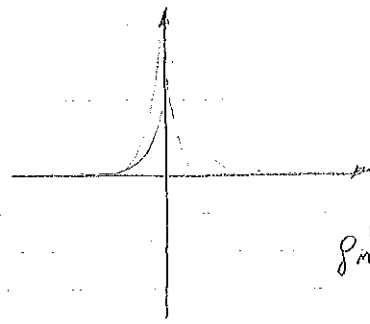
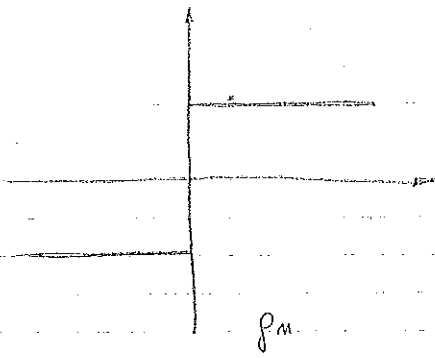
Se $t \rightarrow 0$ chiamiamo $u_t(x) = u(t, x)$

$$\|u_0 - u_t\|_2 \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|u_0 - u_t\|_2 = 0$$

Se $\hat{u}_0(\omega)$ è INTEGRABILE $\Rightarrow u_0$ CONTINUA

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \|u_0 - u_t\|_\infty \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{(t,x) \rightarrow (0,x_0)} u(t,x) = u_0(x_0)$$



f_n' non è zero

Non ha derivata in senso di L^1

Se f ha derivata kesima in $L^2 \Rightarrow \omega^k \hat{f} \in L^2$

$$\hat{f^{(k)}} = (i\omega)^k \hat{f}$$

NOTA SE f HA DERIVATA IN $L^1/L^2 \Rightarrow f$ CONTINUA

ANZI si può vedere che $p(t) = p(0) + \int_0^t p'(s) ds$

$\Rightarrow$ se $\omega \hat{f} \in L^2$ ($\omega^2 \hat{f}^2 \in L^2$)

$\Rightarrow f$ CONTINUA (perché f ha derivata in L^2)

Si possono dimostrare per approssimazione

WWW.INGONLINE.IT

$f \in L^2$, t_0 $f_{t_0}(t) = f(t-t_0)$
(f traslata di t_0)

$\Rightarrow \mathcal{F}(f_{t_0}) = ?$

Se $(f \in L^2)$ $\hat{f}_{t_0}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\omega(s+t_0)} ds$

$\mathcal{F}(f(t-t_0)) = e^{-i\omega t_0} \mathcal{F}(f)$

$f \in L^1$ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 t} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt$

Trovo una sola soluzione

(MODO UNIVOCO)

303

$$\begin{cases} y'' + y = b \\ y \in L^2 \end{cases}$$

$$\hat{y} (-\omega^2 + 1) = \hat{b}$$

si annulla in $\underline{1}$ e $\underline{-1}$

$$\hat{y} = \frac{\hat{b}}{\omega - \omega^2} \in L^2 \text{ in generale}$$

Now posso risolvere per qualunque b . Non c'è soluzione in L^2 se non chiedo altro su b .

ci serve che $\frac{\hat{b}(\omega)}{1 - \omega^2} \in L^2 \approx \hat{b}(1) = \hat{b}(-1) = 0$

PER ESEMPIO SE $(\hat{b} \in C^1)$ e $t^2 b(t) \in L^2$ $\hat{b}(1) = \hat{b}(-1) = 0 \Rightarrow \text{ok!}$

$$\hat{b}(\omega) \approx \hat{b}'(1)(\omega - 1) \text{ VICINO A } 1$$

CONDIZIONE SUFFICIENTE

non devono avere componenti su quella frequenza

$$\mathcal{L}\{f\}(x+iy) = \int_0^\infty f(t) e^{-(x+iy)t} dt$$

$$\int_0^\infty f(t) e^{-xt} e^{-iyt} dt$$

se prima o poi diventa integrabile

PROPRIETÀ: Se $z \in D(f) \Rightarrow$

per ogni z con $\boxed{\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0}$

$z \in D(f)$

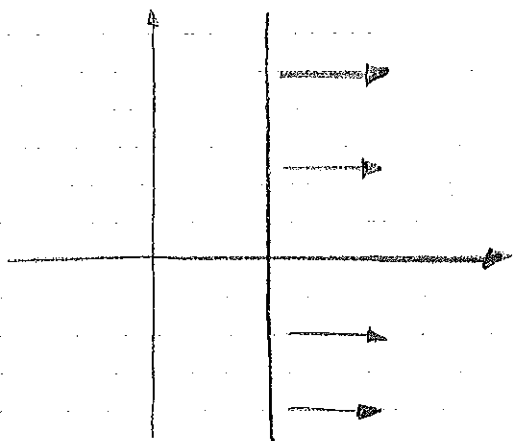
DIMOSTRAZIONE

$$z_0 = x_0 + iy_0 \quad z = x + iy \quad \text{con } x > x_0$$

se so che $\boxed{|f(t)| e^{-x_0 t} \in L^1}$

$$\boxed{|f(t)| e^{-xt}} = \underbrace{(|f(t)| e^{-x_0 t})}_{\in L^1} \underbrace{e^{-(x-x_0)t}}_{\text{limitato a destra di } -H}$$

WWW.ONLINE.BIZ



O tutto $\mathbb{C}$ o an
semipiano o e' insieme
vuoto

DEFINIZIONE: Chiamo asina di convergenza $\boxed{a(f)} = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid |f(t)| e^{-xt} \in L^1\}$
(puo' essere meno infinito, reale, $+\infty$ se non e' sono x)

ALLORA

se

$$\operatorname{Re} z > a(f) \Rightarrow z \in D(f)$$

$$\operatorname{Re} z < a(f) \Rightarrow z \notin D(f)$$

$$\operatorname{Re} z = a(f) \quad \text{NON SI SA}$$

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} t f(t) e^{-zt} dt}_{\parallel} = -\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt$$

ESISTE

309

ESISTE $\Rightarrow$
TEOREMA

vale il teorema di derivazione sotto integrale
 $a = a(f) < +\infty$ $\checkmark$: $\mathbb{R}a \rightarrow \mathbb{C}$ E' OLOMORFA ANZI

$$\left[\frac{d^k}{dz^k} \right] \checkmark(z) = \int_{-\infty(-M)}^{+\infty} (-t)^k f(t) e^{-zt} dt = \left[-t^k f(t) \right](z)$$

$$\left[e^{-t^k f(t) e^{-zt}} \right] \in L^1 \text{ se } \underline{\operatorname{Re}(z) > a(f)}$$

Insomma: $\left[a(t^k(f)) \right] = a(f)$.

Osservazione:

se $\left[|f(t)| \leq k e^{ct} \right]$ per t grande

WWW.MINDONLINE.BIZ

$$\Rightarrow \boxed{a(f) \leq c}$$

$f(t) = \boxed{e^{x^2}}$ $a(f) = +\infty$ non ha trasformata di Laplace

Esempio

$$f(t) = H(t) e^{ct} \quad (c \in \mathbb{C}) \quad H(t) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{ct} e^{-zt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(c-z)t} dt = \left[\frac{e^{(c-z)t}}{c-z} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{c-z}$$

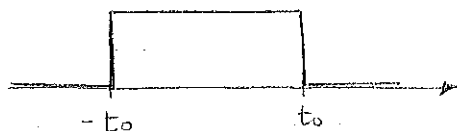
$$\boxed{\operatorname{Re}(c-z) < 0} \Leftrightarrow \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} c = a(f)$$

$$\ddot{y} + a^2 y = b(t)$$

$\exists \text{ in } L^2(\mathbb{R}) \approx y(t) \text{ definita su } \mathbb{R} \text{ "0 all'infinito"}$

$a \in \mathbb{R}$

$b(t)$



$$b(t) = \begin{cases} 1 & -t_0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Problema

1) Esistenza della soluzione

2) Calcolo esplicito

Supponiamo che y ESISTA

$$-\omega^2 \hat{y} + a^2 \hat{y} = \hat{b}$$

$\Rightarrow$

$$\hat{b}(\pm a) = 0$$

CONDIZIONE SU b NECESSARIA

PERCHÉ ESISTA
SOLUZIONE

$$\text{Ani } \hat{b}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-t_0}^{t_0} e^{-i\omega t} dt =$$

$$\left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-t_0}^{t_0} = \frac{e^{-i\omega t_0} - e^{i\omega t_0}}{-i\omega} = \frac{2 \sin \omega T_0}{\omega}$$

$$\sin(a T_0) = 0$$

$$a T_0 = k\pi$$

$$k \in \mathbb{N}$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{\hat{b}(\omega)}{a^2 - \omega^2} = \frac{2 \sin(T_0 \omega)}{\omega (a^2 - \omega^2)}$$

se ha energia
finita posso
trasformare indietro

(2) Calcolo $y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \cos(\tau_0 \omega)}{\omega(a^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} d\omega = 344$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\tau_0+t)\omega} - e^{i(t-\tau_0)\omega}}{i\omega(a^2 - \omega^2)} d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\gamma\omega}}{\omega(a^2 - \omega^2)} d\omega = \frac{1}{2} \sum_{\omega=0, \pm a} \text{Res} \left(\frac{e^{i\gamma\omega}}{\omega(a^2 - \omega^2)}, \omega \right) \quad \gamma \geq 0$$

(attenzione $\uparrow$ va preso nel senso del valore principale)

Se $\gamma < 0$ $-\frac{1}{2} \sum_{\omega=0, \pm a} \text{Res} \left(\frac{e^{i\gamma\omega}}{\omega(a^2 - \omega^2)}, \omega \right) \quad \gamma \geq 0$

$$= \frac{\gamma \sin(\gamma)}{2} \sum_{\omega=0, \pm a} \frac{e^{i\omega\tau}}{a^2 - \gamma\omega^2} =$$

$$\frac{\gamma \sin(\gamma)}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{e^{i\gamma a}}{-2a^2} + \frac{e^{-i\gamma a}}{-2a^2} \right) =$$

$$\frac{\gamma \sin(\gamma)}{2} \left(\frac{1 - \cos(\gamma a)}{a^2} \right) = \underline{h(\gamma)}$$

NOTA $\boxed{h(\gamma)}$ è di classe $\boxed{C^1}$ $\underline{h(0) = 0}$ $\underline{h'(0) = 0}$

$$\cos \gamma a = 1 - \frac{\gamma^2 a^2}{2} + o(\gamma^2)$$

$$\frac{\gamma \sin(\gamma)}{2} \frac{1 - \cos(\gamma a)}{a^2} = \underline{h(\gamma)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\gamma\omega}}{\omega(a^2 + \omega^2)} d\omega$$

$$L(f)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt \quad \begin{array}{l} f \in L^1_{loc} \exists M \text{ s.t. } f(t) = 0 \text{ for } t \leq -M \\ L(f) = \check{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \end{array} \quad \text{per } z \text{ con } \operatorname{Re}(z) > a \quad = \inf \left\{ x : f(t) e^{-xt} \in L^1 \right\} \quad 313$$

teorema di convergenza

Dato $f \in L^1_{loc}$ e olomorfa su $\mathbb{C}$; anzi se $\operatorname{Re} z > a \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) e^{-zt} dt \in L^1$ e $a(Lf) = a(f)$

$$\frac{d}{dz} \check{f}(z) = \check{(-t f)}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} -t f(t) e^{-zt} dt$$

$$\left(\frac{d}{dz} \check{f}(z) \right)^k = \check{(-t)^k f(t)}(z)$$

TEOREMA Supponiamo che f abbia derivata in L^1_{loc} , $f(t) = 0$ per $t < -M$

Esiste $f_n \xrightarrow{L^1_{loc}} f$

$f_n \in C^1 \quad f'_n \xrightarrow{L^1_{loc}} p$

PROPOSIZIONE

$L^1_{loc} \quad [a, b] \quad \forall \quad [a, b]$

$\Rightarrow$ chiamo $p = f'$

ALLORA

$$a(f) = a(f')$$

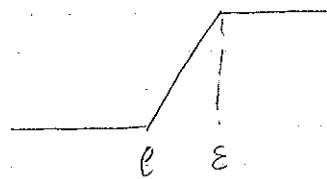
$$e \quad L(f') = z L(f)$$

$$\mathcal{L}(Hf') \longleftrightarrow \mathcal{L}(Hf)$$

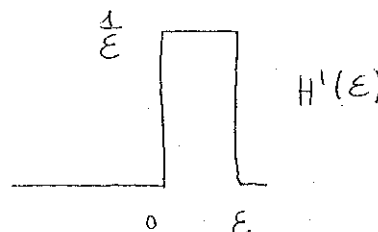
Attenzione $Hf' \neq (Hf)'$ 315

Per vedere cosa viene preso $H_E(t)$

$$H_E \xrightarrow{L^1} H \quad \text{se } E \rightarrow 0$$



$$H'_E = \frac{1}{E} \mathbf{1}_{[0, E]} \quad (\text{nel senso di } L^1)$$



$$p_E = [H_E f]$$

$$p'_E = [H'_E f + H_E f']$$

WWW.ONLINEBIZ

$$\mathcal{L}(p'_E) = \boxed{\mathcal{L}(H'_E f)} + \boxed{\mathcal{L}(H_E f')} \xrightarrow{L} \mathcal{L}(Hf')$$

$$z \mathcal{L}(p_E)$$

$$\xrightarrow{\parallel} z \mathcal{L}(H_E f) \xrightarrow{E \rightarrow 0} z \mathcal{L}(Hf)$$

Vediamo cosa succede della $\mathcal{L}(H'_E f)(z) = \frac{1}{E} \int_0^E f(t) e^{-zt} dt$

(NOTA, se $f' \in L^1 \Rightarrow f$ continua)

valore dell'integrando
in $t=0 = f(0)$

$$\rightarrow [f(0)]$$

$$\text{Se } |a(f)| < +\infty \Rightarrow \boxed{\check{f}(z) \rightarrow 0} \text{ se } \operatorname{Re}(z) \rightarrow +\infty$$

Inoltre

$$\check{f}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-xt} e^{-iyt} dt$$

$$F(t, z) = F(t, x, y)$$

se $z = x + iy$

Fissiamo $t > 0$ (e $y \in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow \boxed{F(t, x, y) \rightarrow 0} \text{ se } x \rightarrow +\infty$$

Smelte

$$|F(t, x, y)| \leq |f(t)| e^{-xt} = |f(t)| e^{-x_0 t} \in L^1$$

se $x_0 > a(f)$

$\Rightarrow$ APPLICO IL TEOREMA DELLA CONVERGENZA DOMINATA DI LEBESGUE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, x, y) dt = 0$$

WWW.ONLINE.BIZ

$$f \in L^1_{loc}, \quad f' \in L^1_{loc}, \quad a(Hf') < +\infty$$

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} z (Hf)(z) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (Hf)(t) = f(0)$$

$\rightarrow$ Dato che f è continua in 0

(TEOREMA DEL VALORE INIZIALE)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t_0) |t| e^{-zt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(t-t_0)}_{\gamma} e^{-zt} dt = e^{z(t_0 + \dots)} \quad 319$$

$$e^{-t_0 z} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\gamma) e^{-z\gamma} d\gamma = \boxed{e^{-t_0 z} \check{f}(z)}$$

- CONPORTAMENTO RISPETTO ALLA MOLTIPLICAZIONE PER $e^{-z_0 t}$

se z_0 è un num. complesso $\boxed{a(e^{z_0 t} f(t))} = \boxed{a(f) + \operatorname{Re}(z_0)}$

$$e \quad \boxed{\mathcal{L}(e^{z_0 t} f(t))} = \boxed{\mathcal{L}(f)(z - z_0)}$$

DIM.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t) e^{-zt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-(z-z_0)t} dt$$

$$f \rightarrow \mathcal{L}(f) = \check{f}$$

Possiamo tornare indietro ?

$$\check{f}(x + iy) = \check{f}_x(y)$$

dove $\boxed{f_x(t)} = f(t) e^{-xt}$

$$\hat{f}_x(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t) e^{-iyt} dx = \check{f}(x + iy)$$

Per esempio se per qualche $\otimes p_x \in \boxed{L^2}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_x(t)} \stackrel{L^2}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_x(y) e^{iyt} dy$$

b)

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iR}^{x+iR} p(z) e^{zt} dz & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

se $t \geq 0$ $\downarrow$ 321

f è continua

$$a(f) < a$$

$$\checkmark f(z) = p(z) \text{ su } \mathbb{R}_0$$

IPOTESI

$$|p(z)| \leq \frac{M}{1+|z|^{1+\varepsilon}} \quad M > 0, \varepsilon > 0$$

$$Q_c = 3\omega C_\Delta V^2$$

$$C_\Delta = 3C_A$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{x-iR}^{x+iR} p(z) e^{zt} dz \quad \text{se } x > a$$

$\parallel$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+iy) e^{(x+iy)t} dy \quad \text{se } x \text{ è fmo}$$

$$= \frac{e^{xt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+iy) e^{iyt} dy$$

WIKIMEDIA COMMONS

per l'ipotesi

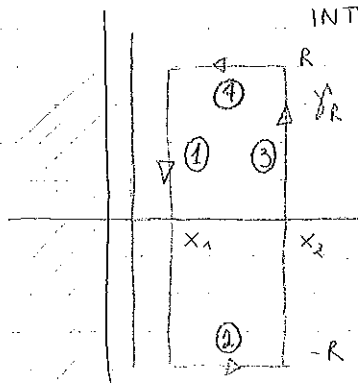
$$|p(x+iy) e^{iyt}| \leq \frac{M}{1+(x^2+y^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} \leq \frac{M}{1+|y|^{1+\varepsilon}}$$

$\uparrow$

INTEGRABILE IN y

$\Rightarrow$ l'integrale esiste $\forall t \forall x$

$$(b) \quad a < x_1 < x_2, \quad R > 0$$



Si vede che $\check{f} = p$ (imitando quanto fatto per Fourier)

323

f è continua ($f(0) = 0$) perché integrando è continuo in $t \forall z$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x+i\mathbb{R}} \overbrace{p(z) e^{zt}} dz$$

$$e^{-|p(x+iy)| e^{(x+iy)t}} \leq \frac{\cos t}{1+|y|^{1+\varepsilon}} \in L^1$$

e quindi posso passare al limite nell'integrale

ALTRO TEOREMA

WWW.LINGUAONLINE.BIZ

$$p: \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$$

e suppongo che $\lim_{|z| \rightarrow \infty} p(z) = 0$ | $a := \max \{ \operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n \}$

ALLORA

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{x+i\mathbb{R}} p(z) e^{zt} dz$$

$$\stackrel{z=t>0}{\text{come}} \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\pi}^{x+i\pi} p(z) e^{zt} dz$$

è indipendente da x

POSTO

$$f(t)$$

$$\sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(p(z) e^{zt}, z_j)$$

$t < 0$

$$|f| \leq a, \quad \mathcal{L}(f) = p$$

Esempio: Uso di $\mathcal{L}$ per risolvere il problema di Choichy
 per risolvere eq. differenziali lineari
 A COEFFICIENTI COSTANTI

$$\begin{cases} y'' + a^2 y = b(t) \\ y'(0) = y_1 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Cerco la $y(t)$ per $t \geq 0$

WWW.INGONLINE.IT

Supponiamo che y sia la soluzione

$$H y'' + a^2 H y = H b$$

APPLICO $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}(H y'') + a^2 \mathcal{L}(H y) = \mathcal{L}(H b)$$

$$z^2 \mathcal{L}(H y) - y'(0) - z y(0) + a^2 \mathcal{L}(H y) = \mathcal{L}(H b)$$

Now trovo soluzioni che esistono più che esponenzialmente

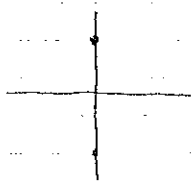
$$\boxed{p(z)} = \left(\frac{\mathcal{L}(H b) + y_1 + y_0 z}{z^2 + a^2} \right)$$

supponiamo che $b=0$

$$\boxed{p(z)} = \left(\frac{y_1 + y_0 z}{z^2 + a^2} \right)$$

ASCISSA = 0

2 poli $\pm ai$



$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma + iR} \frac{y_1 + y_0 z}{z^2 + a^2} e^{zt} dz \quad \text{per } t > 0$$

$$\left. \frac{te^{zt}(z^2 + a^2) - e^{-zt}2z}{(z^2 + a^2)^2} \right|_{z=0}$$

327

$$= \frac{ta^2}{a^4} = \frac{t}{a^2}$$

$$f(t)y(t) = \frac{t}{a^2} - \frac{\cos(at)}{a^3}$$

soluție particulară

WWW.LINGONLINE.BIZ

~~Se b(1) > a prima de zero~~

$$= \alpha e^{-t} + (\beta - \alpha) t e^{-t}$$

$g(t)$

(se $t > 0$)

329

Soluzione omogenea

$$y_1 e^{-t} + y_2 t e^{-t}$$

y_1, y_2 costanti

2) $S(t)$ nulla prima di zero cerchiamo soluzioni y nulla prima di zero. Applico $\mathcal{L}$

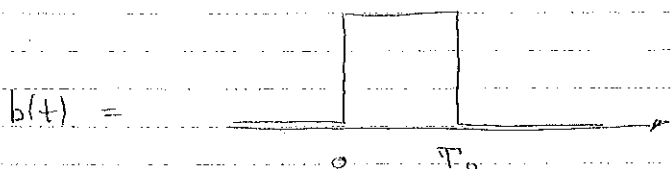
$$(z^2 + 2z + 1) \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(b)$$

www.ingegneri.it

$\mathcal{L}(f') = z \mathcal{L}(f)$ sapendo che f, f' sono nulla prima di $-M$

$D^+ =$ Funzioni nulla prima di zero

$\mathcal{L}: D^+ \rightarrow \text{clausura}$; $\mathcal{L}^{-1}: \text{clausura} \rightarrow D^+$



$$\mathcal{L}[b(t)] = \int_0^{T_0} e^{-zt} dt = \left. \frac{e^{-zt}}{-z} \right|_0^{T_0} = \frac{1 - e^{-T_0 z}}{z}$$

$$\mathcal{L}[b(t)] = \frac{1 - e^{-T_0 z}}{z}$$

$$\tilde{y}(z) = \frac{1 - e^{-T_0 z}}{z(z^2 + 2z + 1)}$$

$$g(t) = (se\ t > 0) = \sum_{w=0,1} \text{Res} \left(\frac{1 - e^{-T_0 z}}{z(z^2 + 2z + 1)} e^{zt}, w \right)$$

Con la stessa b posso cercare soluzioni in L^1 (uso Fourier)

331

$$\mathcal{F}(y'' + 2y' + y) = \mathcal{F}(b)$$

$$(-\omega^2 + 2i\omega + 1) \hat{y}(\omega) = \hat{b}(\omega)$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\hat{b}(\omega) = \int_0^{T_0} e^{-i\omega t} dt = \left. \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right|_0^{T_0} = \frac{1 - e^{-i\omega T_0}}{i\omega}$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1 - e^{-i\omega T_0}}{i\omega(-\omega^2 + 2i\omega + 1)}$$

$\in L^1$

non ha soluzioni reali

che c'è quello sopra

continua in tutti ω reali e va come

$$\frac{1}{\omega^3}$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega(-\omega^2 + 2i\omega + 1)} (1 - e^{-i\omega T_0}) d\omega$$

Calcoliamo solo il pezzo $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega(-\omega^2 + 2i\omega + 1)} d\omega$

(VALORE PRINCIPALE)

Residui: con parte immag. > 0 + $\frac{1}{2}$ residuo in zero, se $t > 0$

- (" " " " < 0 + $\frac{1}{2}$ residuo in zero), se $t < 0$

$$\omega^2 - 2i\omega - 1 = 0$$

$$(\omega - i)^2 = 0$$

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = H(t) \text{ ou } (at) \\ y \text{ nulla prima di zero} \end{cases}$$

333

$$\checkmark b(z) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} e^{-zt} dt = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z - ai} - \frac{1}{z + ai} \right) =$$

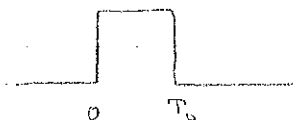
$$= \boxed{\frac{a}{z^2 + a^2}}$$

$$\checkmark y(z) = \frac{a}{(z^2 + 2z + 1)(z^2 + a^2)}$$

TORNO INDIETRO

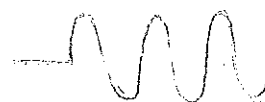
$$\begin{cases} y'' + y = b(t) \\ y \text{ nulla prima di zero} \end{cases}$$

$b(t)$



WWW.INGONLINE.BIZ

$$b(t) = H(t) \sin(at)$$



$$\frac{2}{-\omega^2 + 4}$$

$$\frac{f(\tau) e^{-t}}{\sin(\tau) e^{-i(\omega) t}}$$

$$\frac{2}{-(\omega - i)^2 + 4}$$

$$\frac{2}{-\omega^2 + 2\omega i + 5}$$