

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{e^{z^2} - z^2 - 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$e^{z^2} - 1 - z^2 = \frac{z^4}{2} + \dots$$

$$\frac{e^z}{e^{z^2} - 1 - z^2} = \frac{1}{z^4} \frac{z^4 e^z}{e^{z^2} - 1 - z^2}$$

$$e^z = \sum \frac{z^m}{m!}$$

$$e^{z^2} = \sum \frac{z^{2m}}{m!}$$

$$e^{z^2} - 1 - z^2 = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{z^{2m}}{m!} = z^4 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{z^{2m-4}}{m!}$$

Se so che z_0 è un polo di ordine k

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^k} \quad \text{con } h(z_0) \neq 0$$

$$f(z) = \frac{e^z}{\sum \frac{z^{2m-4}}{m!}} \cdot \frac{1}{z^4}$$

$h(z)$

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2} \cdot i} - 2\sqrt{\sqrt{2} \cdot i}}{(2\sqrt{\sqrt{2} \cdot i})^3} =$$

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2} \cdot i}}{16\sqrt{\sqrt{2} \cdot i}}$$

$$h(z) = \sqrt{z} (z - \sqrt{2}i)^{-2}$$

$$h'(z) = \frac{\sqrt{z}}{2z} (z - \sqrt{2}i)^{-2} - 2\sqrt{z} (z - \sqrt{2}i)^{-3}$$

$$h'(-\sqrt{2}i) = \sqrt{-\sqrt{2}i} \left(\frac{1}{-2\sqrt{2}i(-2\sqrt{2}i)} - \frac{2}{(-2\sqrt{2}i)^3} \right) =$$

$$\frac{-\sqrt{-\sqrt{2}i}}{16\sqrt{2}i}$$

WWW.ONLINE.DIZ

$$\sqrt{\sqrt{2}i} = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{-\sqrt{2}i} = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi \cancel{i} \cdot \sqrt[4]{2} \sqrt{2}}{16\sqrt{2} \cancel{i}} = \frac{\pi}{8} \sqrt[4]{2}$$

$$\frac{\pi}{16} \sqrt[4]{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+1}{(x^2+1)^3} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

poles i $-i$ triple

Residue in i

$$f(z) = \frac{z^3+1}{(z+i)^3} = \frac{1}{(z-i)^3}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\frac{h(z)}{(z-i)^3}$$

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{h''(i)}{2}$$

$$h(z) = (z^3+1)(z+i)^{-3}$$

$$h'(z) = 3z^2(z+i)^{-3} - 3(z+i)^{-4}(z^3+1)$$

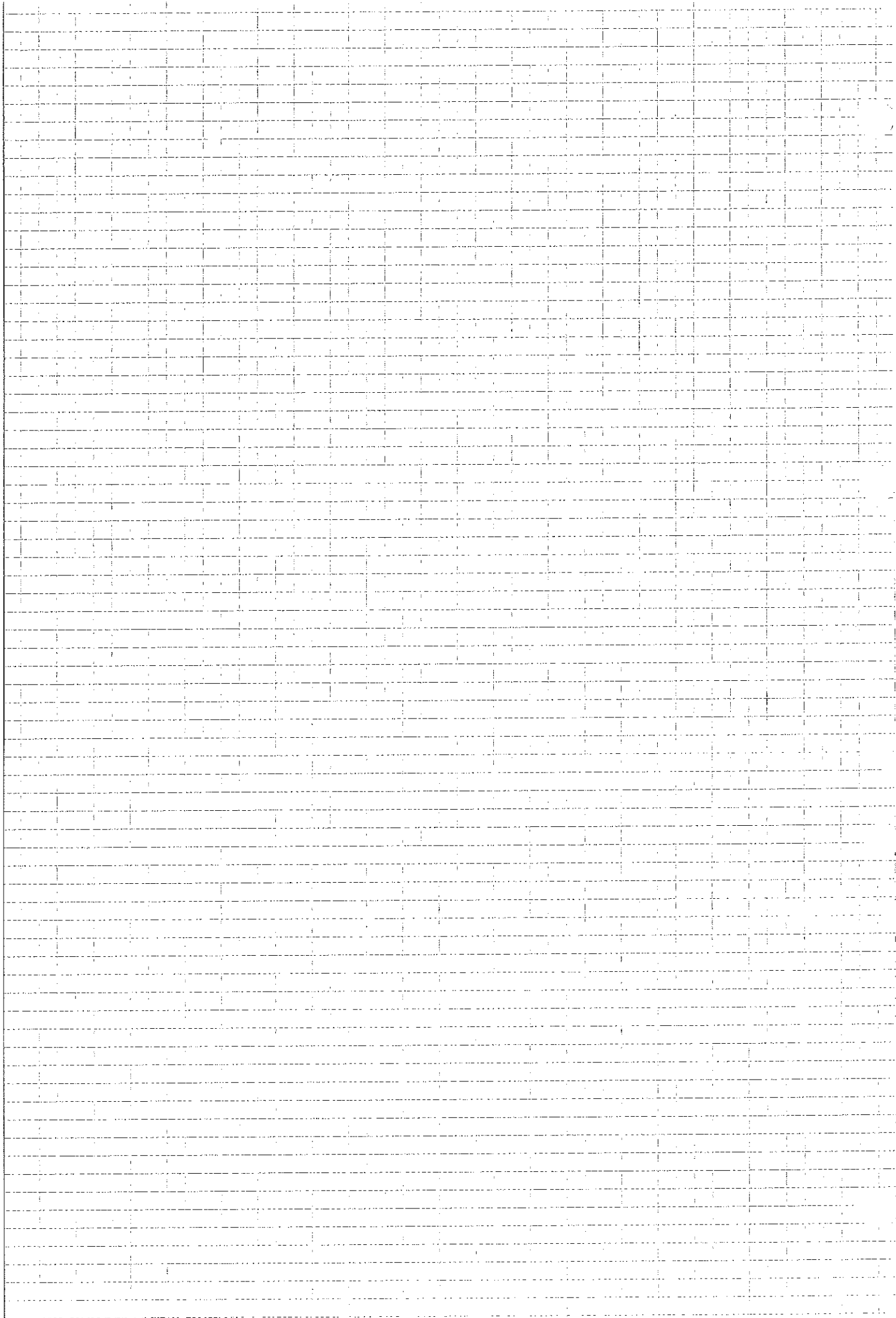
$$6z(z+i)^{-3} - 9z^2(z+i)^{-4} - 9z^2(z+i)^{-4} + 12(z^3+1)(z+i)^{-5}$$

$$\frac{h''(i)}{2} = \frac{6i}{(2i)^3} + \frac{18}{(2i)^4} + \frac{12(1-i)}{(2i)^5}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{18}{16} + \frac{12-12i}{32}$$

$$= \frac{24}{32} + \frac{36}{32} - \frac{12}{32} + \frac{12}{32i} = \frac{12}{32i}$$

$$2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{32i} = \frac{3}{8} \pi$$



$$\sum \frac{m}{(z^2 + 1)^m}$$

$$W = (z^2 + 1)^{-1}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m W^m = p(W) \quad \text{serie di potenze}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\sqrt[m]{m} \rightarrow 1$$

$$p(W) = W \sum_{m=1}^{\infty} m W^{m-1} = W \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{dW} W^m =$$

$$= W \frac{d}{dW} \sum_{m=1}^{\infty} W^m = W \frac{d}{dW} \left(\sum_{m=1}^{\infty} W^m - 1 \right) =$$

$$W \frac{d}{dW} \left(\frac{1}{1-W} - 1 \right) = W \frac{d}{dW} \left(\frac{W}{1-W} \right) =$$

$$W \frac{(1-W) + W}{(1-W)^2} = \frac{W}{(1-W)^2}$$

$$* \quad \frac{\frac{1}{1+z^2}}{\left(1 - \frac{1}{1+z^2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{1+z^2}}{\frac{z^2}{(1+z^2)^2}} = \frac{1+z^2}{z^4}$$

$$\text{se } \left| \frac{1}{1+z^2} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |1+z^2| > 1$$

$$\Leftrightarrow |1+z^2|^2 > 1 \quad \text{se } z = x + iy$$

Convergenza uniforme delle derivate

$$a_n'(x) = \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{x}{n^2}\right)$$

Valore massimo di $\left|\frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{x}{n^2}\right)\right|$ è 1.
con n particolare

$$\sum \|a_n'\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \sum \frac{1}{n^2} \leq +\infty \Rightarrow \left[\sum \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{x}{n}\right) \right]$$

converge uniformemente su $\mathbb{R}$

WWW.INCONLINE.BIZ

$f(x)$ ha zero se $x > 1$

Per la convergenza uniforme parliamo a mezza in $[a, +\infty[$
1) con $a > 1$ fissato

$$\|a_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = \sup_{x \geq a} \frac{n}{1+x^n} \leq \sup_{x \geq a} \frac{n}{x^n} = \boxed{\frac{n}{a^n}}$$

Con criterio del rapporto o della radice a $\boxed{\frac{n}{a^n}}$ trovo

$$\frac{n+1}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n} \rightarrow \boxed{\frac{1}{a}} < 1$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\Rightarrow \sum \|a_n\|_{\infty, [a, +\infty[} < +\infty \Rightarrow$$

Se $\forall$

$$\boxed{[a, +\infty[}$$

$a > 1$

la serie converge uniformemente

$$\Rightarrow \boxed{f \text{ continua}}$$

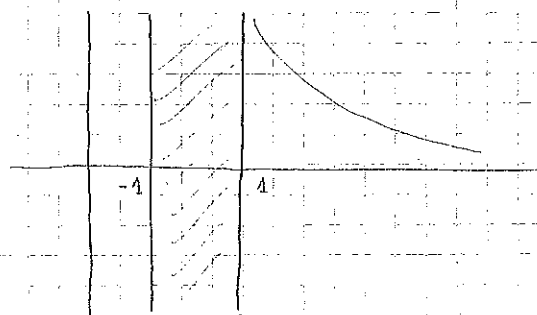
Si può dedurre anche che $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

1) Ho conv. unif. in $[a, +\infty[$ o potremo scambiare i limiti

$$\lim = \sum \lim$$

Ricordo che se $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ su A , x_0 di accumulazione su A

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \quad (\text{se tutto esiste})$$



$$\underline{a_m(x)} = \frac{x}{1+m^2x^2}, \text{ punto di massimo}$$

$$\underline{a'_m(x)} = \frac{1+m^2x^2 - x(2m^2x)}{(1+m^2x^2)^2} = \frac{1-m^2x^2}{(1+m^2x^2)^2}$$

$$\underline{a'_m(x) = 0}$$

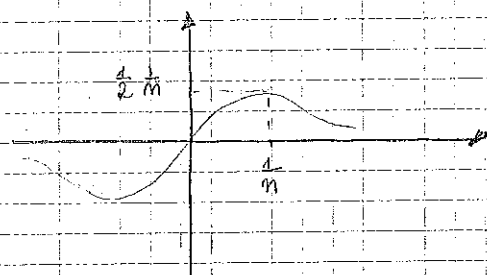
$\Leftrightarrow$

$$\underline{x = \pm \frac{1}{m}}$$

~~www.informatica.it~~

$$\underline{a_m\left(\frac{1}{m}\right)} = \boxed{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2}}$$

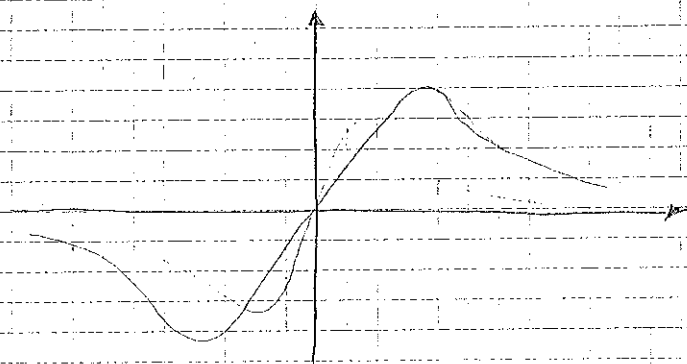
$$\left\| \frac{x}{1+m^2x^2} \right\|_{\infty, \mathbb{R}} = \underline{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m}}$$



Sfortunatamente

$$\boxed{\sum \|a_m\|_{\infty}} = \boxed{+\infty}$$

$$\underline{\frac{1}{2} \sum \frac{1}{m} = +\infty}$$



Proviamo a ripercorrere

su

$$\boxed{[a; +\infty[}$$

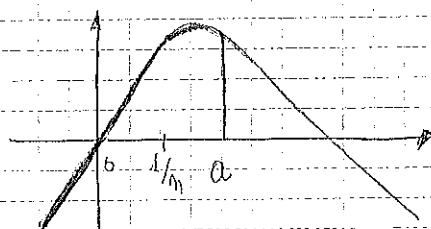
con $a \geq 0$

finato

Per m grande

$$\left\{ \sup_{x \geq a} |a_m| = a_m(a) \right\}$$

$$\text{se } \frac{1}{m} < a \text{ ma}$$



considerando che $\frac{1}{m} \rightarrow 0$ per $m \rightarrow \infty$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{1+n x^4} = \boxed{+\infty} \quad \forall x$$

(possibile estremo

se

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$$

$$a_n, b_n \geq 0$$

$\sum a_n$, $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere)

$$a_n = \frac{1}{1+n x^4}$$

$$b_n = \frac{1}{x^4 n}$$

$$\sum b_n = \frac{1}{x^4} \sum \frac{1}{n} = \boxed{+\infty}$$

WWW.ONLINE.BIZ

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{1+x^n} = f(x)$$

puntualmente

$$a_n(x) = \frac{n}{(1+x^n)}$$

$$\text{se } |x| \leq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(x) = +\infty$$

$$\sum a_n(x)$$

DIVERGE

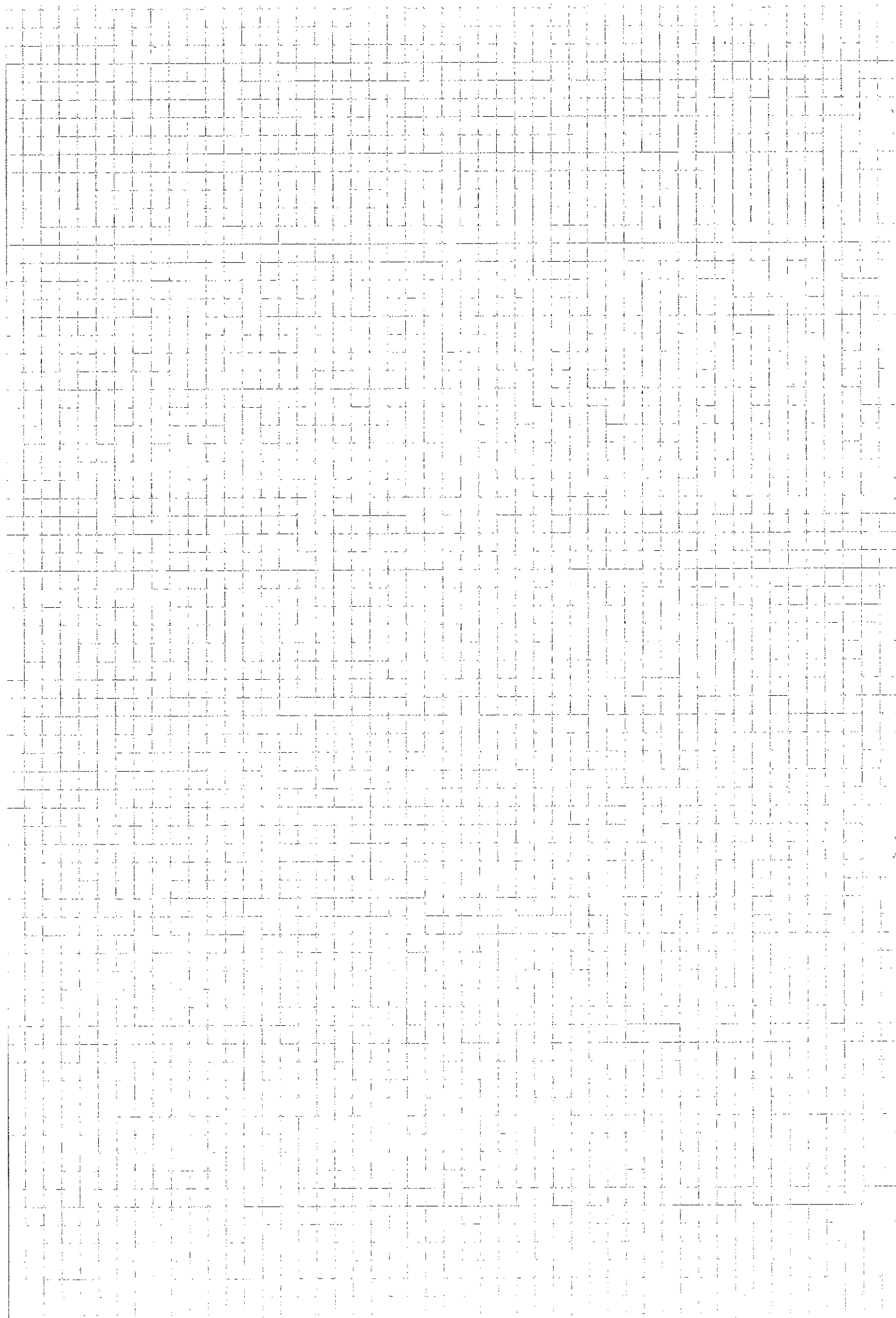
$$\text{Se } x > 1 \quad (x < -1)$$

Calcolo del rapporto

$$\frac{\frac{n+1}{1+x^{n+1}}}{\frac{n}{1+x^n}}$$

$$= \frac{n+1}{n} \frac{1+x^n}{1+x^{n+1}}$$

$$= \frac{n+1}{n} \frac{x^n}{x^{n+1}} \frac{x^{-n} + 1}{x^{-n-1} + 1} \rightarrow \boxed{\frac{1}{x}} < 1$$



$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(z^2+1)^n}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$$

$$(z^2+1)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z^{2(m-k)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(z^2+1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{2(n-k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^{2(n-k)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^{2(n-k)}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{(z^2+1)^m}$$

$$\frac{1}{(z^2+1)} = W$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} m W^m = f(z)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{m} = 1$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m+1}{m} = 1$$

$$\bar{R} = 1$$

$$f(W) = \sum_{m=0}^{\infty} m W^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (W^m)' = \left(\sum_{m=0}^{\infty} W^m \right)' =$$

$$= \left(\frac{1}{1-W} \right)' = \frac{1}{(1-W)^2} = \frac{-1}{(1-W)^2} \quad |W| < 1$$

$$f(W) = \frac{W}{(1-W)^2}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\left| \frac{1}{z^2+1} \right| < 1$$

$$f(W) = \frac{\frac{1}{z^2+1}}{\left(1 - \frac{1}{z^2+1}\right)^2} = \frac{\frac{1}{z^2+1}}{\left(\frac{z^2+1-1}{z^2+1}\right)^2} = \frac{1}{(z^2+1)} \cdot \frac{(z^2+1)^2}{z^4}$$

$$= \frac{1+z^2}{z^4}$$

$$|z^2+1| > 1$$

$$z^2+1 > 1$$

$$|(x+iy)^2+1|^2 > 1$$

$$|x^2-y^2+2ixy+1|^2 > 1$$

$$(1+x^2+y^2)^2 + 4x^2y^2 > 1$$

$$1+x^4+y^4+2x^2+2y^2+2x^2y^2+4x^2y^2 > 1$$

Esercizio 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} = f(z)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$z_0 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{(n+2)!}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(n+2)!}} \rightarrow 0$$

$$\bar{R} = \infty$$

$$z^2 f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+2)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2}$$

$$(z^2 f(z))' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2) z^{n+1}}{(n+2)!}$$

$$(z^2 f(z))'' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1) z^n}{(n+2)!}$$

Esercizio 2

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^n}{(n-3)! \cdot n}$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

$$z_0 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{(n-3)! \cdot n}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(n-3)! \cdot n}} \rightarrow 0$$

$$\bar{R} = \infty$$

$$f'(z) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{(n-3)! \cdot n}$$

$$z^{-2} f'(z) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^{n-3}}{(n-3)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = e^z$$

$$f'(z) = z^2 e^z$$

$$f(z) = z^2 e^z - \int 2z e^z dz = z^2 e^z - 2z e^z + \int 2 e^z dz =$$

$$z^2 e^z - 2z e^z + 2 e^z + c$$

$$f(0) = 0$$

$$c = -2$$

Esempio 3

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n$$

raggio di convergenza $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \quad \bar{R} = 1$

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d z^n}{d z} = \\ &= z \frac{d}{d z} \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n \right) = z f'(z) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2} \quad \text{se } |z| < 1$$

Esempio 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = f(z)$$

WWW.MBONLINE.BIZ

$$z_0 = 0$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ dispari} \\ (-1)^{n/2} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Se limite non esiste però $\max \lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \quad \bar{R} = 1$

Questa serie converge nel disco di raggio 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{se } |z| < 1$$

la funzione e^z è somma della sua serie di Taylor

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

così vale anche:

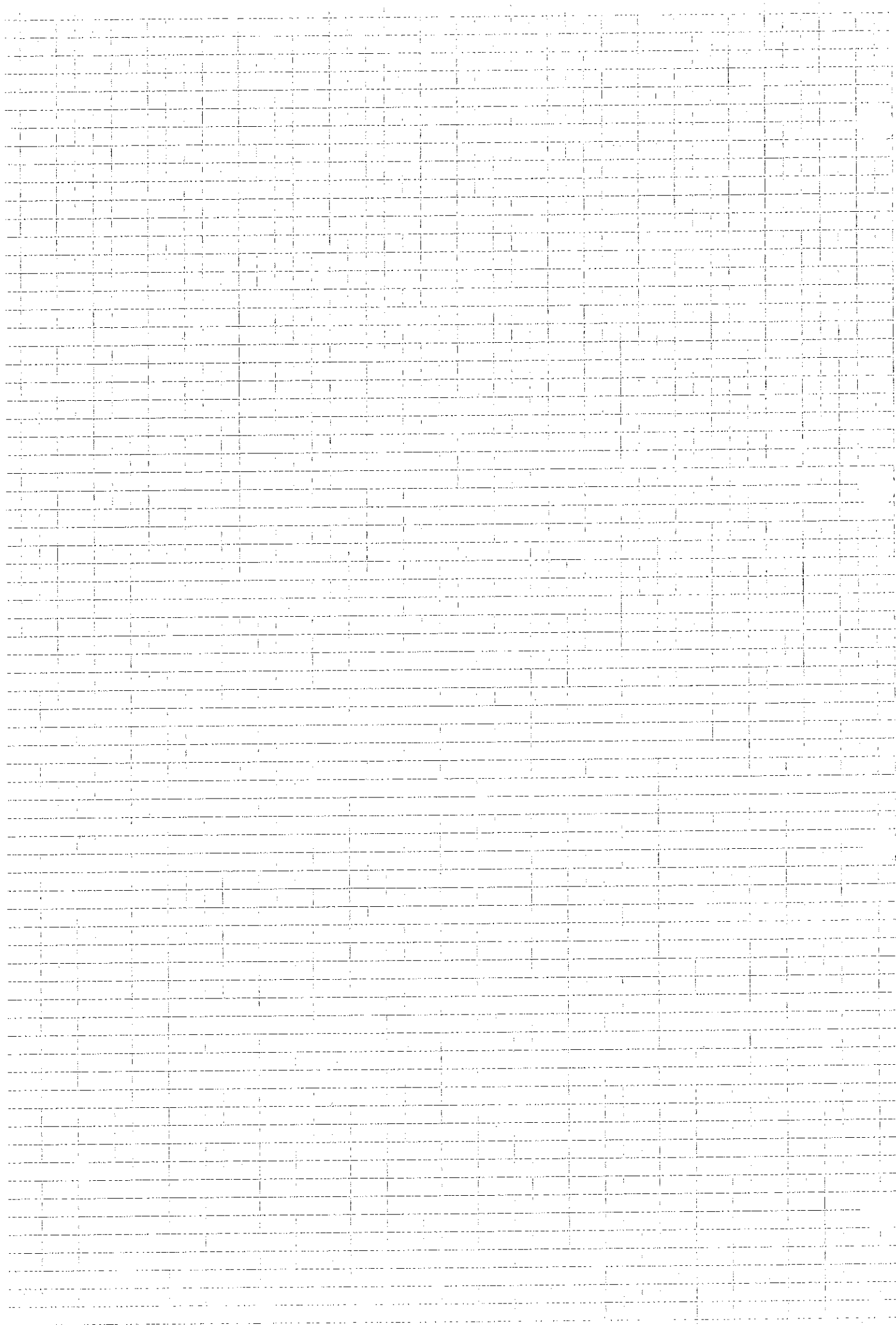
$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

per tutti gli $z \in \mathbb{C}$

$$\log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} z^{n+1}$$

WWW.LINGONLINE.BIZ



Esercizio 9

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx =$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$= \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx \right)$$

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \ln z}$$

$$\ln z = \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z) \rightarrow]0, 2\pi[$$

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f, z_j)$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}(1+z^2)} = \frac{h(z)}{(z-i)(z+i)}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$h(z) = \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}(z+i)}$$

olomorfa in i

$$h_1(z) = \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}(z-i)}$$

olomorfa in $-i$

$$\operatorname{Res}(f, i) = h(i) = \frac{e^{-1}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) 2i} = \frac{1}{e(\sqrt{2}i - \sqrt{2})} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{4e}$$

$$\operatorname{Res}(f, -i) = h_1(-i) = \frac{e}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) (-2i)} = \frac{e}{\sqrt{2}i + \sqrt{2}} = \frac{e(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)}{4}$$

$$\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i) = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i + e^2 \sqrt{2} - e^2 \sqrt{2}i}{4e}$$

$$= \frac{e^2 \sqrt{2} - \sqrt{2}}{4e} + \frac{-e^2 \sqrt{2}i - \sqrt{2}i}{4e}$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \pi i \cdot \left(\frac{e^2 \sqrt{2} - \sqrt{2}}{4e} + \frac{-e^2 \sqrt{2}i - \sqrt{2}i}{4e} \right) \right\} = \left(\frac{e^2 \sqrt{2} + \sqrt{2}}{4e} \right) \pi$$

Esercizio 8

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 2x}{(x^2 - 2x + 2)^2 (5 + 2x + x^2)} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_j) > 0} \text{Res}(f, z_j)$$

per $x^2 - 2x + 2 = 0 \quad x = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$

$x^2 + 2x + 5 = 0 \quad x = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z}{(z^2 - 2z + 2)^2 (z^2 + 2z + 5)} = \frac{h(z)}{[z - (1+i)]^2} = \frac{h_1(z)}{[z - (1+2i)]}$$

$h(z) = \frac{z^2 + 2z}{[z - (1-i)]^2 [z^2 + 2z + 5]}$ olomorfa $1+i$

$h_1(z) = \frac{z^2 + 2z}{(z^2 - 2z + 2)^2 [z - (-1-2i)]}$ olomorfa $1-2i$

$$h(z) = \frac{(z^2 + 2z)(z - (1-i))^{-2}}{[z^2 + 2z + 5]}$$

$$h'(z) = \left[(2z+2)(z - (1-i))^{-2} - 2(z - (1-i))^{-3}(z^2 + 2z) \right] (z^2 + 2z + 5)^{-1} - (2z+2)(z^2 + 2z)(z - (1-i))^{-2} / [z^2 + 2z + 5]^2$$

$$h'(1+i) = \left[\frac{(2i+4)}{-4} + \frac{2(2i+2+2i)}{+8i} \right] \frac{[2i+2+2i+5]}{4i+2} - \left[\frac{(4+2i)(2i+2+2i)}{-4} \right] / [4i+7]^2$$

$$= \left[\frac{2i+4}{-4} + 2i \right] [4i+7] + \left[\frac{16i+8-8+4i}{+4} \right] / [4i+7]^2$$

$$\frac{-i}{7+4i} + \frac{5i}{(49-16+56i)} = \frac{-i(7-4i)}{65} + \frac{5i(33-56i)}{4225-845}$$

$$= \frac{-7i-4}{65} + \frac{33i+56}{845}$$

$$= \frac{-91i-52}{845} + \frac{33i+56}{845} =$$

$$= \frac{-58i+4}{845}$$

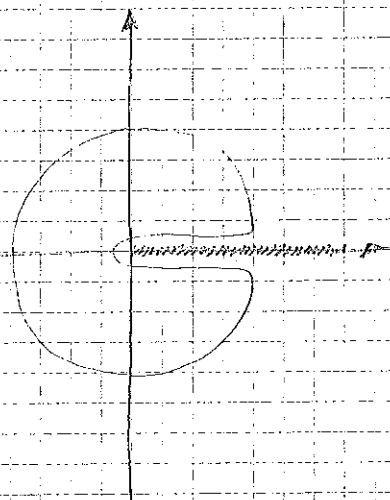
Esercizio 6

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(4+x)^2(9+x)} dx$$

poli: -2 molteplicità 2
 -9 molteplicità 1

$$\sqrt{x} \rightarrow e^{\frac{1}{2} \ln z}$$

$$\ln z = \ln |z| + i \underbrace{\text{Arg } z}_{\in [0; 2\pi[}$$



www.incc.unige.it

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(4+x)^2(9+x)} dx = 2\pi i \sum \text{Res}(f, z_j)$$

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{(z+4)^2(z+9)} = \frac{h(z)}{(z+4)^2} = \frac{h_1(z)}{z+9}$$

$$h(z) \text{ olomorfa } m = 4$$

$$h(z) = \sqrt{z} (z+9)^{-1}$$

$$h_1(z) \text{ olomorfa } m = 9$$

$$h_1(z) = \sqrt{z} (z+4)^{-2}$$

$$\text{Res}(f, -4) = h'(-4) =$$

$$h'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} (z+9)^{-1} - (z+9)^{-2} \sqrt{z} = \frac{(z+9)^{-1} - 2(z+9)^{-2} z}{2\sqrt{z}}$$

$$h'(-4) = \frac{\frac{1}{5} - 2 \frac{1}{25} (-4)}{2 \cdot 2i} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{8}{25}}{4i} = \frac{\frac{13}{25}}{4i}$$

$$= -\frac{13}{100} i$$

$$\text{Res}(f, -9) = h_1(-9) = \frac{3i}{25}$$

$$\text{Res}(f, -4) + \text{Res}(f, -9) = -\frac{13i}{100} + \frac{3i}{25} = \frac{-13i + 12i}{100} = -\frac{1}{100} i$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(4+x)^2(9+x)} dx = \pi i \left(-\frac{1}{100} i \right) = \boxed{\frac{1}{100} \pi}$$

Esercizio 5

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+2x^2+x^4)(2+2x+x^2)} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_j) > 0} \text{Res}(f, z_j)$$

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^4+2z^2+1)(z^2+2z+2)} = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$$

$$z^2+2z+2=0 \quad z = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$$

$$z^2+1=0 \quad z = \pm i$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$f(z) = \frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2(z-(-1+i))(z-(-1-i))} = \frac{h(z)}{(z-i)^2}$$

$$= \frac{h_1(z)}{(z-(-1+i))}$$

$$h(z) \text{ olomorfa in } (i)$$

$$h(z) = z^2(z+i)^{-2}(z^2+2z+2)^{-1}$$

$$h_1(z) \text{ olomorfa in } (-1+i)$$

$$h_1(z) = z^2(z^2+1)^{-2}(z-(-1-i))^{-1}$$

$$\text{Res}(f, -1+i) \quad h_1(-1+i) = \frac{(-1+i)^2}{(1-1-2i+1)^2} \cdot \frac{1}{2i}$$

$$= \frac{-2i}{1-4-4i} \cdot \frac{1}{2i} = \frac{1}{(-3-4i)} = \frac{-(-3+4i)}{25}$$

$$= \frac{3-4i}{25}$$

$$\text{Res}(f, i) = h'(i)$$

$$h(z) = \frac{z^2(z+i)^{-2}}{(z^2+2z+2)}$$

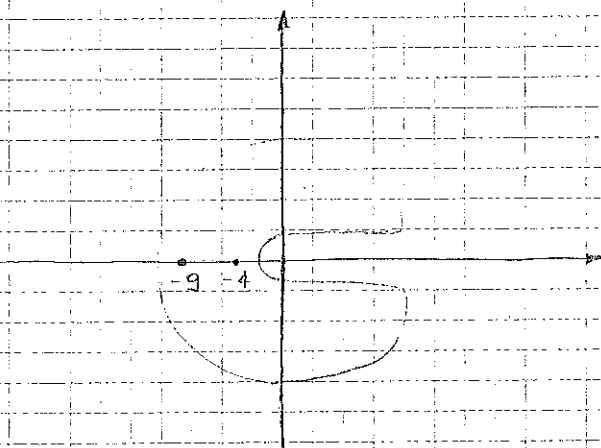
$$h'(z) = \frac{(2z)(z+i)^{-2} - 2(z+i)^{-3}z^2(z^2+2z+2) - (2z+2)z^2(z+i)^{-2}}{(z^2+2z+2)^2}$$

$$h'(i) = \left\{ \frac{2i}{-4} + \frac{+2}{-8i} \right\} \frac{1+2i}{(1+2i)^2} + \left\{ \frac{2i+2}{-4} \right\} \frac{(-\frac{1}{2}i + \frac{1}{4}i)(1+2i)}{(1+2i)^2}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}i+1}{-2} \frac{1}{(1+2i)^2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(4+x)^2(9+x)} dx$$

WWW.ONLINE.DZ



$$\sqrt{z}$$

$$e^{\frac{1}{2} \ln z}$$

$$\ln z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

$$]0, 2\pi[$$

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(4+x)^2(9+x)} dx = 2\pi i \sum_{Q(z_j)=0} \operatorname{Res}(z_j)$$

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{(4+z)^2(9+z)}$$

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z+9)}$$

$$h(z) \text{ olomozga m. } -9$$

$$f(z) = \frac{h_1(z)}{(4+z)^2}$$

$$h_1(z) \text{ olomozga m. } -4$$

$$h_1(z) = \frac{\sqrt{z}}{(9+z)}$$

$$h(z) = \frac{\sqrt{z}}{(4+z)^2}$$

$$h(-9) = \frac{3i}{25}$$

$$h_1'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} (9+z)^{-1} - (9+z)^{-2} \sqrt{z} \Rightarrow$$

$$h_1'(-4) = \frac{1}{2\sqrt{-4}} (5)^{-1} - (5)^{-2} \sqrt{-4} = \frac{1}{10\sqrt{-4}} - \frac{-4}{25\sqrt{-4}}$$

$$= \frac{10}{100\sqrt{-4}} + \frac{16}{100\sqrt{-4}} = \frac{13}{100} i$$

$$\Rightarrow \pi i \left(\frac{12i}{100} - \frac{13}{100} i \right) = \frac{\pi}{100}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \lambda}{16 \sqrt{2} \lambda}$$

$$h_1'(-2\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{z}} (z - \sqrt{2}\lambda)^{-2} - 2(z - \sqrt{2}\lambda)^{-3} \sqrt{z}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-\sqrt{2}\lambda}} (-2\sqrt{2}\lambda)^{-2} - 2(-2\sqrt{2}\lambda)^{-3} \sqrt{-\sqrt{2}\lambda}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\sqrt{-\sqrt{2}\lambda} - 2\sqrt{-\sqrt{2}\lambda}}{(-2\sqrt{2}\lambda)^3} = \frac{-\sqrt{-\sqrt{2}\lambda}}{16\sqrt{2}\lambda}$$

$$\sqrt{\sqrt{2}\lambda} = \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\sqrt{-\sqrt{2}\lambda} = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{16\sqrt{2}\lambda} - \frac{\sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{16\sqrt{2}\lambda} =$$

$$\frac{\sqrt[4]{2} \sqrt{2}}{16\sqrt{2}\lambda} = -\frac{\sqrt[4]{2}}{16} \lambda$$

$$\pi \lambda, -\frac{\sqrt[4]{2}}{16} \lambda = \frac{\pi \sqrt[4]{2}}{16}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 + 1}{(x^2 + 1)^3} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_j) > 0} \text{Res}(f, z_j)$$

$$f(z) = \frac{z^3 + 1}{(z^2 + 1)^3} = \frac{z^3 + 1}{(z+i)^3(z-i)^3}$$

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-i)^3}$$

$$h(z) = \frac{z^3 + 1}{(z+i)^3}$$

olomorfa in i

$$\frac{h''(i)}{2}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$h(z) = (z^3 + 1)(z+i)^{-3}$$

$$h'(z) = 3z^2(z+i)^{-3} - 3(z+i)^{-4}(z^3+1)$$

$$h''(z) = 6z(z+i)^{-3} - 3(z+i)^{-4} \cdot 3z^2 + 12(z+i)^{-5}(z^3+1) - 3z^2(z+i)^{-4} \cdot 3$$

$$h''(i) = \frac{6i}{-8i} + \frac{+9}{16} \cdot 2 + \frac{12(1-i)}{32i}$$

$$= -\frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \frac{3}{8} - \frac{3}{8}i = -\frac{3}{8}i$$

$$\frac{h''(i)}{2} = -\frac{3}{16}i$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 + 1}{(x^2 + 1)^3} dx = 2\pi i \cdot -\frac{3}{16}i = \frac{3}{8}\pi$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x} (1+x^2)} dx$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{\sqrt{x} (1+x^2)} dx \right)$$

$$\int_{-5}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+5} (1+x^2)} dx$$

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{\sqrt{x} (1+x^2)} dx = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i) \right)$$

$$\operatorname{Res}(f, z_j) = \left. \frac{e^{iz}}{\sqrt{z} \cdot 2z} \right|_{z=z_j} - \left. \frac{\sqrt{z} e^{iz}}{2z^2} \right|_{z=z_j}$$

$$z_j = i \quad \frac{\sqrt{i} e^{-1}}{-2}$$

$$z_j = -i \quad \frac{\sqrt{-i} e^{+1}}{-2}$$

$$\frac{2\pi i}{-2} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}ie} + \frac{-1+i}{\sqrt{2}} e \right) = \frac{-\pi i}{\sqrt{2}} \left(\left(\frac{1}{e} - e \right) + i \left(\frac{1}{e} - e \right) \right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{1}{e} + e \right) - i \left(\frac{1}{e} - e \right) \right]$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{e} + e \right)$$

Esempio 8

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x) x^p}$$

$$0 < p < 1$$

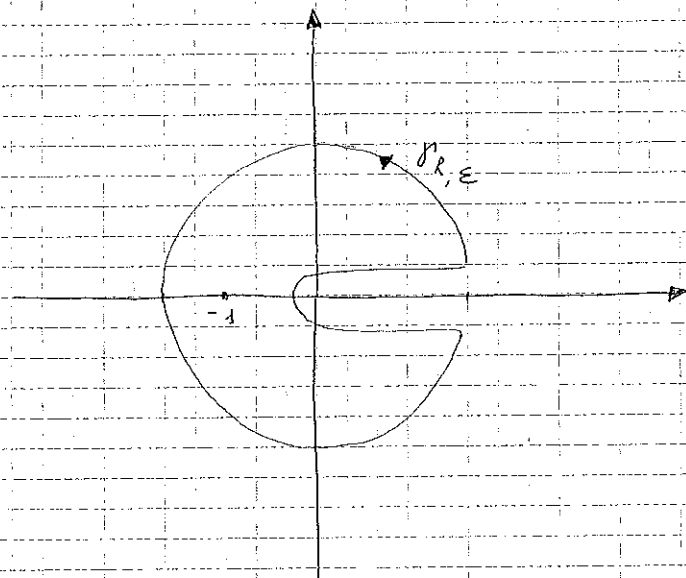
$$f(z) = \frac{1}{(1+z) z^p}$$

$$z^p = e^{p \operatorname{Arg}(z)}$$

$$\ln z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

$\downarrow$

$$]0, 2\pi[$$



WWW.INGONLINE.BIZ

$$\int_{\gamma_{R, \epsilon}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1) = 2\pi i \left. \frac{1}{z^p} \right|_{-1} = 2\pi i e^{-p\pi i}$$

$$= \int_{C_R} f(z) dz + \int_0^R \frac{dx}{(1+x) x^p} + \int_R^0 \frac{dx}{(1+x) e^{i2\pi p} x^p}$$

$\downarrow R \rightarrow \infty$
0

$$\left(1 - e^{-2\pi p i}\right) \int_0^R \frac{dx}{(1+x) x^p} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \left(1 - e^{-2\pi p i}\right) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x) x^p}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi i}{e^{ip\pi} (1 - e^{-2ip\pi})} = \pi \frac{2i}{e^{ip\pi} - e^{-ip\pi}} = \frac{\pi}{2i \sin(p\pi)}$$

Esempio 5

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \frac{h''(i)}{2}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3} \quad h(z) = (z+i)^{-3}$$

$$h'(z) = -3(z+i)^{-4} \quad h''(z) = 12(z+i)^{-5}$$

$$h''(i) = \frac{12}{64i} = \frac{3}{8} \pi$$

Esempio 6

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{1+x^2} dx \quad \lambda < 0$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{1+x^2} dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \left. \frac{e^{-\lambda z}}{2z} \right|_{z=i} = \pi e^{\lambda}$$

Esempio 7

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{(x^2+1)^2} dx$$

$$f(z) = \frac{e^{-\lambda z}}{(z^2+1)^2} = \frac{h_1(z)}{(z-i)^2} \quad h_1(z) \text{ olomoga m } i$$

$$\operatorname{Res}(f, i) = h_1'(i) = \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{-\lambda z}}{(z^2+1)^2} \right) = \frac{d}{dz} \left(e^{-\lambda z} (z^2+1)^{-2} \right)$$

$$= -\lambda e^{-\lambda z} (z^2+1)^{-2} - 2e^{-\lambda z} (z^2+1)^{-3} \Big|_{z=i} =$$

$$= -\lambda e^{\lambda} (i)^{-2} - 2e^{\lambda} (i)^{-3} = \frac{-\lambda e^{\lambda}}{-4} - \frac{2e^{\lambda}}{8(-i)} = \left(\frac{\lambda-1}{4} \right) e^{\lambda}$$

$$\text{per } \lambda < 0 \Rightarrow -2\pi i \left(\frac{\lambda-1}{4} \right) e^{\lambda} = \frac{\pi}{2} (1-\lambda) e^{\lambda}$$

Esempio 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \quad \left(= \operatorname{arctg} x \right)_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_j) > 0} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{p(z)}, z_j \right)$$

$$= -2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_j) < 0} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{p(z)}, z_j \right)$$

$$\operatorname{Res} \left(\frac{1}{1+z^2}, i \right) = \left[\frac{1}{2z} \right]_i = \frac{1}{2i}$$

$$2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

WWW.ONLINE.BIZ

Esempio 2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_j) > 0} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{1+z^6}, z_j \right)$$

$$z_j = e^{\frac{j\pi}{6}} = e^{\frac{j\pi}{6}}$$

$$\operatorname{Im}(z_j) > 0 \quad z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} ; \quad i ; \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res} \left(f, z_j \right) = \frac{1}{6z_j^5} = -\frac{z_j}{6z_j^6} = -\frac{z_j}{6}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = -\frac{2\pi i}{6} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right\} = 2\pi i \left(-\frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \pi$$

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad p, q \text{ polinomi}$$

$$q(z_0) = 0 \quad q'(z_0) \neq 0 \quad z_0 \text{ radice semplice di } q(z), \quad p(z) \text{ olomorfa in } z_0$$

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

$$\text{Se } f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^k} \quad h(z) \text{ olomorfa in } z_0$$

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\text{Dati } p, q \text{ polinomi} \quad Q(x) \neq 0 \quad \text{se } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Grado}(Q) \geq \text{Grado}(P+2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x} p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\substack{\text{Im}(z_j) > 0 \\ Q(z_j) = 0}} \text{Res}(f, z_j) \quad \lambda < 0$$

PRENDO I RESIDUI
DALLA PARTE IN CUI
L'ESPOENZIALE DIVENTA
NEGATIVO

$$-2\pi i \sum_{\substack{\text{Im}(z_j) < 0 \\ Q(z_j) \neq 0}} \text{Res}(f, z_j) \quad \text{se } \lambda > 0$$

$$\text{Se non chiedo che il grado di } Q \geq \text{grado } P+2$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R e^{-\lambda x} \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

RES SULL'ASSE REALE

$$x_0 \in \mathbb{R} \quad f \text{ definita vicino a } x_0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{[a, b] \setminus [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]} f(x) dx = \text{V.P.} \int_a^b f(x) dx$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \cos\left(\frac{x}{n^2}\right)$$

puntualmente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{x}{n^2}\right)}{\frac{x}{n^2}} = 1$$

Le 2 serie hanno lo stesso carattere

$\Rightarrow$ CONVERGENTE

WWW.INGONLINE.BIZ

uniformemente

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left\| \cos\left(\frac{x}{n^2}\right) \right\|_{\infty, \mathbb{R}}$$

~~«XXXXXXXXXX»~~

~~CONVERGENTE~~

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} 1 = +\infty$$

Se invece fmo $a > 0$ e fmo in modo che

$$\frac{a}{n^2} < \frac{\pi}{2} \quad n^2 > \frac{2a}{\pi}$$

$$\max \cos\left(\frac{x}{n^2}\right) = \cos \frac{a}{n^2}$$

$\Rightarrow$ uniformemente convergente

$$f'_n(x) = \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{x}{n^2}\right)$$

$$\left\| \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{x}{n^2}\right) \right\|_{\infty} = \frac{1}{n^2} \quad \text{CONVERGENTE}$$

$\Rightarrow \sum f'_n(x)$ UNIFORMEMENTE CONVERGENTE su $\mathbb{R}$

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{m}{1+x^m}$$

parzialmente

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m+1}{1+x^{m+1}} \cdot \frac{1+x^m}{m} = \frac{1}{x}$$

$$|x| > 1$$

CONVERGENTE

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\text{Se } |x| \leq 1$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{1+x^m} = +\infty \quad \text{non è soddisfatta la condizione}$$

necessaria di convergenza $\Rightarrow$ SERIE DIVERGE

Per la convergenza uniforme

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \left\| \frac{m}{1+x^m} \right\|_{\infty}, [a; +\infty[\quad a > 1$$

$$\left\| \frac{m}{1+x^m} \right\|_{\infty} \leq \left\| \frac{m}{x^m} \right\|_{\infty} = \frac{m}{a^m}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m+1}{a^{m+1}} \cdot \frac{a^m}{m} = \frac{1}{a} < 1 \quad \text{CONVERGENTE}$$

$\forall x \in [a; +\infty[$ la serie converge uniformemente $\Rightarrow$

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{è CONTINUA}$$

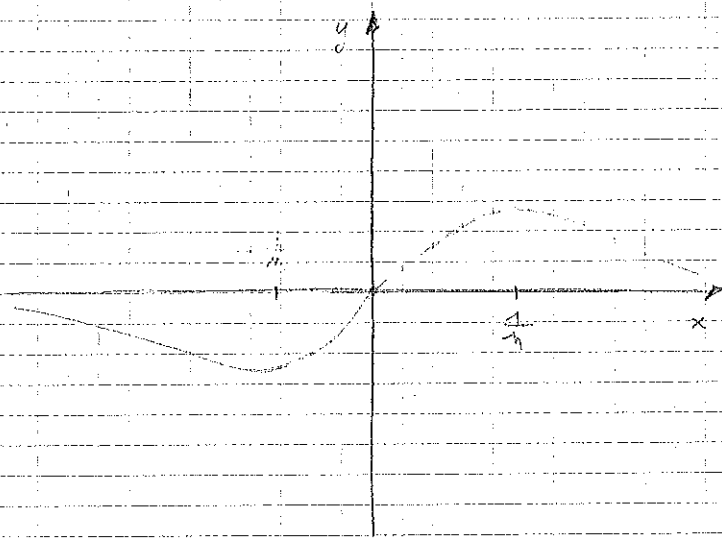
$$D'(f_m(x)) = \frac{-m x^{m-1}}{(1+x^m)^2}$$

Uniformemente

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left\| \frac{x}{1+m^2 x^2} \right\|_{\infty, \mathbb{R}}$$

$$D' \left(\frac{x}{1+m^2 x^2} \right) = \frac{(1+m^2 x^2) - 2m^2 x^2}{(1+m^2 x^2)^2} = \frac{1-m^2 x^2}{(1+m^2 x^2)^2}$$

$$D' = 0 \quad 1 - m^2 x^2 = 0 \quad x = \pm \frac{1}{m}$$



massimo $\rightarrow \frac{1}{1 + m^2 \frac{1}{m^2}} = \frac{1}{2m}$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2m} \quad \text{DIVERGENTE}$$

$\Rightarrow$ la serie non è uniformemente convergente su $\mathbb{R}$

Se considero $[a, +\infty[$ $] -\infty, -a]$

Non appena $a > \frac{1}{m} \quad m > \frac{1}{a} \Rightarrow$ la serie ha massimo
nel punto a e vale

$$\frac{a}{1+m^2 a^2} \Rightarrow \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{a}{1+m^2 a^2} \quad \text{CONVERGENTE}$$

la serie converge uniformemente nell'intervallo $] -\infty, -a]$, $[a, +\infty[$

$\Rightarrow F = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{x}{1+m^2 x^2}$ continua nell'intervallo

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \sin(nx)$$

puntualmente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx) = 0$$

uniformemente

$$\left\| \frac{1}{n^2} \sin(nx) \right\|_{\infty, \mathbb{R}} = \frac{1}{n^2}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$f_n(x)$ tende uniformemente a $f(x) = 0$ su tutto $\mathbb{R}$

$$D'(f_n(x)) = \frac{1}{n^2} n \cos(nx)$$

puntualmente

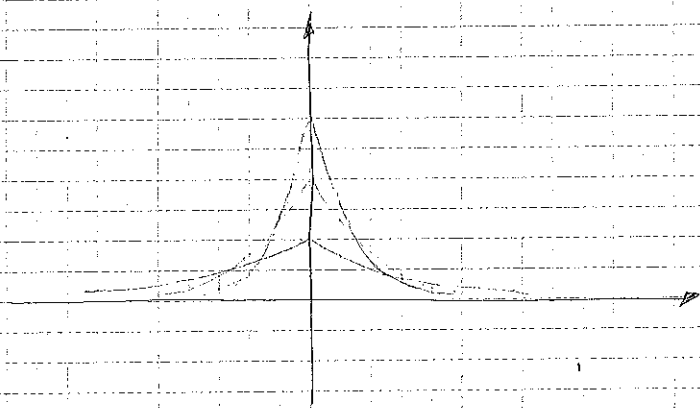
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx) = 0$$

uniformemente

$$\left\| \frac{1}{n} \cos(nx) \right\|_{\infty, \mathbb{R}} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$f_n(x) = m e^{-mx^2}$$



WWW.INGONLINE.DIZ

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m e^{-mx^2} = 0$$

per $x = 0$

Puntualmente tende a $\{0\}$

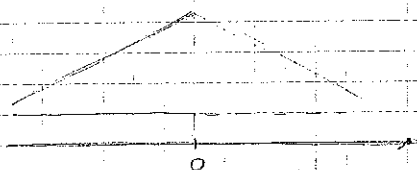
per $x \neq 0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m = +\infty$$

Uniformemente

$$\|m e^{-mx^2}\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} (m e^{-mx^2})$$

$$D'(m e^{-mx^2}) = -2m^2 x e^{-mx^2}$$



maximo e m $x=0$

$$f_n(0) = m$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_n(0) = \infty$$

Non e uniformemente convergente su $\mathbb{R}$

Se considero $x \geq 0$ (la funzione tutto e simmetrica)

Intervallo $[T, +\infty[$

Il maximo della funzione a ha quando $x = T$

$$f_n(x) = T e^{-Tx^2}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T e^{-Tx^2} = 0$$

La funzione converge uniformemente in $[T, +\infty[$

$$f_m(x) = \cos\left(\frac{x}{m}\right)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{x}{m}\right) = 1$$

$$\max_{x \in [0, T]} \underbrace{\left(1 - \cos\left(\frac{x}{m}\right)\right)}_{h_m(x)}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$h_m(0) = 0$$

$$h'_m = \frac{1}{m} \sin\left(\frac{x}{m}\right) \neq 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} \frac{T}{m} < \pi \\ m > \frac{T}{\pi} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il massimo è in $x = T$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 1 - \cos \frac{T}{m} = 0$$

In $\mathbb{R}$ non convergono uniformemente perché $\sup_{\mathbb{R}} |f_m(x) - x| = +\infty$

Calcolo dell'ordine infinitesimo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = l \neq 0 \quad \alpha > 0$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

la serie DIVERGE

$$\alpha > 1$$

la serie CONVERGE

WWW.INGONLINE.BIZ

Limiti

$$\log(x) \sim x^\alpha \sim e^x \sim x! \sim x^x$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \log(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

l'operazione di derivata non va d'accordo con la convergenza uniforme

Limite UNIFORME di funzioni derivabili può non essere derivabile

ma vale il seguente teorema: I intervallo in $\mathbb{R}$ $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$
successione di funzioni derivabili su I Supponiamo che ci siano
2 funzioni $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ per cui

$f_n \rightarrow f$ puntualmente

$f_n \rightarrow g$ uniformemente

$\Rightarrow f$ è derivabile e $f' = g$

WWW.INGONLINE.DIZ

SERIE DI FUNZIONI

Sia (f_n) una successione di funzioni $C^0(A)$ con A compatto

Se la serie numerica

$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$ è convergente $\Rightarrow$ la serie delle f_n converge

UNIFORMEMENTE SU A .

Sia (f_n) una successione di funzioni in $C^0(A)$ con A compatto

1 - Se la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$ è convergente $\Rightarrow F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è

una funzione continua e $\int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n(x) dx$

2 - Se $A = I$ (intervallo) e se f_n sono tutte derivabili e se anche la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} \|f'_n\|_{\infty}$ è convergente $\Rightarrow F$ è derivabile e si ha

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad \forall x \in I$$

$$\rightarrow \int_{C_R} f(z) dz + \int_0^R \frac{dx}{(1+x)x^p} + \int_R^0 \frac{dx}{(1+x)x^p} e^{i2\pi p} =$$

$$\downarrow R \rightarrow \infty$$

$$0 \quad \uparrow e^{p(\ln|x| + 2\pi i)} = x^p e^{i2\pi p}$$

$$= \int_{C_R} f(z) dz + \left(1 - \frac{1}{e^{i2\pi p}}\right) \int_0^R f(x) dx$$

$$\downarrow R \rightarrow \infty$$

$$0$$

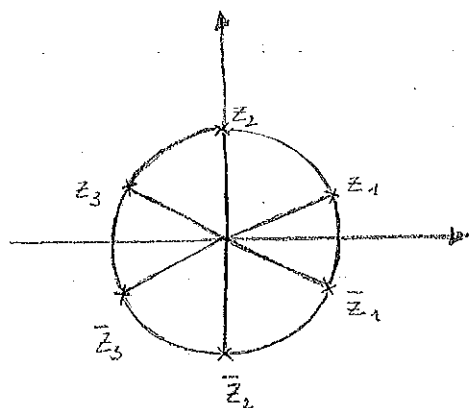
WWW.INGONLINE.BIZ

$$\frac{2\pi i}{e^{i2\pi p}} \left(1 - \frac{1}{e^{i2\pi p}}\right)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^6}$$

RADICI SESTE DI -1

Vogliamo trovare la primitiva



$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = 1$$

$$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

WWW.INCONLINE.BIZ

$$f(z) = \frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{z-z_2} + \frac{C}{z-z_3} + \frac{\bar{A}}{z-\bar{z}_1} + \frac{\bar{B}}{z-\bar{z}_2} + \frac{\bar{C}}{z-\bar{z}_3}$$

$$A = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)}$$

$$B = \frac{P(z_2)}{Q'(z_2)}$$

$$C = \frac{P(z_3)}{Q'(z_3)}$$

$$z_3 = e^{i\pi/6} \Rightarrow z_3^3 = e^{i\pi/2} = i$$

$$z_2 = 1 \Rightarrow 1^3 = 1$$

$$z_1 = e^{i\pi/6} \Rightarrow z_1^3 = e^{i\pi/2} = i$$

$$\frac{P(z)}{Q'(z)} = \frac{z^2}{6z^5} = \frac{1}{6} \frac{1}{z^3} \Rightarrow$$

$$\frac{5\pi}{6} \cdot 3 = \frac{5\pi}{2}$$

$$-i(z-a+ib) + i(z-a-ib)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{-i}{z-z_1} + \frac{i}{z-1} - \frac{i}{z-z_3} + \frac{i}{z-\bar{z}_1} - \frac{i}{z+1} + \frac{i}{z-\bar{z}_3} \right\}$$

$$\frac{1}{6} \left\{ 2 \operatorname{Re} \frac{-i}{z-z_1} = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{i}{z-z_1} \right) \right\}$$

$$2 \times 16$$

$$\frac{1}{(z+x)^2} + x^2$$

$$\frac{1}{(a+ib)^2} = \frac{1}{a^2-b^2} - \frac{2ib}{(a^2-b^2)^2}$$

$$\text{Res}(f, -i) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{1}{-2i} = \frac{1}{\frac{-1+i}{\sqrt{2}} (-2i)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi i (-i)} = \pi$$

FORMA DI HERMITE :

Riduzione di $\frac{P(x)}{Q(x)}$ in "fratti semplici"

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)}} = \frac{A}{x-x_1} + \dots$$

(SISTEMA LINEARE in $A_1, A_2, \dots$)

Nei complessi

$$\boxed{\frac{P(z)}{Q(z)}}$$

$$\begin{matrix} z_1 & \dots & z_k \\ m_1 & \dots & m_k \end{matrix}$$

RADICI DI Q
MOLTEPLICITÀ

$$Q(z) = (z-z_1)^{m_1} \dots (z-z_k)^{m_k}$$

$$\boxed{\frac{P(z)}{Q(z)}} = \frac{A_{11}}{z-z_1} + \frac{A_{12}}{(z-z_1)^2} + \dots + \frac{A_{1m}}{(z-z_1)^{m_1}} + \dots$$

$f(z)$ ha esponente $z_1, \dots, z_k$ come poli di ordine $m_1, \dots, m_k$

tutto quello che non ha z_1 è olomorfo in z_1

$\Rightarrow$ se formo lo sviluppo di Laurent quelli olomorfo e attribuito nullo

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_{11}}{z-z_1} + \frac{A_{12}}{(z-z_1)^2} + \dots + \frac{A_{1m}}{(z-z_1)^{m_1}} + \dots$$

$A_{11} \dots A_{1m}$ devono essere i coefficienti di Laurent di

$$f \text{ in } \boxed{z_1}$$

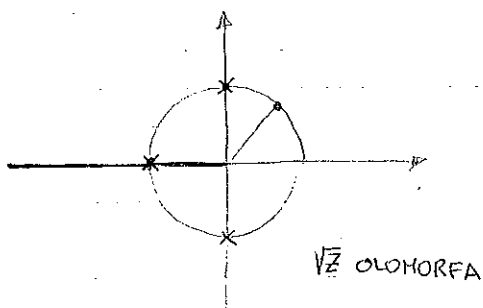
$$2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1) = \underbrace{-\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{1}{2}\right) \right)}_{\text{questo sarebbe quello con le coseno}} + i \underbrace{\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}\right) \right)}_{\text{questo è l'integrale cercato}}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}}$$

PRELIMINARE

Si può fare $\sqrt{z}$ su $\mathbb{C}$

WWW.INGONLINE.BIZ



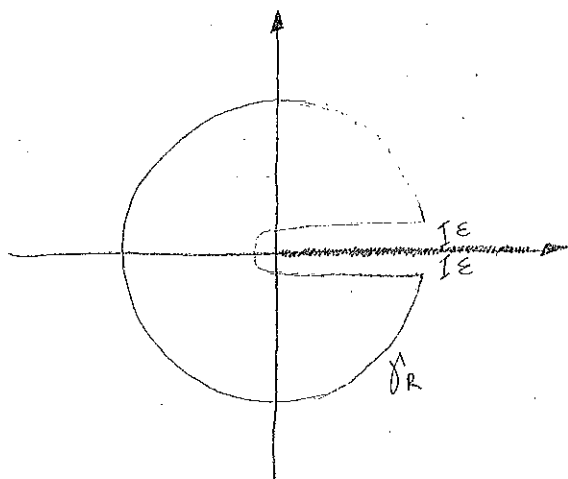
$$\sqrt{x} = e^{\frac{1}{2} \ln x}$$

$z^\alpha = e^{\alpha \ln(z)}$ ma l'algoritmo non è definito su tutto $\mathbb{C}$

Trovare 2 valori diversi come $\sqrt{-1}$ se posso di sopra e di sotto

Pero la posso definire TOGLIENDO UNA SEMIRETTA CON ORIGINE IN ZERO

Non posso integrare sul cerchio



γ_R è una curva $-\mathbb{R}^+$

$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)\sqrt{z}}$$

dove $\sqrt{z} \setminus \mathbb{R}^+$

E la determinazione di $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \ln z}$ che tende a $\sqrt{x}$ da sopra e tende a $-\sqrt{x}$ da sotto

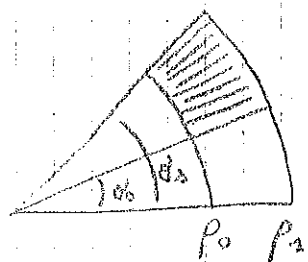
$$|z| = \sqrt{|z|}$$

$$\operatorname{Arg} = \frac{1}{2} \operatorname{Arg}(z)$$

$$\int f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta$$

$$\rho_0 \leq \rho \leq \rho_1$$

$$\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$$



WWW.INGONLINE.BIZ

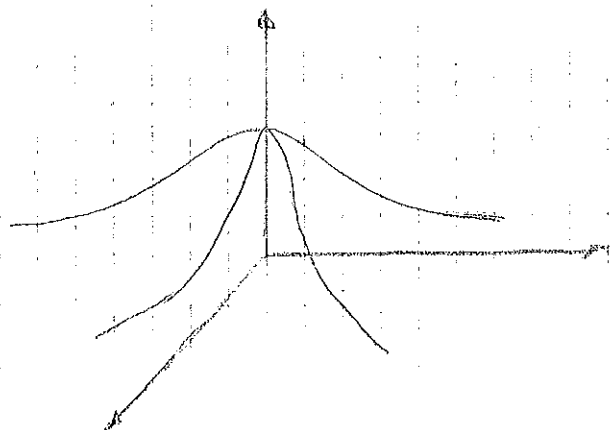
Esempio

$$\int_{R^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

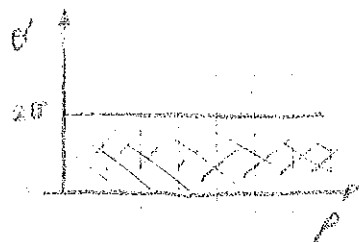
$$e^{-t^2} \times \text{metodo}$$

$$e^{-(\sqrt{x^2+y^2})^2}$$

si deve mettere il modulo



Se passo a coordinate polari



$$\int_{\rho \geq 0} \rho e^{-\rho^2} d\rho d\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

integra in d\theta

$$2\pi \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \pi \left[-e^{-\rho^2} \right]_0^{+\infty} = \boxed{\pi}$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

da svolgere

conviene mettere
 $x = \sin(x)$

teorema Fubini serve a ricondurre a integrali prima in una direzione e poi in un'altra

CALCOLIAMO INVECE

$$\int_A (x+y) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}} (x+y) dy = \int_{-1}^1 x \sqrt{1-x^2} dx + \int_{-1}^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}} dx$$

FUNZIONE DISPARI $\Rightarrow 0$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2} \left[\frac{1-x^2}{4} - \frac{1-x^2}{4} \right] dx = 0$$

$$\frac{1}{3} \int_{-1}^1 -2x (1-x^2)^{1/2} dx = -\frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} \Big|_{-1}^1 = 0$$

$$f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

C^1

$$J_\phi \quad \text{MATRICE JACOBIANA} \quad N \times N$$

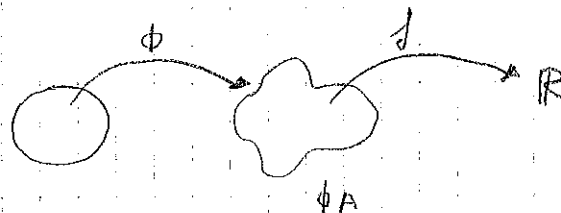
$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_N}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\int_A f(\phi(y)) \det J_\phi(y) dy$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx$$



Se $f \in \mathcal{L}^1$ oppure se $f \geq 0$ e $\det J_\phi \geq 0$ ammettendo $+\infty$

Problema 2

F derivabile?

Vale $F' = \int_0^{+\infty} \underbrace{y e^{-y} \cos(xy)}_{*} dy$

Si perché

$|*| \leq y e^{-y} \in \mathcal{L}^1$

In generale lo posso ripetere per una derivata K -esima qualunque

CONTRESEMPIO

$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} dy$

F non è continua in 0

infatti

$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} dy = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\frac{t}{x}} \frac{dt}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

$x \neq 0 \quad \downarrow \quad xy = t \quad y = \frac{t}{x}$

costante
in x

6 INTEGRALI "SUCCESSIVI"

WWW.ONLINE.BIZ

Teorema di Fubini - Tonelli

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad f \left(\underbrace{x}_{\mathbb{R}^n}, \underbrace{y}_{\mathbb{R}^n} \right) \quad \text{MISURABILE}$

a) caso $f \geq 0$ (l'integrale esiste in $[a, +\infty]$)

ALLORA esiste in un insieme di misura nulla

(1) Per quasi $\forall x$ di $\mathbb{R}^n$ la funzione che a $y \rightarrow f(x, y)$ è misurabile

(2) $x \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$ è misurabile

$$p(x) = |f(x)| = \frac{1}{|x|} \quad \text{su }]0, 1]$$

(Ricostruiamo che $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$)

$$f, g \in \mathcal{L} \quad \underline{f \cdot g = \frac{1}{x} \notin \mathcal{L}}$$

Se A è misurabile secondo Riemann $\Rightarrow A \in \mathcal{M}$

Se f è integrabile secondo Riemann / in senso improprio

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}$ e tutti gli integrali coincidono

TEOREMA DI LEBESGUE (convergenza dominante)

(f_n) successione di funzioni integrabili, f funzione

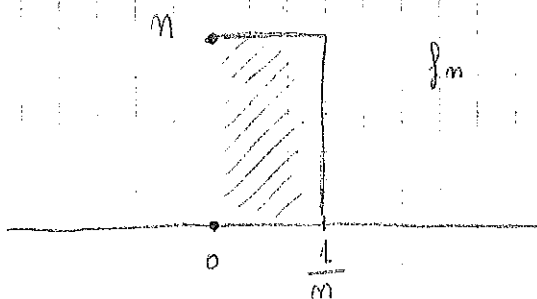
$f_n \rightarrow f$ puntualmente

$f_n(x) \rightarrow f(x)$

NON È VERO

$$\int f_n(x) dx \rightarrow \int f(x) \quad \text{infatti}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$f_n(x) \rightarrow 0$ perché

$$\text{se } x = 0 \quad f_n(x) = 0$$

se $x > 0$, prima o poi $\frac{1}{n}$ diventa minore di $x \Rightarrow f_n(x) \rightarrow 0$

d'interesse invece verso a 1

SUPPONIAMO CHE ESISTA UNA FUNZIONE

$$g \in \mathcal{L}$$

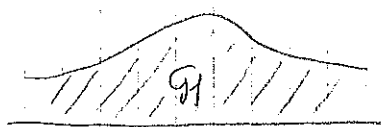
tale che $|f_n(x)| < g(x)$

$$\Rightarrow \boxed{f \in \mathcal{L}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int f(x) dx$$

4° FUNZIONI MISURABILI

Se $f \geq 0$ definisco $G_f = \{ (x, y) : 0 \leq y \leq f(x) \}$

$$G_f \in \mathbb{R}^{n+1}$$



(Epigrafico di f)

Dico che f è misurabile se $G_f \in \mathcal{M}_{n+1}$

se f cambia segno

f misurabile se f^+ , f^- lo sono

WWW.INGONLINE.BIZ

Dove

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$f = f^+ - f^-$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \geq 0 \end{cases} \quad |f| = f^+ + f^-$$

PROPRIETÀ

• Somma, prodotto di funzioni misurabili è misurabile

• Limite di funzioni misurabili è misurabile

• Se f_n sono misurabili se $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x$

$\Rightarrow f$ è misurabile

• Se f misurabile, se $f(x) = g(x)$ per $\forall x$ eccetto un insieme trascurabile $\Rightarrow g$ è misurabile

TERMINOLOGIA: Se esiste un insieme E di misura $\emptyset$ tale che

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus E$$

dico che $f = g$ "QUASI OVUNQUE"

$$\Rightarrow \boxed{A \in \mathcal{M}} \quad \text{e} \quad \underline{\underline{m(A) = \sum_{n=0}^{\infty} m(A_n)}}$$

In generale si ha anche che se $\{E_n\}$ sono insiemi qualunque

$$\boxed{m^*(\bigcup E_n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

18/10/2005

WWW.INGONLINE.BIZ

1°

MISURA (integrale) su $\mathbb{R}^N$

$\forall E \subset \mathbb{R}^N \quad m^*(E),$ misura esterna

$$\boxed{m^*(E)} = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(R_i) \quad \text{se} \quad E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i, \quad \begin{array}{l} R_i \text{ rettangoli} \\ \text{(disgiunti)} \end{array} \right\}$$

non servirebbe xke
se per si fa l'inf
anche se sono sovrapposti
e' uguale

2°

Individuo la classe degli insiemi misurabili

$\mathcal{M}$

3°

PROPRIETA'

complementari, per

$\mathcal{M}$ e' stabile per unioni e intersezioni numerabili eci se

$$\underline{A_n \in \mathcal{M}}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

$$\text{Se } A \in \mathcal{M} \Rightarrow \underline{cA \in \mathcal{M}} \quad \boxed{m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)} \quad \text{Se } A_n \text{ insieme}$$

$$\text{ma se } A_n \in \mathcal{M} \quad A_n \cap A_m = \emptyset, \quad n \neq m \Rightarrow \underline{m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)}$$

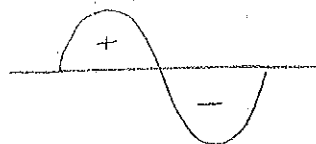
Se poi $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$

NULLA FUORI DA UN RETTANGOLO (ASSATO)

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx = m_{N+1} \left\{ (x, y) : x \in \mathbb{R}^N, 0 \leq y \leq f(x) \right\}.$$

Si dice che f è integrabile se è misurabile in $\mathbb{R}^{N+1}$

Se f cambia segno prendo
$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f^+(x) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f^-(x) dx$$



Se E insieme misurabile di $\mathbb{R}^N$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

Dico che f è integrabile su A (secondo Riemann)

se
$$f^* = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

È integrabile su $\mathbb{R}^N$ e
$$\int_A f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f^*(x) dx$$

Dovrei poi estendere questa nozione a insiemi illimitati (o funzioni illimitate)

Difetto di questo approccio

Potrei avere E_n misurabili $m(E_n) = 0$, $E_n \subset E_{n+1}$

Mi piacerebbe che $\bigcup E_n$ avesse misura zero

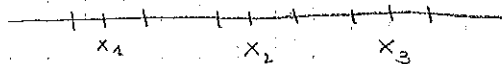
NON VA D'ACCORDO CON IL PASSAGGIO AL LIMITE

$z_1, \dots, z_m$

RADICI di Q non reali

$x_1, \dots, x_m$

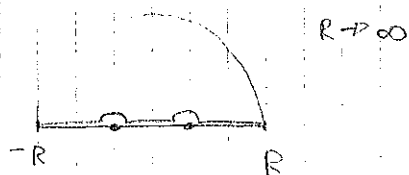
RADICI di Q reali semplici



Devo fare VP $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} \frac{P(x)}{Q(x)} dx =$

$$= 2\pi i \sum_{\substack{Q(z_j)=0 \\ \text{Im}(z_j) > 0}} \text{Res}(f, z_j) + \pi i \sum_K \text{Res}(f, x_K)$$

$$= -2\pi i \sum_{\substack{Q(z_j)=0 \\ \text{Im}(z_j) < 0}} \text{Res}(f, z_j) - \pi i \sum_K \text{Res}(f, x_K)$$



WWW.ONLINE.BIZ

Esempio

$$\frac{h(z)}{z} = \frac{e^{iz}}{z} \Rightarrow \frac{h(0)}{z} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx \quad (\text{V.P.}) = \pi i \text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = \pi i$$

Quindi $(\text{V.P.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x) + i \sin(x)}{x} dx = \pi i \Leftrightarrow$

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx = 0$$

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Se $\lambda > 0$ si fa $\text{Res}(f, -i)$

$$h_2'(-i) = \left. \frac{d}{dz} \frac{e^{-\lambda z}}{(z-i)^2} \right|_{z=-i}$$

$$= \left. -i\lambda e^{-\lambda z} (z-i)^{-2} - 2e^{-\lambda z} (z-i)^{-3} \right|_{z=-i}$$

$$\frac{-i\lambda e^{-\lambda}}{(-2i)^2} - \frac{2e^{-\lambda}}{(-2i)^3} = e^{\lambda} \left(\frac{\lambda i}{4} + \frac{2i}{8} \right) = \underline{i e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{4} + \frac{1}{4} \right)}$$

f non ha tutti coefficienti reali non è vero che i due residui sono coniugati

$$2\pi \frac{\lambda+1}{4} e^{-\lambda}$$

$$\text{se } \lambda > 0$$

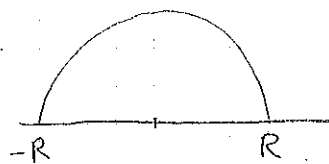
WWW.INGONLINE.BIZ

§ 2 residui devono venire uguali

Se non chiedo che il grado di $Q \geq \text{grado}(P) + 2$

La $\square$ vale nel senso che a sinistra dell' =

metto $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R e^{-\lambda x} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$



per esempio $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R x^2 e^{-\lambda x} dx = 0$ non ci sono poli

$$\frac{e^{\lambda t}}{R} \int_0^{\pi} e^{\lambda R \sin(t)} dt$$

quindi $|2| \leq \frac{e^{\lambda t}}{R} \int_0^{\pi} e^{\lambda R \sin(t)} dt$

se $\lambda \leq 0$ $\int_0^{\pi} e^{\lambda R \sin(t)} dt \leq 1 \Rightarrow \frac{e^{\lambda t}}{R} \rightarrow 0$

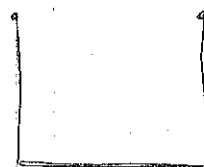
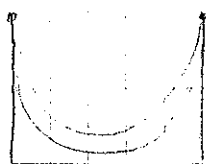
NOTA $\lambda < 0$

Altre $\int_0^{\pi} e^{\lambda R \sin(t)} dt \rightarrow 0$

$$f_R(t) = e^{\lambda R \sin(t)}$$

se $R \rightarrow \infty$

$$\int_0^{\pi} f_R(t) dt$$



Dato $\epsilon > 0$ trovo che $f_R \rightarrow 0$ unif su $[\epsilon, \pi - \epsilon]$

$$\sup_{[\epsilon, \pi - \epsilon]} f_R(t) = f_R(\epsilon) \rightarrow 0$$



mostra $\int_0^{\epsilon} f_R(t) dt < \epsilon$

$$\int_{\pi - \epsilon}^{\pi} f_R(t) dt \leq \epsilon$$

$\Rightarrow$ trovo che $\int_0^{\pi} f_R(t) dt \leq \epsilon$

$= 2\pi i \sum_{\substack{\alpha(z_j) = 0 \\ \text{Im}(z_j) > 0}} \text{Res}(f(z), z_j)$ se $\lambda < 0$

$= 2\pi i \sum_{\substack{\alpha(z_j) = 0 \\ \text{Im}(z_j) < 0}} \text{Res}(f, z_j)$

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

esempio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im} z_j > 0} \text{Res}(f, z_j)$$

POLI zero 2 : i e $-i$

DI ORDINE 2

$$\Rightarrow 2\pi i \text{Res}\left(\frac{z^2}{(1+z^2)^2}, i\right)$$

$$\text{oppure } -2\pi i \left(\frac{z^2}{(1+z^2)^2}, -i\right)$$

$$\frac{z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2} = \frac{h(z)}{(z-i)^2}$$

$$\text{dove } h(z) = \frac{z^2}{(z+i)^2}$$

$$\text{Res}(f, i) = h'(i)$$

$$h'(z) = \frac{2z(z+i)^2 - z^2(z+i)}{(z+i)^4} = \frac{2z(z+i) - 2z^2}{(z+i)^3}$$

$$h'(i) = 2 \frac{i \cdot 2i - i}{(2i)^3} = 2 \frac{-1}{2(-i)} = \frac{1}{4i}$$

$$2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = 2\pi i \text{Res}(f, i) = 2\pi i \frac{h''(i)}{2} \quad f(z) = \frac{h(z)}{(z-i)^3} \quad \text{dove } h(z) = 1/(z+i)$$

$$h'(z) = -3(z+i)^{-4}$$

$$h''(z) = 12(z+i)^{-5}$$

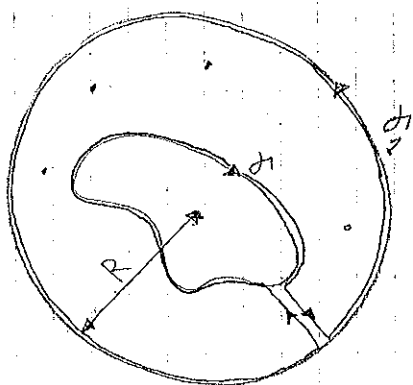
$$h''(i) = 12(2i)^{-5}$$

$$= \frac{12}{32i}$$

$\Rightarrow$

$$2\pi i \frac{12}{64i} = \frac{3}{8}\pi$$

Dimostrazione: Presumo R t.c. $|z_j| \in B(0, R)$



$\tilde{\gamma}$ curva nel disegno

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \sum \text{Res}(f, z_j)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz \right) =$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = -\text{Res}(f, \infty) + \sum \text{Res}(f, z_j)$$

Osservazione

Se $|z^2 f(z)| \leq \text{costante}$

per $|z|$ grande

$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^2}$ esiste

$$\Rightarrow \text{residuo}(f, \infty) = 0$$

Presumo $y(t) = R e^{i\tau}$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\text{Res}(f, \infty) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{-1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(R e^{i\tau}) R i e^{i\tau} d\tau$$

$$\Rightarrow |\text{Res}(f, \infty)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K \frac{R}{R^2} d\tau = \frac{\text{cost}}{R} \rightarrow \text{tende a } 0 \text{ se } R \rightarrow +\infty$$

$$|f(z)| \leq \frac{\text{cost}}{|z|^2}$$

13/10/2005

$f: A \setminus \{z_0\}$ olomorfa

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

SINGOLARITÀ ELIMINABILE →

Se $a_n = 0 \quad n < 0$, f olomorfa su A (z_0 è una singolarità eliminabile)
 e c'è solo un numero finito di $a_n \neq 0$, $n < 0$

$$f = \sum_{n=-K}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$a_{-K} \neq 0$$

POLO
DI ORDINE K

z_0 si chiama polo di ordine K, per esempio

$$\frac{1}{z^K}$$

$$(z_0 = 0)$$

SINGOLARITÀ ESSENZIALE →

ci sono infiniti $n < 0$ tali che $a_n \neq 0$

z_0 SINGOLARITÀ ESSENZIALE

Se $f: A \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ OLOMORFA

e tutti gli $z_1, \dots, z_m$ sono poli $\Rightarrow f$ MEROMORFA su A

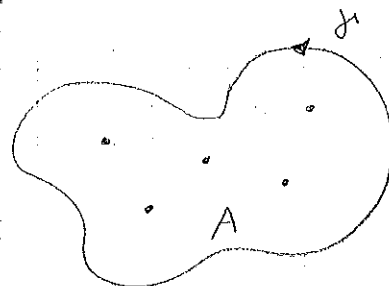
$f: A \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ OLOMORFA

z_0 si chiama SINGOLARITÀ ISOLATA

WWW.INGONLINE.BIZ

RESIDUO $(f, z_0) = \text{coeff } a_{-1}$ dello sviluppo

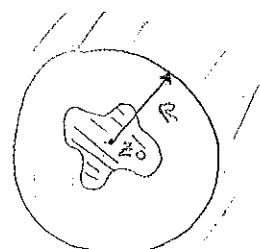
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Residui}$$



DEF SE $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa

$$A \supset \{z: |z| \geq R\} = C(0, R, +\infty)$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$



Se z_0 radice semplice di Q

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{(z-z_0)}$$

non occorre fattorizzare Q

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

REGOLA 2

Se $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$

Q polinomio

$$\left. \begin{array}{l} Q(z_0) = 0 \\ Q'(z_0) \neq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} z_0 \text{ radice} \\ \text{semplice di} \\ Q \end{array}$$

P polinomio, $P(z_0) \neq 0$

$$\text{Residuo}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

In realtà si potrebbe fare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im} z_j > 0} \text{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_j\right)$$

perché $\text{grado}(P) \leq \text{grado } Q - 2$

Q non ha radici reali

steno proporzionalmente sulla curva (semicirconferenza sotto)

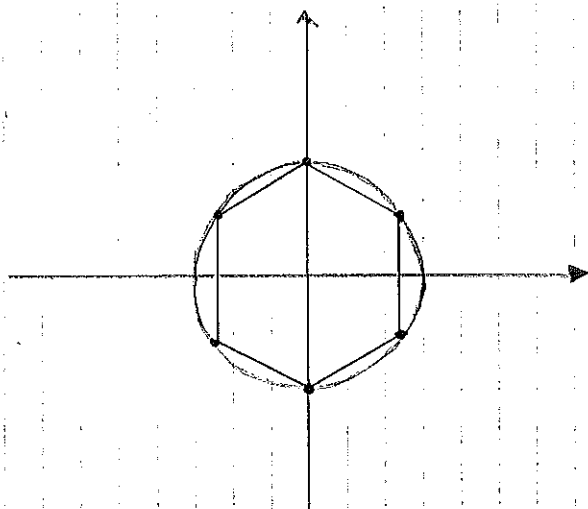
viene percorso in senso opposto

Esempio: calcolo del seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_j) > 0} \text{Res}\left(\frac{1}{1+z^6}, z_j\right)$$

$$z_j = ??$$

WWW.INGONLINE.BIZ



$$-1 = e^{\pi i}$$

$$z_k = e^{\frac{\pi i}{6} + k \frac{\pi i}{3}}$$

RADICI SESTE DI -1

$$z = e^{\frac{\pi i}{6}}, i, e^{\frac{5\pi i}{6}}$$

$$\text{Im}(z) > 0$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

$Q(z) = 1+z^6$ ha tutte radici semplici

$$Q(z) = 1+z^6$$

$$Q'(z) =$$

$$6z^5$$

$$\text{Residuo}\left(\frac{1}{Q}, z_j\right) = \frac{1}{6z_j^5}$$

$$= \frac{z_j}{6z_j^6} = -\frac{z_j}{6}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = -\frac{2\pi i}{6} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} + i - \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right\} = 2\pi i \left(-\frac{i}{3} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \pi$$

$$= \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\pi \frac{1 R e^{it}}{1+R^2 e^{2it}} dt$$

Se mando $R \rightarrow \infty$ secondo pezzo va a 0 perché sopra c'è R ma sotto R^2

$$\frac{1}{R} \int_0^\pi \frac{1 e^{it}}{\frac{1}{R^2} + e^{2it}} dt \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \text{Res} \left(\frac{1}{1+z^2}, i \right)$$

COME CALCOLO

$$\text{Res} \left(\frac{1}{z^2+1}, i \right)$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Nota che

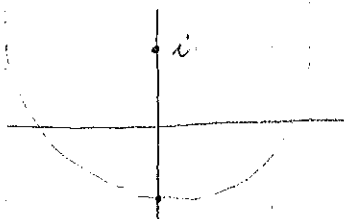
$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} * \frac{1}{z+i} = \frac{h(z)}{(z-i)} \quad \text{dove } h(z) = \frac{1}{z+i}$$

$h(z)$ claworja viemo a i , la posso sviluppare in serie di Taylor

$$h(z) = h(i) + h'(i)(z-i) + \frac{h''(i)}{2} (z-i)^2$$

in $B(i, \pi)$

$$\boxed{\pi < 2}$$



$$\Rightarrow f(z) = \frac{h(i)}{(z-i)} + h'(i) + \frac{h''(i)}{2} (z-i)^2$$

sviluppo in serie
di Laurent

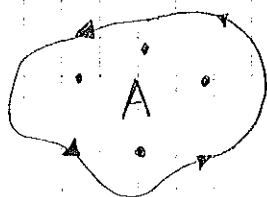
$$\text{Res}(f, i) = h(i) = \boxed{\frac{1}{2i}}$$

$$a_{-1} = \int_{\gamma} f(\xi) d\xi$$

su una qualunque γ con $I(\gamma, z_0) = 1$

TEOREMA (I teorema) DEI RESIDUI

A aperto limitato di $\mathbb{C}$, γ curva chiusa che circonda ∂A ,
 γ "pica in senso antiorario"



$$z_1, \dots, z_m \in A$$

f olomorfa in $A - \{z_1, \dots, z_m\}$

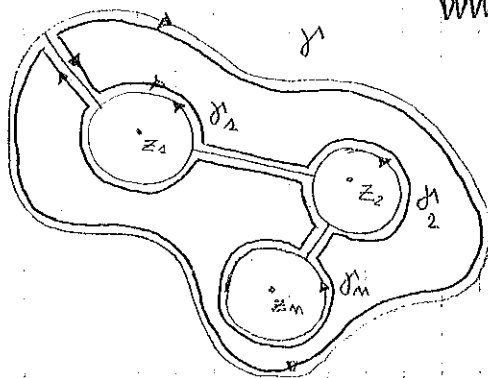
come se $z_1, \dots, z_m$ fossero singolarita'

Allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}(f, z_j)$$

DIM.

WWW.INGONLINE.BIZ



$$\gamma_1 = z_1 + \varepsilon e^{it}$$

$$\gamma_m = z_m + \varepsilon e^{it}$$

ε piccolo in modo che
 tutto sta in A

$$I(\gamma_j, z_j) = 1$$

$$j = 1 \dots m \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(\xi) d\xi = \text{Res}(f, z_j)$$

$\tilde{\gamma}$ deformabile a 1 punto $\tilde{\gamma}$ come nel disegno

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = 0$$

TEOREMA DI LIOUVILLE

Se $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, olomorfa

f limitata $\Rightarrow$ f è una costante

Dim.

Suppongo $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$

pono scrivere $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

dove $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi$

dove $\gamma_R(t) = R e^{it}$
 $2\pi R$

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_R} \frac{|f(\xi)|}{|\xi|^{n+1}} d\xi \leq \frac{M}{2\pi R^{n+1}} \int_{\gamma_R} d\xi = \frac{M}{R^n} \quad \left(\begin{array}{l} \rightarrow 0 \text{ se } R \rightarrow \infty \\ n \geq 1 \end{array} \right)$$

lunghezza della circonferenza

$\Rightarrow a_n = 0$ per $n \geq 1$

Teorema dell'Algebra

se $p(z)$ è un polinomio di grado ≥ 1

$\Rightarrow \exists z^*$ t.c. $p(z^*) = 0$

Dim. Se p non avesse radici $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ sarebbe olomorfa

su $\mathbb{C}$. Dato che il grado di $p \geq 1 \Rightarrow \lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$

($\Rightarrow f$ limitata) sarebbe costante f ma questo non è possibile

TEO: Se f è olomorfa in A

Se z_n è una successione in A , $z_n \rightarrow z$ in A e se $f(z_n) = 0$

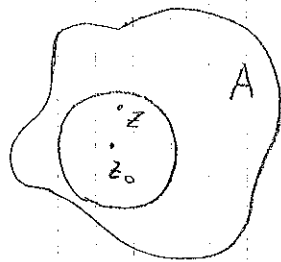
$\Rightarrow f \equiv 0$ su A si $\Rightarrow f(z) = 0$

$\Rightarrow$ f è analitica in z , cioè si sviluppa in serie di potenze

$$\boxed{\sum a_k (z - z_0)^k} \Rightarrow \text{è } \boxed{C^\infty}$$

DIMOSTRAZIONE

Prendiamo $z_0 \in A$, R tale che $\overline{B}(z_0, R) \subset A$



Finoché c'è un disco f sviluppabile in serie di potenze

PRENDO $\gamma(t) = z_0 + R e^{it}$

$0 \leq t < 2\pi$, e z in $B(z_0, R)$

Applico la formula di Cauchy

WWW.INGONLINE.BIZ

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0 + z_0 - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \left(\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \right) d\xi$$

modulo $|W| < 1$
minore di 1

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n d\xi =$$

infatti

$$\frac{1}{1 - W} = \sum_{n=0}^{\infty} W^n$$

se $|W| < 1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) (z - z_0)^n$$

questo sommatorio vale?

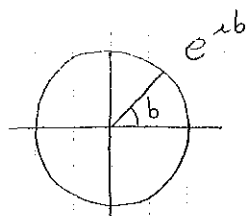
perché vale il sommatorio basta che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi) |z - z_0|^n}{|\xi - z_0|^{n+1}}$

sia uniformemente convergente

però
$$\frac{e^z}{1} = e^a \cdot e^{ib}$$

$(z = a + ib)$

periodico $2\pi i$

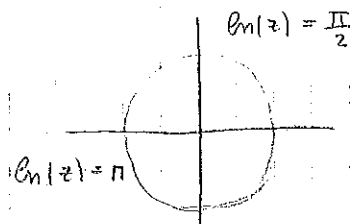


WWW.INGONLINE.BIZ

$$\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z)$$

argomento non è definito in modo univoco

$$\ln(a + ib) = \ln(|z| e^{i \arg(z)})$$



Non trovo una determinazione univoca che va bene in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Se tolgo una qualunque curva che parte da 0 ok!

DEF Data una curva γ e un punto z_0 fuori da γ , chiamo indice di γ rispetto a z_0 il numero

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz =$$

"numero di giri che γ fa intorno a z_0 "

Se $\gamma(t) = z_0 + R e^{it}$; $0 \leq t \leq 2\pi$

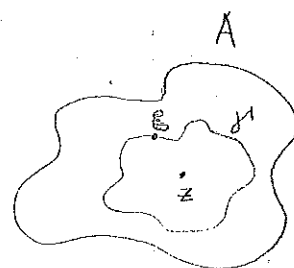
$$\Rightarrow I(\gamma, z_0) = 1$$

TEOREMA vale la seguente formula di **Cauchy**

Se $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ è **OLOMORFA** $\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$
 $z \notin \gamma$

dove γ ha indice 1 rispetto a z



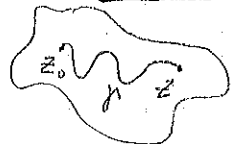
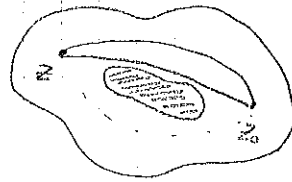
$$I(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$
 (qualunque sia γ)

funzione olomorfa il cui integrale su γ curva chiusa non fa 0
 (xke' curva chiusa contiene z_0)

10/10/2005

$f: A \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, A semplicemente connesso $\Rightarrow \exists$ primitiva F
 $F(z) = F(z_0) + \int_{\gamma} f(\xi) d\xi$
 Date 2 curve γ_1, γ_2 deformabili l'una nell'altra $\Rightarrow$
 $\times \gamma$ che esprime z_0 a z

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$



Per esempio se γ e chiusa, A semplicemente connesso

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Esempio

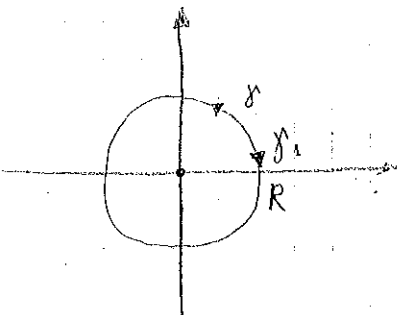
$$\frac{1}{z} = f(z)$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\gamma(t) = Re^{it}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi; \quad \gamma'(t) = iRe^{it}$$



$$\int_{\gamma} f(z) dt = \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) iRe^{it} dt = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}} dt =$$

$$= i \int_0^{2\pi} 1 dt = \boxed{2\pi i}$$

QUALUNQUE SIA R

$$\gamma_1(t) = Re^{-it}$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz = \underline{-2\pi i}$$

$$\int_0^{2\pi} f(Re^{-it}) iRe^{-it} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{-it}} (-i)Re^{-it} dt =$$

non posso porre della curva percorsa in un senso a quella percorsa
 nell'altro senza porre da 0 (quindi le 2 curve non sono deformabili
 l'una nell'altra)

Valgono tutte le regole di derivazione

$$f = f_1 + i f_2 \quad \text{e' olomorfa in } A \quad \Leftrightarrow$$

Cauchy Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} \end{cases}$$

$$w_1 = (f_1, -f_2)$$

$$w_2 = (f_2, f_1)$$

w_1 e w_2 sono **IRROTAZIONALI**

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\frac{\partial w_1)_1}{\partial y} = \frac{\partial (w_1)_2}{\partial x} \quad \Bigg| \quad \frac{\partial (w_2)_1}{\partial y} = \frac{\partial (w_2)_2}{\partial x}$$

per essere conservativo poi deve non avere buchi

Se A e' **semplicemente connesso** (per esempio $A = B(z_0, R)$)

$\Rightarrow w_1, w_2$ sono **conservativi** $\Rightarrow$

$$\exists w_1, w_2 \text{ tale che } \boxed{\nabla W_1 = w_1} \quad \boxed{\nabla W_2 = w_2}$$

$$\text{Se } \int_\gamma w_1 = W_1(z_2) - W_1(z_1) \quad / \quad \int_\gamma w_2 = W_2(z_2) - W_2(z_1)$$

$\forall \gamma$ che congiunge z_1 a z_2

$$\text{Chiamo } F = W_1 + i W_2$$

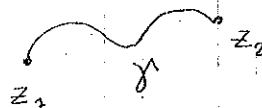
dico che $F' = f$

Verifico se verifica condiz. **C. R.**

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial W_1}{\partial x} = f_1 & \frac{\partial W_1}{\partial y} = -f_2 \\ \frac{\partial W_2}{\partial x} = f_2 & \frac{\partial W_2}{\partial y} = f_1 \end{array}$$

Se $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ OLOMORFA $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(z_2) - f(z_1)$$



per qualunque curva in A che congiunge z_1 a z_2

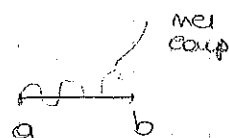
Nota

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$[a, b] \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\gamma} f$$

dove $\gamma(t) = a + t(b-a)$
 $0 \leq t \leq 1$



VALE ANCHE IL "VICEVERSA"

Se $\rho: A \rightarrow \mathbb{C}$ continua e se $\int_{\gamma} \rho(z) dz$ dipende solo da $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$.

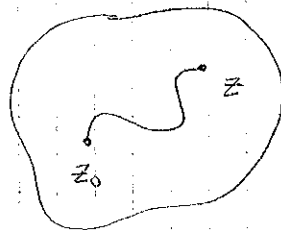
$\Rightarrow$ fmo uno $z_0 \in A$ e pongo $f(z) = \int_{\gamma} \rho(\xi) d\xi$ per γ

che congiunge

$$z_0 \text{ a } z$$

$\Rightarrow$ f è OLOMORFA

$$e \quad f' = \rho$$



CONSEGUENZA

Se $\{f_m\}$ una successione di funzioni OLOMORFE

commemo
 $\uparrow$
su $A \rightarrow \mathbb{C}$

$f_m \rightarrow f$, $f'_m \rightarrow \rho$, uniformemente

$$\sup_{z \in A} |f_m(z) - f(z)| \rightarrow 0$$

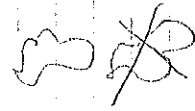
$$\sup_{z \in A} |f'_m(z) - \rho(z)| \rightarrow 0$$

$\Rightarrow f$ OLOMORFA e $f' = \rho$

Verifichiamo condizioni C.R.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 2x & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= 2x \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -2y & \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 2y \end{aligned}$$

OK!



A CONNESSO (di 1 solo pezzo)

conseguenza se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è OLOMORFA $\Leftrightarrow$ derivabile in $\mathbb{C}$
 $\Rightarrow f$ è costante

Dim. se f è reale $f_2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$

ma per C.R. $\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \Rightarrow f_1$ è costante

$|z|^2$ non è olomorfa

WWW.INGONLINE.BIZ

A suoi valori sono sempre reali (non è costante) quindi non è olomorfa su $\mathbb{C}$

Definizione: se $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ e γ è una curva C_1 in A

$\gamma: [a, b] \rightarrow A$

$$\int_{\gamma} f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

(INDIPENDENTE da parametrizzazione)

$$\begin{aligned} &= \int_a^b (f_1(\gamma) + i f_2(\gamma)) (\gamma_1' + i \gamma_2') dt \\ &= \int_a^b (f_1(\gamma) \gamma_1' - f_2(\gamma) \gamma_2') dt + i \int_a^b (f_2(\gamma) \gamma_1' + f_1(\gamma) \gamma_2') dt \end{aligned}$$

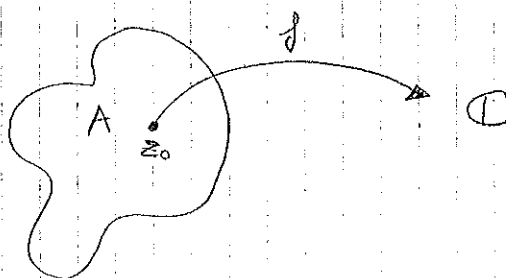
6/10/2005

www.ing.unipi.it/~D6081/INDEX.HTML

Funzioni derivabili in senso complesso (FUNZIONI OLOMORFE)

$A \subset \mathbb{C}$, aperto

$f: A \rightarrow \mathbb{C}$
 $z_0 \in A$



f derivabile in z_0 se esiste $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \boxed{f'(z_0)}$

$$\underline{f(z) = f(x+iy) = f_1(x+iy) + i f_2(x+iy)}$$

dove $f_1, f_2: A \rightarrow \mathbb{R}$

Possiamo anche scrivere $f_1(x, y)$ identificando A con

$$\{(x, y) : x+iy \in A\} \quad f_2(x, y)$$

$$\underline{(f_1, f_2) : A \rightarrow \mathbb{R}^2}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\underline{\exists f'(z_0)} \iff$$

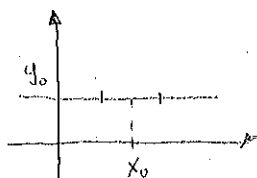
$$\underline{z_0 = x_0 + iy_0}$$

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0, y_0)}{h_1 + ih_2} = f'(z_0)$$

Lo sviluppo

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow 0} \frac{f_1(x_0+h_1, y_0+h_2) - f_1(x_0, y_0) + f_2(x_0+h_2, y_0+h_2) - f_2(x_0, y_0)}{h_1 + ih_2}$$

Se $f'(z)$ esiste



$$\Rightarrow \exists \lim_{h_1 \rightarrow 0} \left(\right)_{h_2=0}$$

$$\text{e } \lim_{h_2 \rightarrow 0} \left(\right)_{h_1=0}$$

e i due limiti devono essere uguali fra di loro.

$$\left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_i}$$

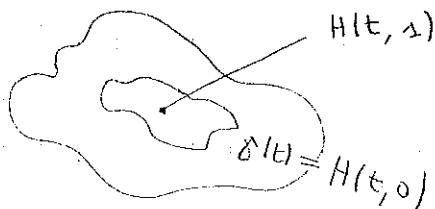
$$\left[\frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}$$

queste sono uguali.

* questa proprietà non è sufficiente
Dipende dalla forma di A , A non ha buchi

" A non ha buchi"

PRENDIAMO UNA CURVA CHIUSA γ IN A , DICO CHE γ contrattile
in A se



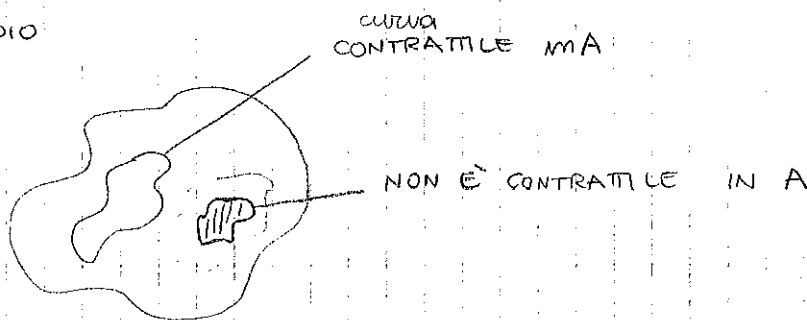
Se esiste $H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow A$
CONTINUA con

$$\left. \begin{aligned} H(t, 0) &= \gamma(t) \\ H(t, 1) &= \text{costante} \end{aligned} \right\}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Riesco a deformare curva di partenza fino ad arrivare ad una costante

esempio



A è SEMPLICEMENTE CONNESSO SE TUTTE LE CURVE CHIUSE SONO

CONTRATTILI

Indipendenza dalla parametrizzazione

$$[a, b] \xrightarrow{\gamma} A$$

$$A \xrightarrow{\gamma(t)}$$

$$\underbrace{[c, d]}_s \xrightarrow{(\varphi)} \underbrace{[a, b]}_t \xrightarrow{(\gamma)} \underline{A}$$

$$\underline{t = \varphi(s)}, \quad \varphi \text{ derivabile}$$

$$\gamma_1(t) = \gamma(\varphi(s))$$

$$\text{se } \begin{array}{l} \varphi(c) = a \\ \varphi(d) = b \end{array}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{\gamma_1} w d\gamma_1}_{\int_{\gamma} w d\gamma} =$$

$$\underbrace{\int_{\gamma_1} w d\gamma_1}_{\int_c^d w(\gamma_1(s)) \cdot \gamma_1'(s) ds}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\gamma_1'(s) = \frac{d}{ds} (\gamma_1(s)) = \frac{d}{ds} (\gamma(\varphi(s))) = \boxed{\gamma'(\varphi(s)) \varphi'(s)}$$

$$\int_c^d [w(\gamma(\varphi(s))) \cdot \gamma'(\varphi(s))] \underbrace{\varphi'(s) ds}_{(dt)}$$

$$dt = \varphi'(s) ds$$

$$\underbrace{\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} w(\gamma(t)) \gamma'(t) dt}_{\int_a^b w(\gamma(t)) \gamma'(t) dt} = \underbrace{\int_a^b w(\gamma(t)) \gamma'(t) dt}_{\int_{\gamma} w d\gamma}$$

L'integrale non dipende da velocità con cui percorro la curva ma da come è la curva

$$\text{se } \begin{array}{l} \varphi(c) = b \\ \varphi(d) = a \end{array}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{\gamma_1} w d\gamma_1}_{\int_{\gamma} w d\gamma} = - \underbrace{\int_{\gamma} w d\gamma}$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \times \begin{matrix} \text{mat} \\ \text{rota} \end{matrix} \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

$$e^{\sigma} \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix}$$

$$\underline{e^A} = \underline{e^a} \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} = \cos(\vartheta)$$

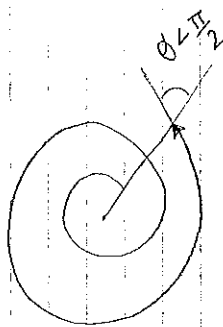
$$\underline{b} = \sin(\vartheta)$$

$$\underline{e^{tA}} = \underline{e^{ta}} \begin{bmatrix} \cos(tb) & -\sin(tb) \\ \sin(tb) & \cos(tb) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t) \\ Y(0) = Y(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(t) = e^{tA} Y(0)$$

$$\underline{a > 0}$$



WWW.INGONLINE.BIZ

$$\underline{|Y(t)| = e^{at}}$$

la matrice dopo ruota e basta

b velocità angolare

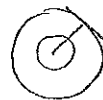
a di quanto si allunga

se a = 0 cerchi concentrici

se a < 0



$$\vartheta = \frac{\pi}{2}$$



ϑ angolo ottuso $\vartheta > \frac{\pi}{2}$

a = 0
b = 0 Tutto fermo

Trovo gli autovalore

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda \end{bmatrix} = (\cos \theta - \lambda)^2 + \sin^2 \theta = p(\lambda)$$

$$p(\lambda) = 0$$

$$\cos \theta - \lambda = \pm i \sin \theta$$

$$\lambda = \frac{\cos \theta}{a} \pm i \frac{\sin \theta}{b} = e^{\pm i \theta}$$

nei reali non ha autovalore xke la matrice ruota

Trovo autovettori: infiniti autovettori linearmente dipendenti

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta - \cos \theta + i \sin \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -i \sin \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cos \theta x - \sin \theta y = \lambda_1 x \\ \sin \theta x + \cos \theta y = \lambda_1 y \end{cases}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

si prende la I riga

$$-(\sin \theta) i x = \sin \theta y$$

$$(\cos \theta - \lambda_1) x = \sin \theta y$$

sostituendo
 λ_1
||
 $\cos \theta + i \sin \theta$

$$y = -i x$$

$$\lambda_1 = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ per es.}$$

$$\lambda_2 = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ per es.}$$

ortog.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} = B^H$$

trasposta
coniugata

$$\frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

B può esprimere un cambio di base

"CAMBIO DI BASE"

per es.

Supponiamo che a siano $\boxed{v_1 \dots v_N} \in \mathbb{R}^N$, base di $\mathbb{R}^N$

su cui A diventa diagonale

Se cerchiamo un generico $\boxed{v} = c_1 v_1 + \dots + c_N v_N$

$$\boxed{Av} = \boxed{\lambda_1 c_1 v_1 + \dots + \lambda_N c_N v_N}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Av_1 = \lambda_1 v_1}, \dots, \boxed{Av_N = \lambda_N v_N}$$

$v_1, \dots, v_N$
AUTOVETTORI

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{v} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Av} = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_1 \\ \vdots \\ \lambda_N c_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \lambda_1 v_1$$

A DIVENTA matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Allora, se $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \underline{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\underline{B} = \left[\begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_N \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \right]$$

$$\underline{B} \underline{e}_1 = v_1$$

$$\underline{B} \underline{e}_N = v_N$$

B invertibile

Allora

$$\boxed{B^{-1}AB} = \boxed{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

infatti ~~prossimo~~ $w = w_1 \underline{e}_1 + \dots + w_N \underline{e}_N$

$\Rightarrow$ * vale se $t \in [-c, c]$, dato che c è arbitrario vale $\forall t$

$$t \rightarrow e^{tA} = M(t)$$

$$\Rightarrow M'(t) = A M(t)$$

Sistema di Equazioni lineari omogenee del primo ordine in $\mathbb{R}^N$

$$\begin{cases} Y'(t) = A Y(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 \dots a_{1n}y_n \\ \vdots \\ y'_m = a_{m1}y_1 \dots a_{mn}y_n \end{cases}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$Y(t) = e^{tA} Y(0)$$

$$Y(0) = e^{0A} Y(0) = Y(0)$$

$$Y'(t) = (e^{tA})' Y(0) = A e^{tA} Y(0) = A Y(t)$$

ho verificato che è soluzione, perché è unica questa e la soluzione

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi}}{(m+1)!} x^{m+1} \quad 0 < \xi < x$$

$\Rightarrow R_m$
Resto di Lagrange

$$R_m \leq \frac{e^{|x|} |x|^{m+1}}{(m+1)!}$$

questo va a 0 molto velocemente

$\Rightarrow$ quello mi dà una buona appross.

$$\underline{e^A} = \begin{pmatrix} e^a & be^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$$

per $t \in \mathbb{R}$ $A(t) = e^{tA}$

$$\underline{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \quad (\text{serie di funzioni } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N^2})$$

Per trovare $A'(t) = \sum \frac{d}{dt} \frac{t^n}{n!} A^n$

$$\sum \frac{n t^{n-1}}{n!} A^n = A \sum \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} = A e^{tA}$$

4/10/2005

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\underline{A} \quad [N \times N]$$

$$\underline{e^A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

(nel senso che) $\underline{e^A} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!} \iff \lim_{m \rightarrow \infty} \left| B - \sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!} \right| = 0$ *

per definire il limite mi serve = varie possibilità
definire $|A|$

① $\underline{A} = (a_{ij})$ $|A| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

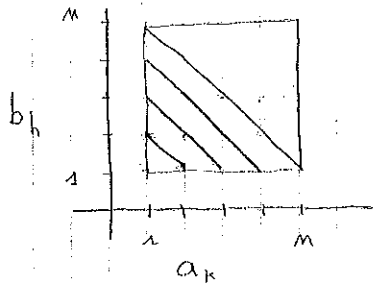
* $\Rightarrow$ Ogni componente della somma parziale $\sqrt{\text{rende alla CORRISPONDENTE}}$

COMPONENTE DI B

$\underline{e^A}$ esiste perché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{A^n}{n!} \right| < +\infty$

$$\sigma_m' = \sum_{k=1}^m |a_k|$$

$$\sigma_m'' = \sum_{h=1}^m |b_h|$$



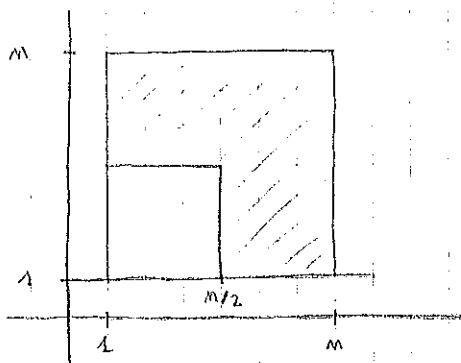
$$S_m' S_m'' = \sum_{k,h=1 \dots m} a_k b_h =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^k a_k b_{k-h}}_{\text{fmo alla diagonale}} + \underbrace{\sum_{\substack{k=1 \dots m \\ h > k}} a_k b_h}_{a_k b_{m-k}} = \sum_{k=1}^m c_k + \underbrace{\sum_{\substack{k=1 \dots m \\ h=k+1 \dots m}} a_k b_h}_{R_m}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$|R_m| \leq \sum_{\substack{k=1 \dots m \\ h=k+1 \dots m}} |a_k| |b_h| \leq$$

$$\sigma_m' \sigma_m'' - \sigma_{\frac{m}{2}}' \sigma_{\frac{m}{2}}''$$



$$\sum |a_m| \sum |b_m| - \sum |a_m| \sum |b_m| = 0$$

$$C_m = \sum_{k=1}^m a_k b_{m-k}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$$

$$a_n b_{m-m}$$

$$\Rightarrow e^A e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n \frac{A^m}{m!} \frac{B^{n-m}}{(n-m)!} \right) = C_n$$

quindi $f'(x) = \frac{-\ln(1-x)}{x}$

$f(0) = -1$

$f(x) = \int_0^x \frac{-\ln(1-t)}{t} dt + f(0)$ con $f(0) = 0$

Esponenziale di una matrice

e^A A matrice $m \times m$
matrice $N \times N$

Legata alla risoluzione di $Y'(t) = AY(t)$

SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI $N \times M$

$y_1' = a_{11}y_1 + \dots + a_{1m}y_m$

$y_m' = a_{m1}y_1 + \dots + a_{mm}y_m$

WWW.INGONLINE.BIZ

$Y(t) = e^{tA}$

e^A

se A fosse 1 NUMERO REALE

$A \in \mathbb{R}$

$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$

$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$

$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m \text{ volte}}$

le matrici o polinomi moltiplicare

matrice $N \times N \approx \mathbb{R}^{N^2}$

HA SENSO

$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} = \lim_{m \rightarrow \infty}$

$\sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!}$

se tutti i coeff. $\rightarrow$ a coeff. della matrice della matrice

Se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$

Non è detto che se $f \in C^{\infty}$ (es $\exists a, b \in \mathbb{R}$)

se $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$ CONVERGE

$\Rightarrow$ la serie è uguale a f ($e^{-\frac{1}{|x|}} = f(x)$)

TEOREMA

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$

$f \in C^{\infty}$

se $\exists$ una costante M per cui

$f^{(k)}(x) \leq M^k \quad \forall x \in I$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad \forall x \in I$

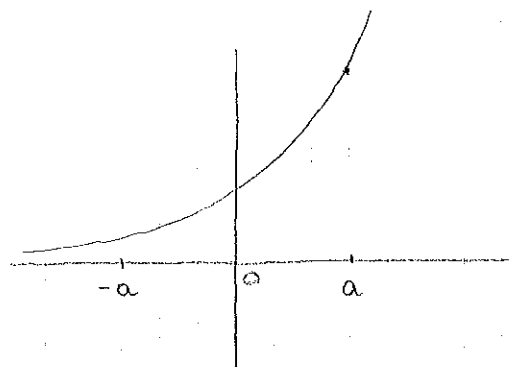
Esempio

$f(x) = e^x$

$f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k$

$I = [-a, a]$

WWW.INGONLINE.BIZ



$\max_{-a \leq x \leq a} e^x = e^a$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

se $-a \leq x \leq a$

Dato che a arbitrario vale $\forall x$

3/10/2005

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Raggio di convergenza:

$$= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} = \bar{R}$$

- la serie converge uniformemente a f su $\forall B(z_0, R)$, $R < \bar{R}$

- Non converge in ogni z con $|z-z_0| > \bar{R}$

$$\bar{B}(z_0, R) = \{ |z-z_0| \leq R \}$$

$$\underline{B}(z_0, R) = \{ |z-z_0| < R \}$$

Osservazione: Anche se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

si può def $\bar{R} = \frac{1}{\max \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

WWW.INGONLINE.BIZ

Insomma f è C^∞ e vale

$$f^{(k)}(z) = \sum a_n n(n-1) \dots (n-k+1) (z-z_0)^{n-k}$$

Esempio

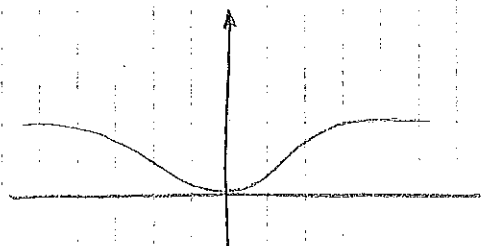
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = f(z) \quad [z_0 = 0]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ dispari,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

$$f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \quad \text{se } x \neq 0$$

$$0 \quad \text{se } x = 0$$



$$f^{(k)}(0)$$

NON È ANALITICA
(viene a zero)

N.B. Se la guardo in $\mathbb{C}$ f non è "BUONA" in 0

se $f(z) = e^{-\frac{1}{|z|}}$

NO / SBAGLIATO

$$f(x+iy) = e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

non è derivabile in 0 ZERO, NON ANHEITE UNITE PER $z \rightarrow 0$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} \quad \text{Limite in } \mathbb{C}$$

$$= \lim_{x,y \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{x+iy}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-iy}{x^2+y^2} e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} e^{-\frac{1}{|x|}} = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{|y|} e^{-\frac{1}{|y|}} = 0$$

Esempio

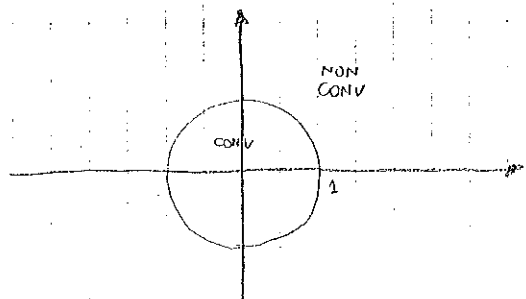
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad z_0 = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$|a_n| = 1 \quad \forall n$$

$$\bar{R} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{1}} = 1$$

Si realta' a sa quanto fa $f(z)$



Può essere $\bar{B}(z_0, \bar{R}) = \emptyset$, se $\bar{R} = 0$ ($C = +\infty$), può essere $\bar{B}^0(z_0, \bar{R}) = \mathbb{C}$ se $\bar{R} = +\infty$ ($C = 0$)

FATTI !

a $\rightarrow$ f è continua su B^0 ($\forall R < \bar{R}$ f è continua su $B(z_0, R)$)

LIMITE UNIFORME DI FUNZIONI CONTINUE

b $\rightarrow$ Dato un qualunque k intero la serie $\sum_{m=k}^{\infty} a_m m(m-1) \dots (m-k+1) (z-z_0)^{m-k}$
 $k=1$ $\sum_{m=1}^{\infty} a_m m (z-z_0)^{m-1}$ $k=2$ $\sum_{m=2}^{\infty} a_m m(m-1) (z-z_0)^{m-2}$

(lelle derivate)

HANNO TUTTE LO STESSO RAGGIO DI CONVERGENZA

$k=1$

$$\sqrt[n]{|a_m m|} = \sqrt[n]{|a_m|} \sqrt[n]{m} \Rightarrow \left[\frac{1}{\bar{R}} \right]$$

$k=2$

$$\sqrt[n]{|a_m| m(m-1)} = \sqrt[n]{|a_m|} \sqrt[n]{m} \sqrt[n]{m-1} \Rightarrow \left[\frac{1}{\bar{R}} \right]$$

$\sqrt[n]{p(m)} \rightarrow 1$
 un polinomio qualsiasi

WWW.INGONLINE.BIZ

Se mi restringo ai reali

$(z_0 = x_0 \in \mathbb{R}) (a_k \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow f$ ha derivata k -esima

$$f^{(k)}(x) = \sum_{m=k}^{\infty} a_m m(m-1) \dots (m-k+1) (x-x_0)^{m-k}$$

Una volta dimostrato che quella serie converge per le sue derivate $\Rightarrow$ vale questo

f è continua su B , anzi è $C^\infty(B^0)$

ha derivata k -esima $\forall k$ $f^{(k)} = \sum_{m=k}^{\infty} a_m m(m-1) \dots (m-k+1) (x-x_0)^{m-k}$

$$c \rightarrow f^{(k)}(z_0) = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_m m(m-1) \dots (m-k+1) (z-z_0)^{m-k} \right)_{z_0} = [a_k k!]$$

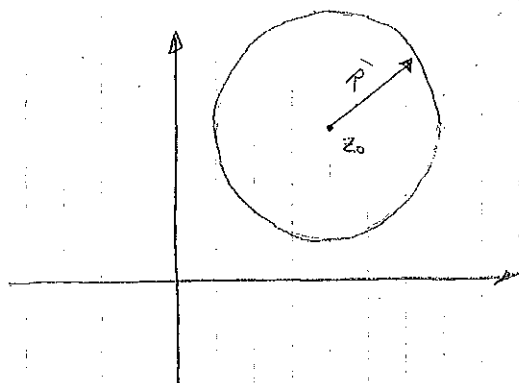
ovè

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

sempre nulla
 a meno che
 $m \neq k$

f è somma della sua serie di Taylor (in B)

LE SERIE DI POTENZE SONO SOMMA DELLA PROPRIA SERIE DI TAYLOR



Converge in $\forall$ punto interni al disco
non converge fuori
Sul bordo non lo so

R , raggio di convergenza

29/03/2005

Apostol "Calcolo" Volume 3 1° capitolo

WWW.INGONLINE.BIZ

Serie di potenze su $\mathbb{C}$

$a_n \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = f(z)$$

$$a_n \sim \frac{1}{n!} (z - z_0)^{n-1}$$

Teorema:

Supponiamo esista

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = c \in [0, +\infty]$$

poniamo $\bar{R} = \frac{1}{c}$

$$\begin{aligned} \text{se } c=0 & \quad \bar{R} = +\infty \\ \text{se } c=+\infty & \quad \bar{R} = 0 \end{aligned}$$

$\bar{R}$ si chiama RAGGIO DI CONVERGENZA della serie

1) $\rightarrow$ se $R < \bar{R}$ la serie di funzioni CONVERGE UNIFORMEMENTE

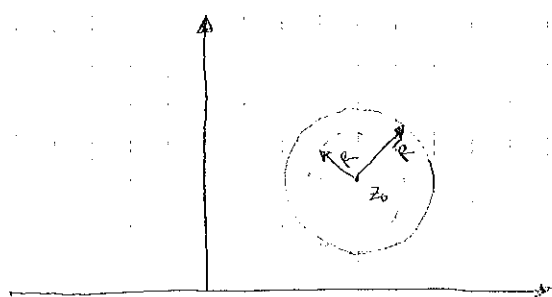
$$\text{su } B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq R\}$$

In particolare

se $|z - z_0| < \bar{R} \Rightarrow \sum a_n (z - z_0)^n$ CONVERGE UNIFORMEMENTE

2) se $|z - z_0| \geq \bar{R}$

la serie non converge in z



$\sigma_m - \sigma_m < \varepsilon$ se m, m sono grandi e σ_m successione convergente di numeri

$\Rightarrow$ f verifica proprietà di Cauchy

Quindi se $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} < +\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ UNIFORMEMENTE CONVERGENTE

esp. $\left[\sum_{k=1}^m f_k \right] \xrightarrow{\text{UNIF. tende}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right] \Rightarrow$

WWW.INGONLINE.BIZ

1) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ È CONTINUA

2) $\Rightarrow \int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_A \left(\sum_{k=1}^m f_k(x) \right) dx =$
 $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \int_A f_k(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n(x) dx$

3) $\Rightarrow$

ALTRO FATTO

Se $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} < +\infty$

$f_n \in C^1$ (a)

$\sum_{n=1}^{\infty} \|f'_n\|_{\infty} < +\infty$

(b)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n = F \in C^1$ e $F' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n \sim \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$

Dimostrazione

Chiamo $F_m(x) = \sum_{k=1}^m f_k$ $F_m \rightarrow F$ uniformemente per (a)

$F'_m = \sum_{k=1}^m f'_k \rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} f'_m = G$ per la (b)

Per il teorema di prima

$F \in C^1$ e $F' = G$

La derivata non va d'accordo con conv. uniforme, ma c'è un teorema.

Teorema: Se $f_n \rightarrow f$ PUNTUALMENTE E se $f'_n \rightarrow g$ UNIFORMEMENTE $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $\Rightarrow f$ DERIVABILE e $f' = g$

se f'_n ESISTONO,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ la derivata di f_n
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = g$ limite della derivata di f_n

(Nel controesempio $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ limite)

$f_n \rightarrow 0$ f'_n NON HANNO

Dimostrazione:

So che $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$

per il teorema sugli integrali

Fisso x e faccio tendere $n \rightarrow \infty$

per conv. puntuale $f_n(x) \xrightarrow{\text{tende}} f(x)$

e pure $f_n(a) \xrightarrow{\text{tende}} f(a)$

$\int_a^x f'_n(t) dt \xrightarrow{\text{tende}} \int_a^x g(t) dt$

questo per conv. uniforme

$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$

$\forall x$

$\Leftrightarrow$

$g = f'$

questo mi dice che $g(t)$ è la derivata di f

WWW.INGONLINE.BIZ

$\mathbb{X} = \{ f: A \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{CONTINUE} \}$

$\|f\|_\infty = \max_{x \in A} |f(x)|$

A COMPATTO (A LIMITATO E CHIUSO) in $\mathbb{R}^n$

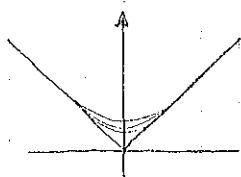
anche prima quando dicevo A era limitato e chiuso

TEOREMA:

$\mathbb{X}$ È COMPLETO, CIOÈ OGNI (SUCCESIONE DI CAUCHY) (f_n) AMMETTE LIMITE $\exists f: f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE

$(\forall \epsilon \exists \bar{n} : \text{se } n, m \geq \bar{n} \implies \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon)$

Invece $\mathbb{X}_1 = C^1([a, b])$, NON È COMPLETO (rispetto a $\|\cdot\|_\infty$)



f_n sono in $\mathbb{X}_1$ verifica coochy ma non è derivab.

zane si vede?

$$|L_1(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow |L_1(f_m) - L_1(f)| = f_m \rightarrow f \text{ uniformemente}$$

$$|L_1(f_m - f)| \leq \|f_m - f\|_\infty \Rightarrow 0$$

Allo stesso modo si tratta L_2 $|L_2(f)| =$

$$= \left| \int f(x) dx \right| \leq \int_A |f(x)| dx \leq \text{mis}(A) \|f\|_\infty$$

dimostrazione già fatta nella Sez di vera

Operazione di derivata?

WWW.INGONLINE.BIZ

E' lineare

$$\begin{aligned} D(f) &= f' \\ D(f_1 + f_2) &= D(f_1) + D(f_2) \\ D(cf) &= cD(f) \end{aligned}$$

ATTENZIONE $\rightarrow$ la derivata non è definita su tutto $X = C^0([a, b])$

Non è vero che tutte le funz. continue sono derivabili.

D RESTITUISCE UN'ALTRA FUNZIONE (non un numero come prima)

POSSO PENSARE DI PRENDERE $X_1 = \{ \text{funzioni derivabili con derivato continuo} \}$

$$X_1 = C^1([a, b])$$

$$D: X_1 \rightarrow X$$

Se considero X_1 come sottoinsieme X (funz. derivabili sono continue)

posso chiedermi se D continua. cioè è vero

$$f_m \rightarrow f \text{ UNIFORMEMENTE} \Rightarrow Df_m \rightarrow Df \text{ UNIF}$$

QUESTO NON È VERO

Questo fa vedere che ci sono applicaz. lineari non continue

~~funzioni tendono uniformemente a 0~~
ma le derivate no x_k e sono oscillazioni

→ ho una funzione di limite

Questo spazio vettoriale ha dimensione infinita (num. vettori linearm. indipendenti)

$f_1, \dots, f_m \in X$ sono linearm. indipendenti se

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_m f_m = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$$

Dimensione di X numero di vettori linearm. indipendenti che generano X

Insieme di prima, delle funzioni continue, non ha dimensione finita
se per esempio $A = [0, 1]$ $C^0([0, 1])$ SONO SPAZIO VETTORIALE DI

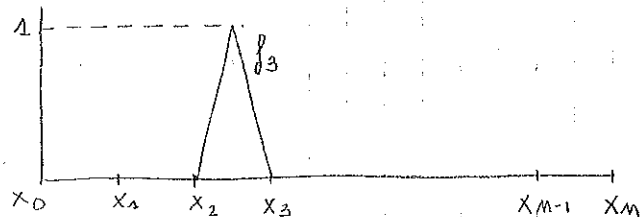
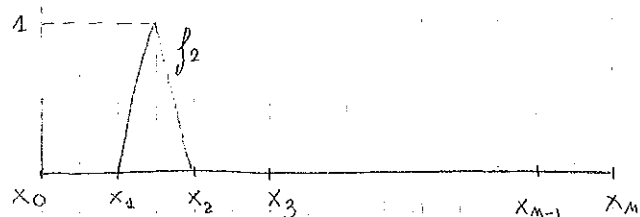
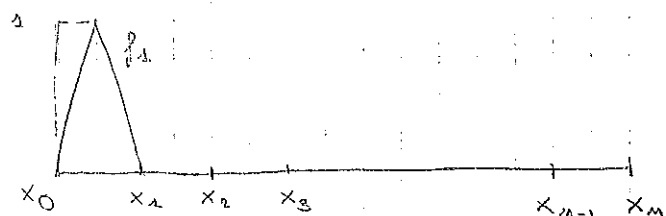
DIMENSIONE INFINITA

Come mai?

Fissiamo N intero trovo N funzioni continue linearm. indipendenti

Perché vale per $\forall N$ e sono funzioni indipendenti quante ne voglio

Come trovo funz. linearm. indipendenti?



Diretta: WWW.INGONLINE.BIZ

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_N f_N = 0$$

vuol dire che

$$c_1 f_1(x) + \dots + c_N f_N(x) = 0,$$

$$\text{se } x \in [x_0, x_m]$$

$$\text{Se } x \in [x_0, x_1]$$

$$f(x) = c_1 f_1(x) \Rightarrow c_1 = 0$$

così per gli altri intervalli

Nello stesso modo se $x \in [x_1, x_2]$

$$f(x) = c_2 f_2(x) \Rightarrow c_2 = 0$$

così TUTTI i $c_k = 0 \Rightarrow$ quindi queste funzioni sono indipendenti

CONSEGUENZA

Se $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE

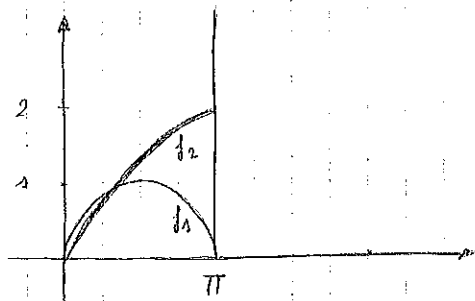
$\Rightarrow f$ continua in x_0

Se f_n continua in x_0

Limite uniforme di fuz: continue e continuo, limite puntuale no.

$$f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

su $[0, \pi]$



$$f_1 = \sin x$$

$$f_2 = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Osservazione generale

Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente

$\Rightarrow f_n \rightarrow f$ puntuale

$$f_n(x) = x \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \rightarrow x$$

limite notevole = 1

Se chiamo

$$f(x) = x$$

$\Rightarrow f_n \rightarrow f$

UNIFORMEMENTE

mostriamo che

$$|f_n(x) - f(x)| \leq x$$

$$n \sin \frac{x}{n} \leq n \frac{x}{n} = x$$

usando Taylor

$$n \sin \frac{x}{n} = n \left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{x^2}{n^2}\right) \right) = x + n o\left(\frac{x^2}{n^2}\right)$$

27/09/2005

$$f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right), \quad f(x) = x$$

Allora $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE

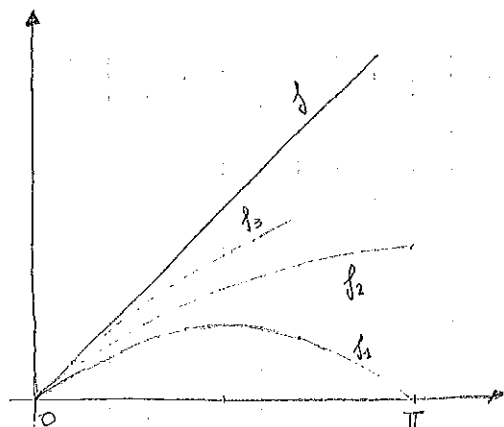
$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$$

Per vedere

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |f(x) - f_n(x)|$$

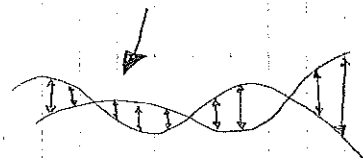
E VEDIAMO CHE TENDE A 0

WWW.INGONLINE.BIZ



Distanza f_m da f , max delle distanze puntuali

max scarto su A



SE $f_m \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE su A

$$\Rightarrow \int_A f_m(x) dx \xrightarrow{\text{tende}} \int_A f(x) dx$$

per es. $\int_a^b f_m(x) dx \xrightarrow{\text{tende}} \int_a^b f(x) dx$

Dimostrazione: So per le proprietà degli integrali

$$\left| \int_A f(x) dx \right| \leq \int_A |f(x)| dx$$

WWW.INGONLINE.BIZ

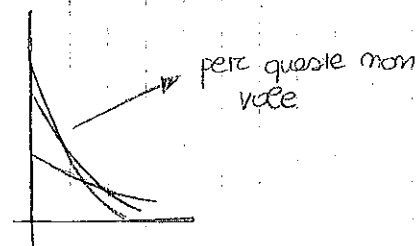
Allora

$$\left| \int_A f_m(x) dx - \int_A f(x) dx \right| = \left| \int_A (f_m(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_A |f_m(x) - f(x)| dx$$

$$\leq \int_A \left(\sup_{x \in A} |f_m(x) - f(x)| \right) dx = \underbrace{\text{mis}(A)}_{\text{misura}} \underbrace{\|f_m - f\|_{\infty}}_{\substack{\text{se ho 1 convergenza} \\ \text{uniforme} \rightarrow 0}}$$

costante

$$\Rightarrow \int_A f_m(x) dx \xrightarrow{\text{tende}} \int_A f(x) dx$$



Supponiamo $f_m \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

Supponiamo che per ogni $n \exists$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n$$

ALLORA:

① $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = l$

② $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

f_n converge ma f no $\Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1$$

1

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

0

in pratica

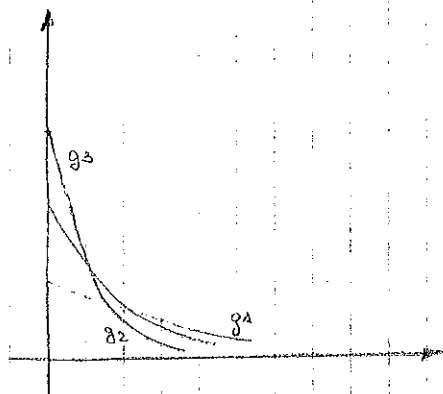
I difetto: NON POSSO INVERTIRE L'ORDINE DEI LIMITI

II difetto: Mi piacerebbe che se $f_n \rightarrow f$, $\Rightarrow \int_A f_n \rightarrow \int_A f$

tende

NON E' VERO PER LA CONVERGENZA PUNTUALE

$$f_n(x) = m e^{-mx}$$

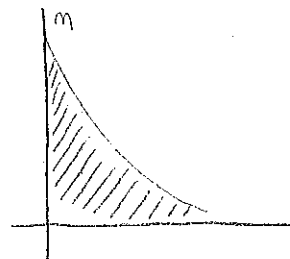


WWW.INGONLINE.BIZ

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} m e^{-mx} dx \quad \text{Sostituz. } [mx = y, \quad m dx = dy]$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-y} dy = -e^{-y} \Big|_0^{\infty} = 1$$

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = 1 \quad \text{qualunque sia } n$$



$$f_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{se } x \neq 0$$

$$f_n(0) \rightarrow +\infty \quad \text{se } x = 0$$

se penso A $[0, +\infty[$ (aperto)

$$f_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{puntualmente}$$

però integrale $\int_0^{+\infty} 0 = 0$

$$1 = \int_0^{+\infty} f_n(x) \neq \int_0^{+\infty} 0 = 0$$

Teorema : se (x_n) è di Cauchy $\Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$

coe $\exists \bar{x}$ per cui

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{x}\| = 0}$$

Collegato alla completezza dei numeri reali $\rightarrow$ nei razionali non è vero $(\mathbb{Q}) \times \mathbb{K}$ e sono successioni in $\mathbb{Q}$ (q_n) $q_n \rightarrow \sqrt{2}$ ovvero limiti di successioni di num. razionali possono non essere razionali.

R COMPLETO

SUCCESSIONI DI FUNZIONE : $\forall n$ intero $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}, f: A \rightarrow \mathbb{R}$

Come può darsi che f_n tende ad una certa funzione f $f_n \rightarrow f$

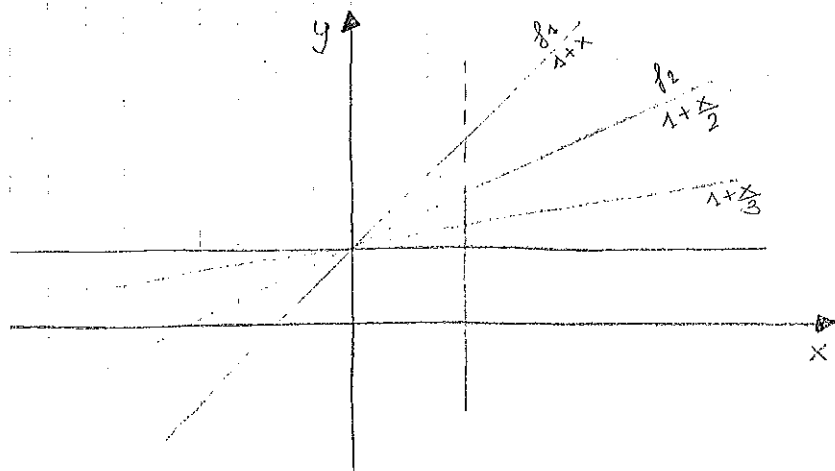
Nozione + semplice : (f_n) TENDE AD f puntualmente [PUNTUALMENTE] su A se $\forall x \in A$ $f_n(x) \rightarrow f(x)$ $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \right)$

Esempio : Successioni di rette

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$$

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$$

$$A = \mathbb{R} (\subset \mathbb{R})$$



WWW.INGONLINE.BIZ

$$\boxed{f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}} \quad , \quad \boxed{f(x) = 1} \quad \boxed{f_n \rightarrow f} \text{ puntualmente, infatti } 1 + \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \boxed{1}$$

All'infinito però le rette si allungano anche se n è grande

$\Rightarrow$ in alcuni casi questa definizione è poco - Non è una cosa

che va bene per tutte le x (se x grande n lo devo prendere + grande.)