

$$\text{Res}(f, 1+i) = \frac{-58i + 4}{845}$$

173

$$\text{Res}(f, -1+2i) = \lim_{z \rightarrow -1+2i} (z - (-1+2i)) f(z) =$$

$$= \frac{(-1+2i)^2 + 2(-1+2i)}{(1-4-4i+2-4i+2)^2 (4i)} = \frac{(1-4-4i) + (-2+4i)}{(-8i+1)^2 (4i)}$$

$$= \frac{-3-4i-2+4i}{(-64+1-16i) 4i} = \frac{-5}{(-63-16i) 4i} = \frac{-5}{-252i+64} =$$

$$= \frac{-5(64+252i)}{67600} = \frac{-64-252i}{13520} = \frac{-16-63i}{3380}$$

$$\text{Res}(f, 1+i) + \text{Res}(f, -1+2i) =$$

$$= \frac{-58i+4}{845} + \frac{-16-63i}{3380} = \frac{-232i+16-18-63i}{3380} = \frac{-295i}{3380}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2x}{(x^2-2x+2)^2(5+2x+x^2)} dx = 2\pi i \cdot \frac{-295}{3380} i =$$

$$= \frac{590}{3380} \pi = \boxed{\frac{59}{338} \pi}$$

Esercizio 10

118

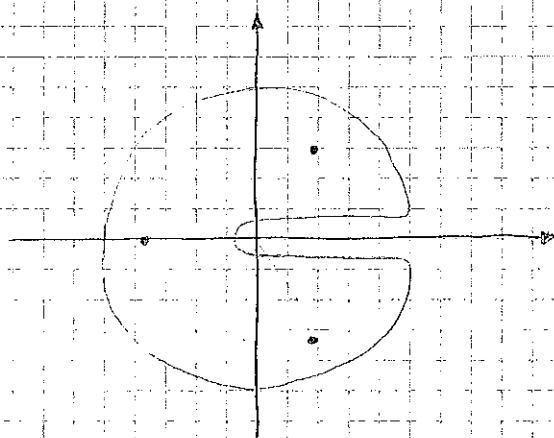
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(8+x^3)} dx$$

$\sqrt{z}$ univocamente definita in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \ln(z)} \quad \ln z = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z)$$

$]0, 2\pi[$

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &\rightarrow \sqrt{x} & \operatorname{Im}(z) > 0 & \quad x > 0 \\ &-\sqrt{x} & \operatorname{Im}(z) < 0 & \quad x > 0 \end{aligned}$$



$$z^3 = -8$$

$$\rho^3 e^{i3\theta} = 8 e^{i\pi + 2k\pi}$$

$$\rho = 2$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \quad k \in [0, 2]$$

VALORI PRINCIPALI

Poli di ordine 1

$$2e^{\frac{\pi i}{3}}, \quad 2e^{\pi i} = -2, \quad 2e^{\frac{5\pi i}{3}}$$

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{\sqrt{z}}{3z^2} = \frac{z\sqrt{z}}{3 \cdot (-8)} = \frac{z\sqrt{z}}{-24}$$

$$\operatorname{Res}(f, e^{\frac{\pi i}{3}}) = \frac{2e^{\frac{\pi i}{3}} \sqrt{2} e^{\frac{\pi i}{6}}}{-24} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi i}{2}}}{-12} = \frac{-\sqrt{2} \cdot i}{12}$$

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \frac{2e^{-\pi i} \sqrt{2} e^{-\frac{\pi i}{2}}}{-24} = \frac{-1 \cdot \sqrt{2} \cdot i}{-12} = \frac{\sqrt{2} \cdot i}{12}$$

$$\operatorname{Res}(f, e^{\frac{5\pi i}{3}}) = \frac{2e^{\frac{5\pi i}{3}} \sqrt{2} e^{\frac{5\pi i}{6}}}{-24} = \frac{1 \cdot \sqrt{2} \cdot i}{-12} = -\frac{\sqrt{2} \cdot i}{12}$$

$$\Rightarrow \pi i \left(-\frac{\sqrt{2} \cdot i}{12} + \frac{\sqrt{2} \cdot i}{12} - \frac{\sqrt{2} \cdot i}{12} \right) = \frac{\sqrt{2}}{12} \pi$$

Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ essa definisce una funzione f sul disco di convergenza ed f E' SOMMA DELLA SUA SERIE DI TAYLOR.

Se procediamo alla rovescia. Assegniamo una funzione f di classe C^{∞} definita su un disco $B(R)$ e poniamo $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

ci si puo' chiedere se la serie $\sum a_n (z-z_0)^n$ (costruita a partire da f) e' CONVERGENTE e soprattutto se converge a f .

In generale questo non e' VERO

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f e' continua in 0 poiche' $e^{-1/|x|} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$

$$f'(x) = -x^{-2} e^{-x^{-1}}$$

$$f''(x) = (2x^{-3} + x^{-4}) e^{-x^{-1}}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = P_k(x^{-1}) e^{-x^{-1}}$$

Poiche' l'esponenziale vince su qualunque polinomio

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(k)}(x) = 0 \quad \text{qualunque sia } k \text{ intero}$$

la serie di Taylor associata a f nel punto 0 ha tutti i coefficienti nulli e dunque converge uniformemente ovunque alla funzione 0.

Dato che $f(x) \neq 0$ se $x \neq 0$ si ha che $f(x)$ NON E' UGUALE ALLA SOMMA DELLA SUA SERIE DI TAYLOR IN NESSUN $x \neq 0$

$\rightarrow f: B(R) \rightarrow \mathbb{C}$ sia di classe C^{∞} e supponiamo esista una costante K tale che $|f^{(n)}(z)| \leq K^n$ per tutte le z in $B(R)$

Allora
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Serie di POTENZE

Esempio 1

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Raggio di convergenza 1

Poiché $A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1})$

$$\Rightarrow 1 - z^{n+1} = (1 - z)(1 + z + z^2 + \dots + z^n)$$

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - \underbrace{z^{n+1}}_{\text{tende a 0 se } \|z\| < 1}}{1 - z} \rightarrow \frac{1}{1 - z} \quad \|z\| \leq 1$$

Esempio 2

$$p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

Raggio di convergenza

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 = c \quad \frac{1}{c} = \bar{R} = 1$$

$$p'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot z^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}$$

questa è una primitiva

$$p(z) = -\ln(1 - z) + c$$

imponendo $p(0) = 0$ si ha $c = 0$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \left(\frac{1}{1 - z} \right) \quad \text{se } \|z\| \leq 1$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

raggio di convergenza

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$$

$$\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \rightarrow 1$$

$$\bar{R} = 1$$

$f(x)$ esiste $]-1, 1[$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n^2}$$

$$x f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$(x f'(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow x f'(x) = -\ln(1-x) + c \quad x=0 \quad c=0$$

$$f'(x) = \frac{-\ln(1-x)}{x}$$

$$f'(0) = -1$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{-\ln(1-x)}{x} dx + f(0)$$

$$f(0) = 0$$

Serie di potenze

$$) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{(m+2)!} = f(z)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{z^{m+1}}{(m+3)!} \cdot \frac{(m+2)!}{z^m} = 0$$

$$\bar{R} = \infty$$

$$z^2 f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{m+2}}{(m+2)!}$$

$$m+2 = m$$

$$m = 2$$

$$z^2 f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = e^z - 1 - e$$

$$f(z) = \frac{e^z - 1 - e}{z^2}$$

$$) \sum_{m=3}^{\infty} \frac{z^m}{(m-3)! m} = g(z)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{z^{m+1}}{(m-2)! m+1} \cdot \frac{(m-3)! m}{z^m} = 0$$

$$\bar{R} = \infty$$

$$g'(z) = \sum_{m=3}^{\infty} \frac{m z^{m-1}}{(m-3)! m}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$) \frac{g'(z)}{z^2} = \sum_{m=3}^{\infty} \frac{z^{m-3}}{(m-3)!}$$

$$m-3 = m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}$$

$$= e^z$$

$$e^z z^2 = g'(z)$$

$$g(z) = \int e^z z^2 dz = e^z z^2 - \int e^z 2z dz = e^z z^2 - \left(e^z 2z - \int e^z 2 dz \right)$$

$$= e^z z^2 - 2e^z z + 2e^z + C$$

$$C = 0$$

Esercizio 4

155

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n+1}$$

$$\frac{z^{2n}}{(n+1)}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{1}{n+1} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \rightarrow 1$$

$$\bar{R} = 1$$

Raggio di convergenza 1

$$\frac{z}{2} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+2}}{2n+2}$$

$$\left(\frac{z}{2} f(z) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2) z^{2n+1}}{(2n+2)}$$

$$\left(\frac{z}{2} f(z) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} z (z^2)^n \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} f(z) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n = \frac{1}{1-z^2}$$

$$\left(\frac{z}{2} f(z) \right)' = \frac{z}{1-z^2}$$

$$-2 \ln(1-z^2) + c$$

$$f(0) = 0 \quad c = 0$$

$$f(z) = -\frac{4 \ln(1-z^2)}{z}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

个

$a_n =$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+2} \cdot m+1 = 1$$

$$\bar{R} = 1$$

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m+1}}{M+1}$$

www.ONLINEBIZ

$$\frac{z}{2} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+2}}{2n+2} \quad \left| \frac{z}{2} f(z) \right|' = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1}$$

$$2m+1 = m \quad \left(\frac{z}{2} f(z) \right)' = \sum_{m=1}^{\infty} z^m = \frac{1}{1-z} - 1$$

$$\int \frac{z}{1-z} dz = -\ln(1-z) - z + C \quad C=0$$

$$f(z) = \frac{2(-\ln(1-z) - z)}{z}$$

$$\sum \|a_n\|_{\infty, [a, +\infty[} < +\infty$$

159

$$\sum \frac{a}{a^2 + n^2} \leq \sum \frac{a}{a^2 n^2} < +\infty$$

$$f(x)_{(a)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(x)$$

su $[0, +\infty[/]-\infty, -a]$ $\forall a > 0$

Funzione continua

WWW.INGONLINE.BIZ

III f derivabile? su $[a, +\infty[$, $a > 0$ finito

Vediamo se $\sum \|a'_n\|_{\infty, [a, +\infty[} < +\infty$

$$a'_n = \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2} \leq 1 + n$$

$$|a'_n| \leq \frac{1 + n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2} = \frac{1}{1 + n^2 x^2} \leq \frac{1}{1 + n^2 a^2}$$

$$\leq \frac{1}{n^2 a^2}$$

$$\|a'_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{1}{n^2 a^2} \quad \frac{1}{a^2} \sum \frac{1}{n^2} < +\infty \Rightarrow \text{tutto ok!}$$

Serie derivate e unif. conv. e serie derivate $\geq \lim$

14/11/2005

Esercitazione

15/1

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x}{1+n^2 x^2} = f(x)$$

1 -

PRIMA POSSIBILITÀ

Fissato x la serie converge?

si $x \neq 0$

$$|a_n(x)| \leq \frac{x}{n^2 x} = \frac{1}{n^2} \quad x \neq 0$$

$$\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Fatto da mezzogiorno:

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

CONVERGE

 $\Leftrightarrow$

$$\alpha > 1$$

DIVERGE

 $\Leftrightarrow$

$$\alpha \leq 1$$

se $|a_n| \leq b_n$ $\sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n$ converge

$$\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow l, \quad l < 1 \quad \sum |a_n| < +\infty$$

Non sappiamo se si comporta con continuità su x

Converge uniformemente?

Se è vero $\Rightarrow f$ continua in quanto è una serie di funzioni continue (Si può scambiare limite in x e serie)

$$\sum \left\| \frac{x}{1+n^2 x^2} \right\|_{\infty, \mathbb{R}} < +\infty$$

$$\sup \left| \frac{x}{1+n^2 x^2} \right|, x \in \mathbb{R}$$

Osserviamo che

163

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{se } x \geq 1$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m}{1+m^n} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m}{2x^n} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x-1} \right) \rightarrow \infty \text{ se } x \rightarrow 1$$

$$\text{se } x < -1$$

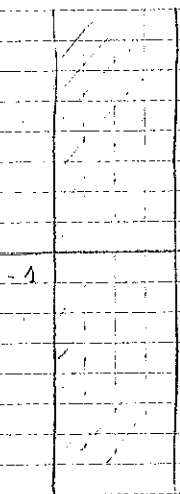
$$a_m(x) = \frac{m}{x^m} \frac{1}{1+x^{-m}} = (-1)^m \frac{m}{|x|^m} \frac{1}{1+x^{-m}}$$

$$\sqrt[m]{|a_m(x)|} \rightarrow \frac{1}{|x|}$$

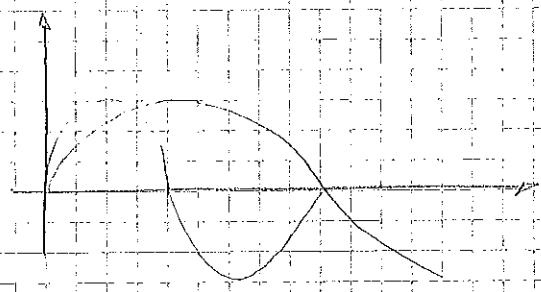
$$\|a_m(x)\|_{\infty, [-\infty, a]} \leq \frac{m}{|a|^m} \frac{1}{|a|-1}$$

$$a < -1$$

WWW.INGONLINE.BIZ



$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$$



A x finito

PUNTUALMENTE

x per x,

converge

$$a_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$$

$$b_n = \frac{x}{n^2}$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$$

$$\sum \frac{x}{n^2} < +\infty$$

CONVERGE $\forall x$

$$\frac{x}{n^2} \leq \frac{\pi}{2}$$

WAVELENGTH

Convergenza uniforme

funzione tra

$$[-a, a]$$

su un

intervallo

$$\sum \|a_n\|_{\infty} = \sum 1 = +\infty$$

Se invece gmo un $a > 0$

e faccio

$$\sum \|a_n\|_{\infty, [-a, a]}$$

$$a_n(a)$$

$$\Rightarrow \sum \|a_n\|_{\infty, [-a, a]} = \sum_{n \geq \frac{2a}{\pi}} |a_n(a)| < +\infty$$

$$\left(\text{se } \frac{a}{n^2} \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$n^2 \geq \frac{2a}{\pi}$$

Continuo su tutto $\mathbb{R}$

Non posso dire nulla sul limite dell'infinito.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^n}{(n-3)! \cdot n} = \sum a_n z^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{(n-2)! \cdot (n+1)} \bigg/ \frac{1}{(n-3)! \cdot n} = \frac{1}{n-2} \cdot \frac{n}{n+1} \rightarrow 0$$

$$\boxed{R = \infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$\frac{n-2}{(n-2)! \cdot (n+1)} = 0$$

Converge $\forall x$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-3)!} = z^2 e^z$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n \cdot z^{n-1}}{n! (n-3)!} =$$

$$\frac{d}{dz} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^n}{n! (n-3)!}$$

$$\left| 1 + (x + iy)^2 \right|^2 > 1$$

169

$$\left| 1 + x^2 - y^2 + 2ixy \right|^2$$

$$\left| 1 + x^2 - y^2 \right|^2 + 4x^2y^2 > 1$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}$$

1) Ragguo convergenza $= +\infty$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{(n+2)!}} \rightarrow 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+3)!}}{\frac{1}{(n+2)!}} = \frac{1}{n+3} \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+2)!}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

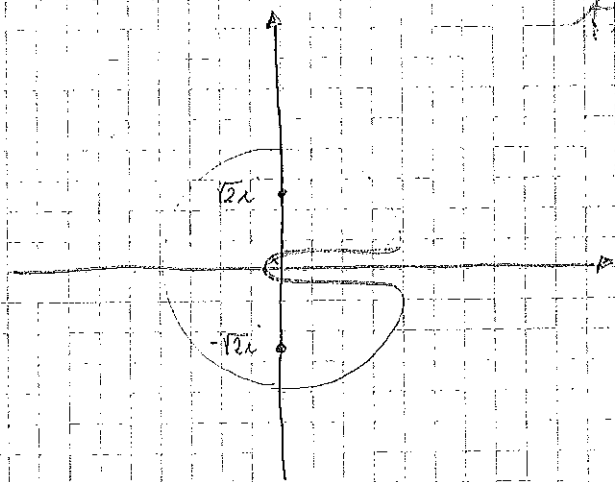
$$\frac{1}{z^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 - z$$

$$= \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(4+x)^2(9+x)} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{4+4x^2+x^4} dx$$



$$\text{Se } z \rightarrow x > 0 \quad \text{con } \text{Im} z > 0 \Rightarrow \sqrt{z} \rightarrow \sqrt{x}$$

$$\text{se } z \rightarrow x > 0 \quad \text{con } \text{Im} z < 0 \Rightarrow \sqrt{z} \rightarrow -\sqrt{x}$$

$$\int_{\gamma_R} f(z) = 2\pi i \left(\text{Res}(f, i\sqrt{2}) + \text{Res}(f, -i\sqrt{2}) \right)$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$-\int_{\text{perzo arcuato}} + \int_0^R \frac{\sqrt{x}}{4+4x^2+x^4} + \int_R^0 \frac{-\sqrt{x}}{4+4x^2+x^4}$$

↓
0

$$R \rightarrow \infty \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{4+4x^2+x^4}$$

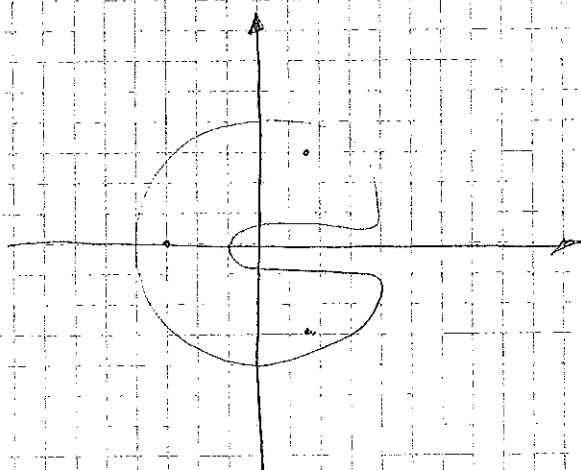
$$\frac{\sqrt{z}}{(z+i\sqrt{2})^2} = h(z) = \sqrt{z} (z+i\sqrt{2})^{-2}$$

$$h'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} (z+i\sqrt{2})^{-2} - 2(z+i\sqrt{2})^{-3} \sqrt{z}$$

$$h'(i\sqrt{2}) = \frac{1}{2\sqrt{i\sqrt{2}}} (2i\sqrt{2})^{-2} - 2(2i\sqrt{2})^{-3} (2i\sqrt{2})^{-3} =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(8+x^3)} dx$$

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{8+z^3} \text{ on } \mathbb{C} \setminus \{x > 0\}$$



WWW.INDONOVIA.BIZ

$$z_1, z_2, z_3 = 2 e^{i\theta_k}$$

$$\theta_k = \frac{\pi}{3}; \pi, \frac{2}{3}\pi$$

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{8+x^3} dx$$

$$2^{1/3} \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Res}(f, z_j) = \left. \frac{\sqrt{z}}{3z^2} \right|_{z=z_j} = \frac{z_j \sqrt{z_j}}{3(-8)}$$

$$z_1 \sqrt{z_1} = 2\sqrt{2} e^{(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})i} = 2\sqrt{2} i$$

$$2 e^{\frac{5}{6}\pi} \sqrt{2} e^{\frac{5}{6}\pi} = 2\sqrt{2} e^{\frac{5}{3}\pi}$$

$$\frac{2\pi i}{-24} \left(2\sqrt{2} i - 2\sqrt{2} i + 2\sqrt{2} i \right)$$

$$= \frac{\pi \sqrt{2}}{12}$$

$$f_m' = \cos\left(\frac{x}{m}\right)$$

187

) prova dire che

$$f_m' \xrightarrow{\infty} 1$$

$$\max_{x \in [0, T]} \underbrace{\left(1 - \cos\left(\frac{x}{m}\right)\right)}_{h_m(x)}$$

WWW.INGOMLINE.BIZ

$$h_m(0) = 0$$

$$h_m(x) = \frac{1}{m} \sin\left(\frac{x}{m}\right) \geq 0 \quad \left(m \geq \frac{T}{\pi}\right)$$

$$1 - \cos \frac{T}{m} \Rightarrow 0$$

) $\{f_m\}_R$ NON CONVERGONO UNIFORMEMENTE

$$\text{perché } \sup_R |f_m(x) - x| = +\infty$$

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2}$$

$$\frac{1+z+z^2+\dots}{z^2} \Rightarrow$$

$$y(t) = e^{t_1}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{Res}(0) = 1$$



$2\pi i$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2(1+z)}$$

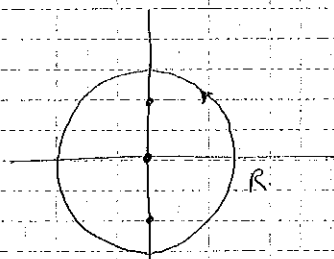
$$y(t) = e^{t_1}$$

Se la curva non prende un residuo non lo dico peraltro

$$\int_R \frac{dz}{(1+z^2)z}$$

$$\gamma_R = R e^{it}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$



WWW.INGOMLINE.BIZ

$$= \sum_{z_j \text{ poli}} 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_j)$$

dentro il cerchio
di raggio R

$$= 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$$

$$\text{se } R < 1$$

$$= 2\pi i [\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i)]$$

$$\text{se } R > 1$$

$$= 0$$

$$\boxed{\operatorname{Residuo}(f, 0)} = \left. \frac{1}{1+z^2} \right|_{z=0} = 0$$

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \left. \frac{1}{1+z^2} \right|_{z=z_1}$$

$$2\pi i \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

SERIE DI FOURIER

$$e_m(t) = \frac{e^{i\omega_m t}}{\sqrt{T}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$E_n = \left\{ \sum_{j=-n}^n c_j e_j, c_j \in \mathbb{C} \right\}$$

$$f_m = \sum_{j=-M}^M c_j e_j$$

Im sta in Em

$$\hat{c}_j = (f, e_k)$$

segue dal fatto che $(f_m - f, e_k) = 0$
 $\forall k = -m, \dots, m$

$$f_m = \sum_{j=-m}^m (f, e_j) e_j$$

$$(f, e_f) = \int_0^T f(t) \frac{e^{-i\omega_f t}}{\sqrt{T}} dt$$

$$\forall f \in L^2(0, T) \quad \text{be } f_n \rightarrow f \text{ in } L_2 \Rightarrow$$

infatti: $\sum |c_J|^2 = \|f\|^2$

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f, e_n) e_n$$

m	senso
L ²	

$$\text{Se } f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f = \sum_{\eta = -\infty}^{\infty} \Delta_K \frac{e^{\eta K T}}{\sqrt{T}}$$

$$\hat{C}_K = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_K t} dt = a_K + i b_K \quad C_0 = a_0 = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(t) dt$$

$$f = a_0 \frac{1}{\sqrt{T}} + \frac{2}{\sqrt{T}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \cos(\omega_k t) f(t) dt$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \cos(\omega_k t) f(t) dt$$

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\omega_k t}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j\omega_k t} dt$$

$$\tilde{c}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$\tilde{c}_k = \tilde{a}_k - \lambda \tilde{b}_k$$

$$f = \tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^N \tilde{a}_k \cos(ckt) + \tilde{b}_k \sin(ckt)$$

$$\begin{aligned} 2\hat{a}_k &= \frac{1}{\pi/2} \int_0^\pi f(t) \cos(kt) dt \\ 2\hat{b}_k &= \frac{1}{\pi/2} \int_0^\pi f(t) \sin(kt) dt \end{aligned}$$

1) Sia f una funzione $L^2([0, T])$ a valori reali.

485

$$u_k = \frac{1}{T/2} \int_0^T f(t) \sin(\tilde{\omega} k t) dt$$

$$\tilde{\omega} = \frac{\pi}{T}$$

ALLORA $\rightarrow f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(\tilde{\omega} n t)$ nel senso di L^2

2) Sia f una funzione $L^2([0, T])$ a valori reali.

$$v_k = \frac{1}{T/2} \int_0^T f(t) \cos(\tilde{\omega} k t) dt \quad k=0 \quad v_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n \tilde{\omega} t) \quad \text{nel senso di } L^2$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Sia $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < +\infty$ e sia f in $L^2([0, T])$, $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(\tilde{\omega} n t)$ nel senso di L^2 .
Poniamo $f_n := \sum_{k=1}^n u_k \sin(\tilde{\omega} k t)$

• Se su ha $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < +\infty$ allora f è continua $f(0) = f(T) = 0$ e inoltre f_n converge unif. a f su $[0, T]$.

• Se $\sum_{n=1}^{\infty} n |u_n| < +\infty$ f è derivabile $f(0) = f(T) = 0$ f' è continua e $f'(0) = -f'(T)$. Inoltre $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ $f'_n \xrightarrow{\text{unif}} f'$ su $[0, T]$.

• In generale dato un intero h se $\sum_{n=1}^{\infty} n^h |u_n| < +\infty$ allora f è derivabile h volte, tutte le derivate di ordine minore uguale a h sono continue mentre le derivate di ordine più (compresa la funzione) sono nulle agli estremi dell'intervallo mentre quelle di ordine dispari hanno segno opposto.

Infine $f_n^{(j)} \xrightarrow{\text{unif}} f^{(j)}$ $j = 0 \dots h$ su $[0, T]$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 < +\infty$ f ha derivata in L^2 e $f'_{L^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n n \sin(\tilde{\omega} n t)$.
 f è continua, $f(0) = f(T) = 0$ $f \xrightarrow{\text{unif}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(\tilde{\omega} n t)$

$$\begin{cases} y'' + py' + \lambda y = f \\ y \text{ } T\text{-periodica} \end{cases}$$

Sia $T > 0$ e sia $f \in L^2_{\text{per}}(T)$. Diciamo che y è una soluzione del problema P_f nel senso dell'energia se $y \in L^2_{\text{per}}(T)$, y ha derivata seconda nel senso di $L^2_{\text{per}}(T)$ e vale l'equazione sopra. La proprietà di periodicità di y è imposta chiedendo che la funzione e le sue derivate prima e seconda siano in $L^2_{\text{per}}(T)$.

1 - SUPPONIAMO CHE NON CI SIA NESSUN INTERO RELATIVO K tale che

$$-\omega^2 K^2 + i\omega p K + \lambda = 0 \quad \text{Il problema ha soluzione per ogni } f \in L^2_{\text{per}}(T)$$

$$\text{Se } f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n, \text{ allora la soluzione } y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{-\omega^2 n^2 + i\omega p n + \lambda} e_n$$

(dove le uguaglianze sono intese nel senso dell'energia) e quindi la soluzione è unica

- La funzione y è una funzione derivabile una volta, y e y' sono continue e periodiche

- Se $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n$ e se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ y ha derivata seconda

continua e periodica e verifica l'equazione nel senso usuale

2 - SUPPONIAMO CHE CI SIA UN SOLO INTERO RELATIVO K_0 per cui $-\omega^2 K_0^2 + i\omega p K_0 + \lambda = 0$

- Il problema ha soluzione se e solo se $c_{K_0} = 0$

- Se $c_{K_0} = 0$ le soluzioni y hanno la forma

$$y = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq K_0} \frac{c_n}{-\omega^2 n^2 + i\omega p n + \lambda} e_n + c e_{K_0}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

per un arbitrario c (non c'è unicITÀ)

- $\forall$ funzione f è una funzione derivabile una volta y e y' continue e periodiche

- Se $c_{K_0} = 0$ e $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty \Rightarrow \forall y$ ha derivata seconda continua e periodica e verifica l'equazione in senso usuale

Se $\mathbb{X}_{K_0} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n : c_{K_0} = 0 \right\} \forall f \in \mathbb{X}_{K_0}$

2- Supponiamo che ci siano 2 interi relativi k_1 e k_2 per cui

$$-\omega^2 k_1^2 + i\omega \mu k_1 + \lambda = -\omega^2 k_2^2 + i\omega \mu k_2 + \lambda = 0$$

Sia $f \in L^2_{\text{per}}(\mathbb{T})$ e supponiamo che $y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n$

Si hanno i fatti seguenti:

- Il problema ha soluzione se e solo se $C_{k_1} = C_{k_2} = 0$
- Se $C_{k_1} + C_{k_2} = 0 \Rightarrow$ le soluzioni y hanno la forma

$$y = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq k_1 \\ n \neq k_2}} \frac{c_n}{-\omega^2 n^2 + i\omega \mu n + \lambda} e_n + C e_{k_1} + D e_{k_2}$$

per arbitrarietà C e D

- $\forall$ soluzione y è una funzione derivabile 1 volta y e y' sono continue e periodiche
- $\forall$ soluzione (quando esiste) y ha derivata seconda continua e periodica e verifica l'equazione nel senso usuale

Se definiamo $X = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n : C_{k_1} = C_{k_2} = 0 \right\}$ poniamo dire che $\forall f \in$

X esiste unica una soluzione $y \in X$

$$\int_0^T y(t) e^{-i\omega k_1 t} dt = 0 \quad \int_0^T y(t) e^{-i\omega k_2 t} dt = 0$$

Esempio

WWW.INGONLINE.BIZ

$$y' = f$$

$$f \in L^1(0, T)$$

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{i\omega n t}$$

$$y' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n (-i\omega^2 n^2) e^{i\omega n t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{i\omega n t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{i\omega n t}$$

$$y_n = -\frac{f_n}{\omega^2 n^2}$$

$$\Rightarrow \omega^2 n^2 = 0 \quad n = 0$$

$\Rightarrow$ Il problema ha soluzione se e solo

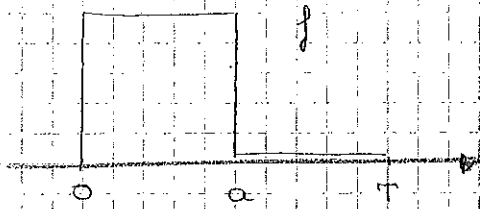
$$\text{se } f_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0$$

$$y = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{f_n}{\omega^2 n^2} e^{i\omega n t} + C$$

FUNZIONE CONTINUA PERIODICA
DERIVABILE CON DERIVATA
CONTINUA E PERIODICA

Esempio 1

189



$$\tilde{c}_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt$$

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_k e^{i\omega_k t}$$

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{T} \int_0^a e^{-i\omega_k t} dt = \left[\frac{e^{-i\omega_k t}}{-i\omega_k} \right]_0^a =$$

$$= \frac{e^{-i\omega_k a} - 1}{-i\omega_k T} = \frac{\cos(\omega_k a) - i \sin(\omega_k a) - 1}{-i\omega_k T} =$$

$$= \frac{[\cos(\omega_k a) - 1] i + \sin(\omega_k a)}{\omega_k T} \quad f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_k e^{i\omega_k t}$$

$$\tilde{c}_k = \tilde{a}_k - i \tilde{b}_k$$

$$\tilde{a}_k = \frac{\sin(\omega_k a)}{\omega_k T}$$

$$\tilde{b}_k = -\frac{\cos(\omega_k a) - 1}{\omega_k T}$$

$$f = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos(\omega_k t) + \tilde{b}_k \sin(\omega_k t)$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{a}{T}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_k t) dt = -\frac{2 \sin(\omega_k a)}{\omega_k T}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_k t) dt = \frac{-2 \cos(\omega_k a) + 2}{\omega_k T}$$

$$f = \frac{a}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin(\omega_k a)}{\omega_k T} \cos(\omega_k t) + \frac{-2 \cos(\omega_k a) + 2}{\omega_k T} \sin(\omega_k t)$$

$$f = \frac{a}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega_k a)}{\pi k} \cos(\omega_k t) + \frac{1 - \cos(\omega_k a)}{\pi k} \sin(\omega_k t)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (-t+\pi) e^{-ikt} + e^{ikt} dt$$

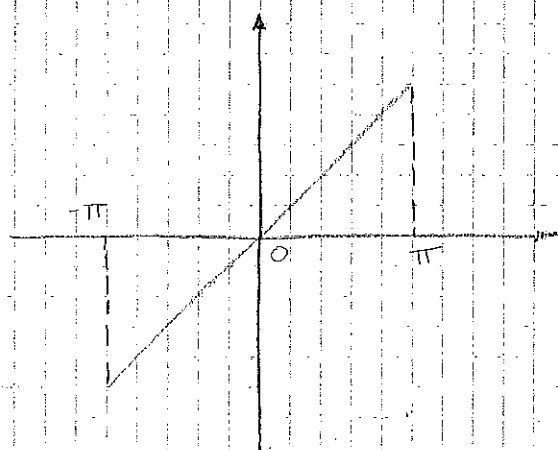
196

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (-t+\pi) 2 \cos(kt) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[(-t+\pi) \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\sin(kt)}{k} dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[-\frac{\cos(kt)}{k^2} \right]_0^{\pi} \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{-\cos(k\pi) + 1}{k^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1 + (-1)^k}{k^2}$$



WWW.INGONLINE.BIZ

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{T} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-i\omega_k t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-ikt} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[t \frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikt}}{-ik} dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[\frac{t e^{-ikt}}{-ik} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikt}}{-ik} dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{2 \cdot (-1)^k}{-ik} = \frac{(-1)^k i}{\pi k} = \tilde{a}_k - i \tilde{b}_k$$

$$\tilde{b}_k = -\frac{(-1)^k}{\pi k} \quad f = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^k}{\pi k} \cos(kt)$$

$f \in L^1(\mathbb{R})$ ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integrabile)

TRASFORMATA DI FOURIER
 $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

183

ha senso $\forall \omega \in \mathbb{R}$ $f(t) e^{-i\omega t} \in L^1$ - $\hat{f}$ è LINEARE $\hat{f}(\lambda f + \mu g) = \lambda \hat{f}(\omega) + \mu \hat{g}(\omega)$

1- $\hat{f}$ È CONTINUA IN ω

2- $\hat{f}(\omega)$ LIMITATA SU $\mathbb{R}$ ANZI

3- $\lim_{|\omega| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\omega) = 0$

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$$

4- $t f(t) \in L^1 \Rightarrow \hat{f}$ è derivabile e vale

$$\frac{d\hat{f}(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (-it) e^{-i\omega t} dt = \hat{f}(-it f(t))$$

WWW.ONLINE.BIZ

$t^k f(t) \in L^1 \Rightarrow \hat{f}$ ammette derivata k-esima

$$\hat{f}^{(k)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (-it)^k e^{-i\omega t} dt = \hat{f}((-it)^k f(t))$$

5- Supponiamo $\exists f'$ e che $f' \in L^1$

$$\Rightarrow \hat{f}'(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$$

Più in generale se $f^{(k)} \in L^1$

$$\hat{f}^{(k)}(\omega) = (i\omega)^k \hat{f}(\omega)$$

Conseguenza: se $f^{(k)} \in L^1$

$$\omega^k \hat{f}(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$$

NOTA: Se f è DERIVABILE, $f' \in L^1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$

$$f(t) \stackrel{L^2}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_H(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{f}_H(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(t)$$

$$P(z) y = b$$

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

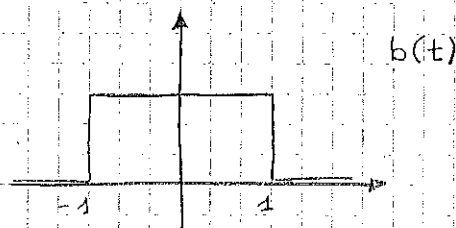
Se applico la trasformata $P(i\omega) \hat{y} = \hat{b}$

$$\hat{y} = \frac{\hat{b}}{P(i\omega)}$$

Se posso tornare indietro

$b \in L^2$ TROVO TUTTE E SOLE LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE IN L^2 (morte all'infinito)

$$\begin{cases} y'' - y = b \\ y \in L^2 \end{cases}$$



Applico $\mathcal{F}$ $(i\omega)^2 - 1 \hat{y}(\omega) = \hat{b}(\omega)$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{\hat{b}(\omega)}{-\omega^2 - 1}$$

WWW.INGONLINE.IT

Su può sicuramente tornare indietro qualunque si b $\omega^2 + 1 \neq 0 \forall \omega$

$$\begin{cases} y'' + y = b \\ y \in L^2 \end{cases}$$

Applico $\mathcal{F}$ $(-\omega^2 + 1) \hat{y}(\omega) = \hat{b}(\omega)$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{\hat{b}(\omega)}{(-\omega^2 + 1)}$$

$-\omega^2 + 1$ si annulla in $\boxed{+1}$ e $\boxed{-1}$

$$\frac{\hat{b}(\omega)}{(-\omega^2 + 1)} \in L^2 \quad \hat{b}(\omega) \Rightarrow \hat{b}(1) = \hat{b}(-1) = 0$$

$$\hat{b}(\omega) \approx \hat{b}'(1)(\omega - 1)$$

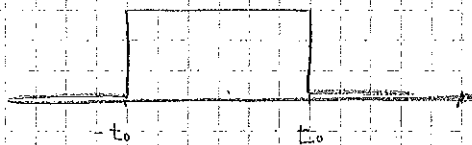
meno a 1

CONDIZIONE SUFFICIENTE

$$\begin{cases} \ddot{y} + a^2 y = b(t) \\ y_m \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

$$a \in \mathbb{R}$$

$$b(t) = \begin{cases} 1 & -t_0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$$(\omega^2 + a^2) \hat{y}(\omega) = \hat{b}(\omega)$$

$$(-\omega^2 + a^2) \hat{y}(\omega) = \hat{b}(\omega)$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{\hat{b}(\omega)}{a^2 - \omega^2}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$a^2 - \omega^2 = 0 \quad \omega = \pm a$$

$$\hat{b}(a) = \hat{b}(-a) = 0$$

$$\hat{b}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-t_0}^{t_0} e^{-i\omega t} dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-t_0}^{t_0} =$$

$$= \frac{e^{-i\omega t_0}}{-i\omega} - \frac{e^{+i\omega t_0}}{-i\omega} = \frac{e^{+i\omega t_0} - e^{-i\omega t_0}}{i\omega} =$$

$$= \frac{2 \sin(\omega t_0)}{\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin(a t_0)}{\omega} = 0$$

$$\sin(a t_0) = 0 \quad a t_0 = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$t_0 = \frac{k\pi}{a}$$

$$\sin(-a t_0) = 0 \quad t_0 = \frac{k\pi}{a}$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{2 \sin(\omega T_0)}{\omega(a^2 - \omega^2)}$$

paiche $aT_0 = K\pi$ si ha

199

$$g(t) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{sgn}(t+T_0) \frac{1 - (-1)^K \cos(at)}{a^2} - \operatorname{sgn}(t-T_0) \frac{1 - (-1)^K \cos(at)}{a^2} \right\}$$

$$t+T_0 < 0 \quad t < -T_0$$

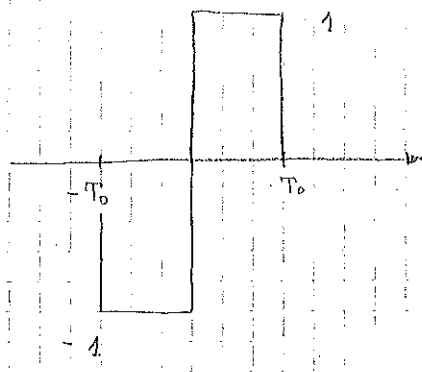
$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < -T_0 \\ \frac{-(-1)^K \cos(at) + 1}{a^2} & -T_0 < t < T_0 \\ 0 & t > T_0 \end{cases}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$y'' + ay' = b(t)$$

$$a > 0$$

$b(t)$



$$(-\omega^2 + a) \hat{y}(\omega) = \hat{b}(\omega)$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{\hat{b}(\omega)}{-\omega^2 + a}$$

$$-\omega^2 + a = 0 \quad \omega = \pm \sqrt{a}$$

$$\hat{b}(\sqrt{a}) = \hat{b}(-\sqrt{a}) = 0$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\begin{aligned} \hat{b}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} b(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-T_0}^0 -e^{-i\omega t} dt + \int_0^{T_0} e^{-i\omega t} dt = \\ &= -\left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-T_0}^0 + \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_0^{T_0} = \frac{1 - e^{-i\omega T_0}}{i\omega} + \frac{e^{-i\omega T_0} - 1}{-i\omega} = \\ &= \frac{1 - e^{-i\omega T_0} - e^{-i\omega T_0} + 1}{i\omega} = \frac{2 - 2\cos(\omega T_0)}{i\omega} = \frac{2(1 - \cos(\omega T_0))}{i\omega} \end{aligned}$$

$$\hat{b}(\sqrt{a}) = \frac{2(1 - \cos(\sqrt{a} T_0))}{i\omega} \Rightarrow$$

$$\cos(\sqrt{a} T_0) = 1$$

$$\sqrt{a} T_0 = 2k\pi$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{2(1 - \cos(\omega T_0))}{i\omega(-\omega^2 + a)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega =$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{i\omega t} + (e^{i\omega T_0} + e^{-i\omega T_0})e^{i\omega t}}{i\omega(-\omega^2 + a)} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{i\omega t}}{\omega(-\omega^2 + a)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega(-\omega^2 + a)} d\omega - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(T_0+t)}}{\omega(-\omega^2 + a)} d\omega - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(t-T_0)}}{\omega(-\omega^2 + a)} d\omega \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega(-\omega^2 + a)} d\omega - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega \gamma}}{\omega(-\omega^2 + a)} d\omega - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega \gamma'}}{\omega(-\omega^2 + a)} d\omega \right\} \end{aligned}$$

$\gamma = t + T_0$

$\gamma' = t - T_0$

$$y'' + y' + y = b(t)$$

①

$$b(t) = H(t) e^{-t}$$

2031

Applico $\mathcal{F} \rightarrow ((i\omega)^2 + i\omega + 1) \hat{y}(\omega) = \hat{b}(\omega)$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{\hat{b}(\omega)}{-\omega^2 + i\omega + 1}$$

$\in L^2$ perché all'infinito $-\omega^2 + i\omega + 1$ non ha radici reali

$$\hat{b}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} * e^{-i\omega t} dt =$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-(1+i\omega)t} dt = \left[\frac{e^{-(1+i\omega)t}}{-(1+i\omega)} \right]_0^{+\infty} = \frac{-1}{-(1+i\omega)} = \frac{1}{1+i\omega}$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)(-\omega^2 + i\omega + 1)} = \frac{i}{(\omega - i)(\omega^2 - i\omega - 1)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{(i\omega + 1)(-\omega^2 + i\omega - 1)} e^{i\omega t} d\omega = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - i)(\omega^2 - i\omega - 1)} d\omega$$

POLI

$$\omega + 1 = 0$$

$$\omega = i$$

$$\omega^2 - i\omega - 1 = 0$$

$$\omega = \frac{i \pm \sqrt{-1+4}}{2} = \frac{i}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$t > 0$

$$= \sum_{\text{Im } \omega_j > 0} \text{Res} \left(\frac{e^{i\omega t}}{(\omega - i)(\omega^2 - i\omega - 1)} ; \omega_j \right)$$

$t < 0$

0

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 e^{i\omega t}}{(\omega^2 - 2\omega i - 5)(\omega^2 - i\omega - 1)} d\omega$$

205

$$t > 0 \quad \frac{2\pi i}{2\pi} \sum_{\text{Im}(w_j) > 0} \text{Res} \left(\frac{2 e^{i\omega t}}{(\omega^2 - 2\omega i - 5)(\omega^2 - i\omega - 1)}, w_j \right) =$$

$$i \pm 2$$

$$\text{Res} \left(f(\omega), i \pm 2 \right) = \sum \left[\frac{2 e^{i\omega t}}{\omega^2 - i\omega - 1} \right]_{\omega = \pm 2 + i} =$$

$$= \frac{2 e^{(2i-1)t}}{3+4i-2i-1-i} = \frac{2 e^{(2i-1)t}}{4 \cdot (3+2i)} = \frac{e^{(2i-1)t}}{2(3+2i)}$$

$$= \frac{e^{-t} \cdot e^{2it}}{2 \cdot 13}$$

$$\frac{2 e^{(-2i-1)t}}{3-4i+2i-1-i} = \frac{2 e^{(-2i-1)t}}{-4(3-2i)} = \frac{(3+2i) e^{-t} e^{-2it}}{-2 \cdot 13}$$

$$\rightarrow \frac{3}{26} e^{-t} e^{2it} - \frac{3}{26} e^{-t} e^{-2it} - \frac{i}{13} e^{-t} e^{2it} - \frac{i}{13} e^{-t} e^{-2it}$$

$$= \frac{3i}{13} e^{-t} \sin(2t) + \frac{2i}{13} e^{-t} \cos(2t)$$

$$\text{Res} \left(f, \frac{1}{2}i \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sum \left[\frac{2 e^{i\omega t}}{\omega^2 - 2\omega i - 5} \right]_{\omega = \frac{1}{2}i \pm \frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$\frac{2 e^{(\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2})t}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 - \sqrt{3}i - 5} = \frac{2 e^{(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)t}}{-\frac{7\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}} = \frac{4 e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it} (-7\sqrt{3} + 3i)}{156 \cdot 39}$$

$$\frac{2 e^{(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)t}}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 + \sqrt{3}i - 5} = \frac{2 e^{(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)t}}{+\frac{7\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}} = \frac{4 e^{-\frac{1}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}it} (7\sqrt{3} + 3i)}{156 \cdot 39}$$

$$= -\frac{7\sqrt{3}}{39} e^{-\frac{1}{2}t} \left[\frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}t} - e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{2i} \right] 2i + \frac{1}{13} e^{-\frac{1}{2}t} \left[\frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}t} - e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{2} \right] 2$$

$$= -\frac{14\sqrt{3}}{39} e^{-\frac{1}{2}t} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{2}{13} e^{-\frac{1}{2}t} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \quad 205$$

$$\Rightarrow \frac{14\sqrt{3}}{39} e^{-\frac{1}{2}t} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{2}{13} e^{-\frac{1}{2}t} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{3}{13} e^{-t} \sinh(2t) + \frac{2}{13} e^{-t} \cosh(2t)$$

$t < 0$

0

$$b(t) = \frac{\sinh(2t) e^{-|t|}}{e^{-|t|}}$$

$$= \int_{-\infty}^0 \sinh(2t) e^{*t} e^{-\omega t} dt + \int_0^{+\infty} \sinh(2t) e^{-t} e^{-\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}(\sinh(2t)) = \frac{2}{-\omega^2 + 4}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\mathcal{F}(f(t) e^{-\omega_0 t}) = \mathcal{F}(f(\omega - \omega_0))$$

$$e^{-t} = e^{i\omega t}$$

$$\frac{2}{-(\omega - i)^2 + 4} + \frac{2}{-(\omega + i)^2 + 4} = \frac{2}{-\omega^2 + 2\omega i + 5} + \frac{2}{-\omega^2 - 2\omega i + 5}$$

$$= \frac{-2}{\omega^2 - 2\omega i - 5} + \frac{+2}{\omega^2 + 2\omega i - 5}$$

$$\frac{-2}{(\omega^2 - 2\omega i - 5)(-\omega^2 + \omega i + 1)}$$

$$2\operatorname{Re} \left(\frac{-2}{(\omega^2 - 5) - 1\omega i} \right) = \frac{-2\omega^4 + 10 + 4\omega i}{(\omega^2 + 5)^2 + 4\omega^2}$$

$$\frac{-2}{(\omega^2 - 2\omega i - 5)(-\omega^2 + \omega i + 1)} + \frac{-2}{(\omega^2 + 2\omega i - 5)(-\omega^2 + \omega i + 1)}$$

||

*

*

3

TRASFORMATA DI LAPLACE (UNILATERA)

209

Si ammette crescita molto grande all'infinito ma la funzione deve essere nulla prima di zero

$L_{loc} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ per $t \in [a, b]$ $f \in L^1([a, b])$

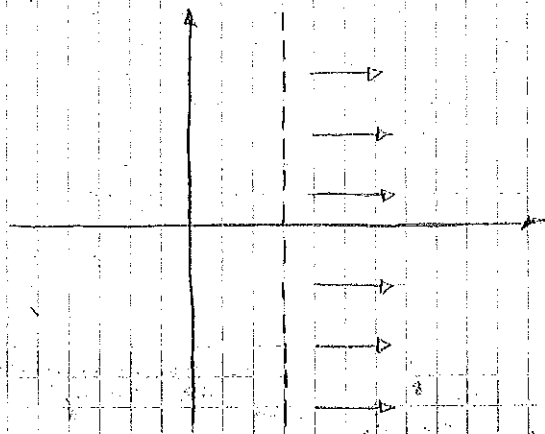
DEFINIZIONE: Se $f \in L_{loc}$ e se $\exists M \in \mathbb{C}$ $f(t) = 0$ per $t \leq -M$

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt = \int_{-M}^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt$$

WWW.INGONLINE.DIC

Definita su $\mathcal{D}(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} : f(t) e^{-zt} \in L^1(\mathbb{R}) \right\}$
 $\left\{ z \in \mathbb{C} : |f(t)| e^{-\operatorname{Re}(z)t} \in L^1(\mathbb{R}) \right\}$

proprietà: se $z \in \mathcal{D}(f) \Rightarrow \forall z$ con $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$ $z_0 \in \mathcal{D}(f)$



DEFINIZIONE: Chiamo ascissa di convergenza $a(f) = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} \right.$

$\left. |f(t)| e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}) \right\}$. Può essere

$-\infty$, reale, $+\infty$ se non ci sono x

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) > a(f) \Rightarrow z \in \mathcal{D}(f)$

$\operatorname{Re}(z) < a(f) \Rightarrow z \notin \mathcal{D}(f)$

$\operatorname{Re}(z) = a(f)$ non si sa

Parte interna $\mathcal{D}(f) = \mathbb{C}$

$$\{ z \mid \operatorname{Re}(z) > a = a(f) \}$$

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ E OLOMORFA ANZI VALE IL TEOREMA DI DERIVAZIONE

SOTTO FORMA DI INTEGRALE

$$a = a(f) < +\infty$$

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^k f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-t)^k f(t) e^{-zt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-t)^k f(t) e^{-zt} dt$$

$$t^k f(t) e^{-zt} \in L^1 \text{ se } \operatorname{Re}(z) > a(f) \text{ ma anche: } a(t^k f) = a(f)$$

Osservazione: se $|f(t)| \leq K e^{ct}$ per t grande $\Rightarrow a(f) \leq c$

$$f(t) = H(t) e^{ct} \in \mathbb{C} \quad \int_0^{+\infty} e^{ct} e^{-zt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(c-z)t} dt = \left. \frac{e^{(c-z)t}}{c-z} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{c-z}$$

$$\operatorname{Re}(c-z) < 0 \iff \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} c = a(f) \text{ così esponentiale va a zero}$$

COMPORTAMENTO RISPETTO ALLA MOLTIPLICAZIONE PER $e^{-z_0 t}$

Se z_0 è un numero complesso $a(e^{z_0 t} f(t)) = a(f) + \text{Re}(z_0)$

2.99

$$\mathcal{L}(e^{z_0 t} f(t)) = \mathcal{L}(f)(z - z_0)$$

ANTITRASFORMATA

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} f(z) e^{zt} dz$$

WWW.INGONLINE.IT

TEOREMA: Se $|f(z)| \leq \frac{M}{1+|z|^{1+\epsilon}}$

con $M > 0, \epsilon > 0$, se ne va a zero un po' + che enormemente, esempio se

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{polinom. grado } Q > \text{grado } P + 1$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} f(z) e^{zt} dz$$

ESISTE $\forall x > 0$ (nel zero parte) ed è INDIPENDENTE DA *

$$\textcircled{6} \quad f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} f(z) e^{zt} dz & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

ALTRO TEOREMA

$$p \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$$

supponiamo $\lim_{|z| \rightarrow \infty} p(z) = 0$ $a := \max \{ \text{Re } z_1, \dots, \text{Re } z_m \}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} p(z) e^{zt} dz$$

1

esiste se $t > 0$ come

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iM}^{x+iM} p(z) e^{zt} dz$$

$$= \sum_{j=1}^m \text{Res}(p(z) e^{zt}, z_j)$$

2

0 $t < 0$

Esempio

2.11

$$\begin{cases} y'' + a^2 y = b(t) \\ y'(0) = y_1 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$Hy'' + a^2 Hy = Hb$$

Applico $\mathcal{L}$ $\mathcal{L}(Hy'') + a^2 \mathcal{L}(Hy) = \mathcal{L}(Hb)$

$$\mathcal{L}(Hy'') = z \mathcal{L}(Hy') - y'(0) = z \mathcal{L}(Hy) - z y(0) - y'(0)$$

$$z \mathcal{L}(Hy') - y'(0) - z y(0) + a^2 \mathcal{L}(Hy) = \mathcal{L}(Hb)$$

$$\mathcal{L}(Hy) (z^2 + a^2) = \mathcal{L}(Hb) + y'(0) + z y(0)$$

$$\mathcal{L}(Hy) = \frac{\mathcal{L}(Hb) + y'(0) + z y(0)}{z^2 + a^2}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Equazione omogenea

$$\mathcal{L}(Hy) = \frac{y_1 + z y_0}{z^2 + a^2}$$

2 poli $\pm ai$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma + iR} \frac{y_1 + y_0 z}{z^2 + a^2} e^{zt} dz \quad \text{se } t > 0$$

$$\sum_{z_j = \pm ai} \text{Res} \left(\frac{y_1 + y_0 z}{z^2 + a^2} e^{zt}, z_j \right)$$

$$= \left. \frac{(y_1 + y_0 z) e^{zt}}{2z} \right|_{\pm ai} = \frac{(y_1 + y_0 ai) e^{ait}}{2ai} + \frac{(y_1 - ay_0) e^{-ait}}{-2ai}$$

$$\frac{y_1}{a} \sin(at) + y_0 \cos(at)$$

Supponiamo ora $y_1 = y_0 = 0$ $b \neq 0$ $b(t) = t$ $\mathcal{L}(H(t)^k) = \frac{k!}{z^{k+1}}$

$$\mathcal{L}(Hb) = \frac{1}{z^2}$$

$$\sum_{z_j = 0, \pm ai} \text{Res} \left(\frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + a^2)}, z_j \right) \quad t > 0$$

Cerchiamo soluzioni nulle prima di zero

$$y'' + 2y' + y = b(t)$$

$$(z^2 + 2z + 1) \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(b)$$

$$\mathcal{L}(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t) e^{-zt} dt = \int_0^{T_0} e^{-zt} dt = \left[\frac{e^{-zt}}{-z} \right]_0^{T_0}$$

$$= \frac{e^{-zT_0}}{-z} - \frac{1}{-z} = \frac{1}{z} - \frac{e^{-zT_0}}{z}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1 - e^{-zT_0}}{z(z^2 + 2z + 1)} = \frac{1}{z(z+1)^2} - e^{-T_0 z} \frac{1}{z(z+1)^2}$$

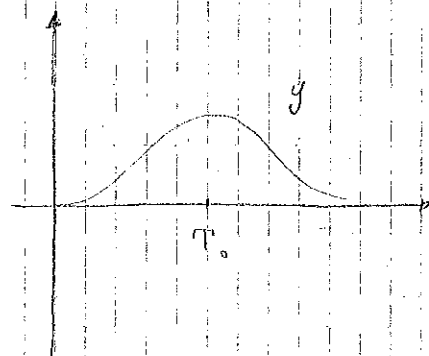
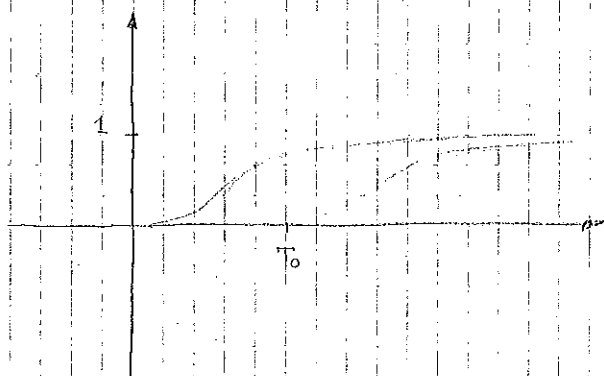
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma + i\mathbb{R}} \frac{1}{z(z^2 + 2z + 1)} e^{zt} dz = \sum \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z(z^2 + 2z + 1)} e^{zt}, z_j \right)$$

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \left. \frac{e^{zt}}{(z+1)^2} \right|_{z=0} = 1$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, -1) &= \frac{d}{dt} \left. \frac{1}{z} e^{zt} \right|_{z=-1} = \left. \frac{te^{zt}}{z^2} - e^{zt} \right|_{z=-1} = \frac{-te^{-t}}{1} - e^{-t} \\ &= -te^{-t} - e^{-t} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(y) = 1 - te^{-t} - e^{-t} - 1 + (t + \pi_0) e^{-(t+\pi_0)} + e^{-(t+\pi_0)}$$



$$\frac{-2a}{a^4 + 2a^2 + 1}$$

$$\cos(at)$$

$$\frac{(a^2-1)}{a^4 + 2a^2 + 1}$$

$$\sin(at)$$

275

$$\text{Res}(f(z), -1) = \left. \frac{d}{dz} \left(\frac{a e^{zt}}{z^2 + a^2} \right) \right|_{-1} = \left. \frac{a e^{zt} \cdot (z^2 + a^2) - 2za e^{zt}}{(z^2 + a^2)^2} \right|_{-1}$$

$$= \frac{ta e^{-t} (a^2 + 1) + 2a e^{-t}}{(a^2 + 1)^2}$$

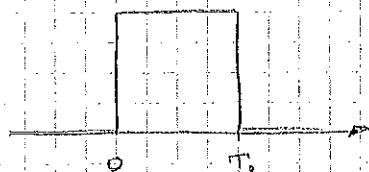
$$= \frac{ta(a^2 + 1)}{(a^2 + 1)^2} e^{-t} + \frac{2a}{(a^2 + 1)^2} e^{-t} = \frac{ta e^{-t}}{(a^2 + 1)} + \frac{2a}{(a^2 + 1)^2} e^{-t}$$

$$\Rightarrow \frac{ta e^{-t}}{(a^2 + 1)} + \frac{2a}{(a^2 + 1)^2} e^{-t} + \frac{-2a}{(a^2 + 1)^2} \cos(at) - \frac{(a^2 - 1)}{(a^2 + 1)^2} \sin(at)$$

$$\begin{cases} y'' + y = b(t) \\ y \text{ nulla prima di zero} \end{cases}$$

$$b(t) = H(t) - H(t - \tau_0)$$

$$b(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} e^{-\tau_0 z}$$



WWW.INGONLINE.BIZ

$$(z^2 + 1) \mathcal{L}(y) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} e^{-\tau_0 z}$$

$$\mathcal{L}(y) = \underbrace{\frac{1}{z(z^2 + 1)}}_{y(z)} - \underbrace{\frac{1}{z^2(z^2 + 1)}}_{y'(z)} e^{-\tau_0 z}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma + R\lambda} \frac{e^{zt}}{z(z^2 + 1)} dz = \sum_{z_j = 0, \pm i} \text{Res} \left(\frac{1}{z(z^2 + 1)} e^{zt}, z_j \right)$$

$$\text{Res}(f(z), 0) = \left. \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} \right|_{z=0} = 1$$

$$\text{Res}(f(z), \pm i) = \left. \frac{e^{zt}}{z \cdot 2z} \right|_{\pm i} = \frac{e^{-it}}{-2} + \frac{e^{it}}{-2} = -\cos t$$

$$\text{Res}(f, -i) = \frac{ae^{zt}}{(z^2+a^2)2z} = \frac{ae^{zt}}{(z^2+a^2)2z} = \frac{ae^{-it}}{(a^2-1)-2ia} = \frac{2aie^{-it}}{(a^2-1)4} = \frac{aie^{-it}}{2(a^2-1)}$$

277

$$\frac{a}{(a^2-1)} \cos(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-a^2} \cos(at) + \frac{a}{(a^2-1)} \sin t$$

$$y'' + y' + y = b(t)$$

$$b(t) = H(t)e^{-t}$$

$$b(z) = \frac{1}{z+1}$$

$$g(z) = \frac{1}{(z+1)(z^2+z+1)}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma + iR} \frac{1}{(z+1)(z^2+z+1)} e^{zt} dz = \sum_{z_j = -1/\lambda + \frac{\sqrt{3}\lambda}{2}} \text{Res} \left(\frac{e^{zt}}{(z+1)(z^2+z+1)}, z_j \right)$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\text{Res}(f, -1) = \frac{e^{zt}}{z^2+z+1} = \frac{e^{-t}}{z^2+z+1}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}) &= \frac{e^{zt}}{(z+1)(2z+1)} = \frac{e^{(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2})t}}{(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2})(\sqrt{3}i)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it}}{(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2})} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it}}{\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2}} = \frac{2e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it}}{(-3 + \sqrt{3}i)} = \frac{(-3 - \sqrt{3}i) e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it}}{12} \end{aligned}$$

$$\text{Res}(f, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}) = \frac{e^{(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2})t}}{(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2})(-\sqrt{3}i)} = \frac{2e^{-\frac{1}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}it}}{-3 - \sqrt{3}i}$$

$$\frac{(-3 + \sqrt{3}i)2}{12} e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it} - \frac{1}{6} e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$\frac{2e^{-\frac{1}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}it}}{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \sqrt{3}i + 5\right)\left(-1 - \sqrt{3}i + 1\right)} = \frac{2\sqrt{3}i e^{-\frac{1}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}it}}{\left(\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot 3} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}i(1 + \sqrt{3}i) e^{-\frac{1}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}it}}{13 \cdot 3} = \frac{7\sqrt{3}i - 3}{39} e^{-\frac{1}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}it}$$

$$\frac{14\sqrt{3}}{39} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{2}{13} e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{13} e^{-t} \sin(2t) + \frac{2}{13} e^{-t} \cos(2t) + \frac{14\sqrt{3}}{39} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{2}{13} e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Soluzione equazione omogenea

WWW.ONLINEAZ

$$y'' + y' + y = 0$$

$$Hy'' + Hy' + Hy = 0$$

$$z^2 \mathcal{L}(Hy) - z y(0) - y'(0) + z \mathcal{L}(Hy) - y(0) + \mathcal{L}(Hy) = 0$$

$$\mathcal{L}(Hy) = \frac{z y(0) + y'(0) + y(0)}{z^2 + z + 1} = \frac{\alpha z + \beta}{z^2 + z + 1}$$

$$= \frac{\alpha z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{\alpha z}{\left|z + \frac{1}{2}\right|^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \alpha \frac{\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{-\frac{1}{2}\alpha + \beta}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \alpha \frac{\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \left(-\frac{1}{2}\alpha + \beta\right) \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\alpha e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha + \frac{2\sqrt{3}}{3}\beta\right) e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma + Ri} \frac{\alpha z + \beta}{z^2 + z + 1} e^{zt} dz = \sum_{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \text{Res} \left(\frac{(\alpha z + \beta) e^{zt}}{z^2 + z + 1}, dz \right) =$$

$$\frac{\alpha \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \beta}{-1 + \sqrt{3}i + 1} e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it} = \frac{\alpha \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \beta}{-1 - \sqrt{3}i + 1} e^{-\frac{1}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}it}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\alpha + \frac{2\beta}{2}\right) \frac{2}{2\sqrt{3}i} e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it} + \frac{\sqrt{3}\alpha}{2\sqrt{3}i} \alpha = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha + \frac{2\sqrt{3}}{3}\beta\right) e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it} + \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)x^p}$$

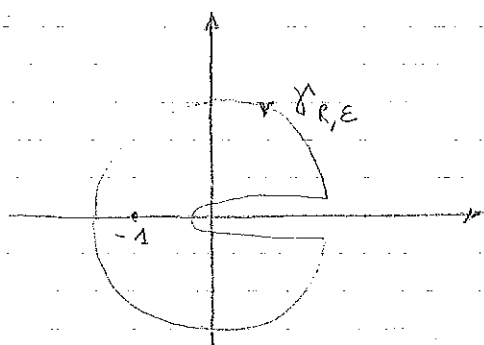
$$0 < p < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)z^p}$$

$$\text{dove } z^p = e^{p \ln z}$$

$$\ln z = (\ln|z| + i \operatorname{Arg}(z)), \quad \text{ok!}$$

$$\operatorname{Arg}(z) \in]0, 2\pi[$$



WWW.INGONLINE.BIZ

$$\oint_{\gamma_{R,\epsilon}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1) = \boxed{2\pi i \frac{1}{z^p} \Big|_{z=-1}} = \boxed{2\pi i e^{-ip\pi}}$$

$$-1 = e^{i\pi}$$

$$\ln(-1) = i\pi$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$\epsilon \rightarrow 0$ * tende

$$\int_{C_R} f(z) dz + \int_0^R \frac{dx}{(1+x)x^p} + \int_0^R \frac{dx}{(1+x)} e^{i2\pi p} x^p =$$

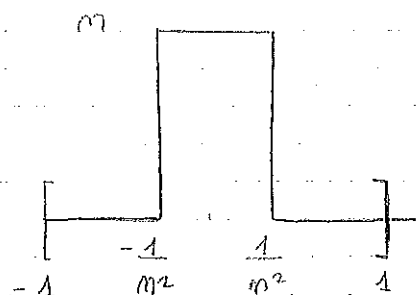
$$z^p = e^{p \ln|z|} = e^{p(\ln|z| + i \operatorname{Arg}(z))}$$

$$|z|^p e^{i \operatorname{Arg}(z)p}$$

$$= \left(1 - e^{-2\pi p i}\right) \int_0^R \frac{dx}{(1+x)x^p} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \left(1 - e^{-2\pi p i}\right) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)x^p}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi i}{e^{ip\pi} (1 - e^{-2\pi p i})} = \pi \frac{2i}{e^{ip\pi} - e^{-ip\pi}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(p\pi)}$$

sempre positivo $\forall \epsilon$ $0 < p < 1$



$$\frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m} m$$

$$\|f_m\|_\infty = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f_m(x)| = m$$

non converge

$$\|f_m\|_1 = \int_{-1}^1 f_m(x) dx = \frac{2}{m^2} \cdot m = \boxed{\frac{2}{m}}$$

$$f_m \rightarrow 0 \quad \text{IN NORMA 1}$$

Notiamo che $f_m(x) \rightarrow \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$

WWW.INGONLINE.PE

PROPRIETÀ DI UNA NORMA

Una funzione $\|\cdot\|$ è una norma se:

$$\boxed{\|u\| \geq 0} \quad \forall u \quad \|u\| = 0 \iff u = 0 \quad \leftarrow \boxed{1}$$

$$\|tu\| = |t| \|u\| \quad \text{se } t \in \mathbb{R} \quad \leftarrow \boxed{2}$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \leftarrow \boxed{3} \quad \text{disuguaglianza triangolare}$$

In $\mathbb{R}^N$ chiaro

Queste prop. si verificano queste prop.

La norma 1 non verifica fatto

$$\boxed{\|u\| = 0} \iff u = 0$$

ke sono funzioni diverse da 0 in alcuni punti e cui

integrale non è nullo

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \Rightarrow f_n(x) \Rightarrow f(x)$$

si POTREBBE VEDERE CHE

e $f_n \xrightarrow{L^1} f$ allora esiste una sottosuccessione n_k

da cui $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ per quasi ogni x

DEFINIZIONE

$L^2(A) = \{ f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ tale che } f^2 \text{ integrabile "nel senso del quasi ovunque"} \}$

Anche in L^2 se $f(x) = g(x)$ per quasi ogni x "sono la stessa funzione"

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_A |f(x)|^2 dx}$$

$$f_n \rightarrow f \text{ se } \|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$$

si potrebbe definire anche la norma $\|f\|_p = \left(\int |f|^p \right)^{1/p}$

e anche che $\|f\|_p \rightarrow \|f\|_\infty$

Questa L

www.mind.it

$$\text{Se } m(A) < +\infty \Rightarrow L^1(A) \subset L^2(A)$$

Fatto da ricordare

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \boxed{\alpha < 1}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \underline{\alpha > 1}$$

serie delle serie $\sum \frac{1}{n^\alpha} < \infty$
 $\alpha > 2$

$$(f, f) = \|f\|_2^2$$

2 funzioni ortogonali quando l'integrale del prodotto fa 0

DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ

$$|(f, g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Dimostrazione

Sia $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \|f + tg\|^2 = (f + tg, f + tg) = \|f\|^2 + (tg, f) + (f, tg) + (tg, tg)$$

$$\Rightarrow \|f\|^2 + 2t(f, g) + t^2 \|g\|^2$$

omogeneo rispetto al numero e simmetrico | PRODOTTI SCALARE

l'polinomio 2 grado in t deve essere $\geq 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \leq 0}$

$$(f, g)^2 - \|f\|^2 \|g\|^2 \leq 0 \Rightarrow \boxed{\text{TESI}}$$

$$\boxed{L_1(A)} = \{ \text{"funzioni" integrabili su } A \}$$

$$\boxed{L_2(A)} = \{ \text{"funzioni" a quadrato integrabili su } A \}$$

funzioni vanno intesi a meno di 1 quasi ovunque

$$\underline{f \in L^1} \rightarrow \int_A |f(x)| dx$$

$$\boxed{\|f\|_1}$$

$$\underline{f \in L^2} \rightarrow \int |f|^2 \quad (\text{energia di } f)$$

$$\boxed{\sqrt{\int_A |f|^2}} = \|f\|_2$$

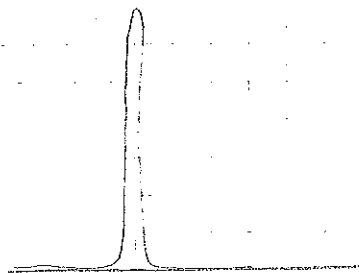
NORMA 2 radice dell'energia

$\Rightarrow$ introduce automaticamente delle convergenze

$$\underline{f_n} \xrightarrow[L_2]{L_1} \underline{f} \quad \text{se} \quad \boxed{\|f_n - f\|_{L_1(L_2)} \rightarrow 0}$$

fatti

$$\underline{f_n \xrightarrow{L^1} 0} \quad \text{non uniformemente}$$



WWW.INGO.NE.BE

Se $\boxed{f, g} \in L^2$ (quadrato sommabile) a energia finita $\boxed{f \cdot g \in L^1}$
 (segue dal fatto che $\boxed{ab} \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$)

$$\boxed{\int |f(x)g(x)|} \leq \frac{1}{2} \int |f(x)|^2 + \frac{1}{2} \int |g(x)|^2$$

In generale f integrabile $\Leftrightarrow |f|$ integrabile
 $\Leftrightarrow f^+ \quad f^-$ integrabili

POSSO DEFINIRE PRODOTTI SCALARE (direttamente nel caso di num. complessi)

$$(f, g) = \int_A f(x) \overline{g(x)} dx$$

Disuguaglianza Swothz

$$|(f, g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

L^1 e L^2 SONO SPAZI VETTORIALI

NOTA

se prendo f_0 in L^2 fissa, posso considerare

WWW.INGONLINE.BIZ

$$T(f) = \int_A f(x) f_0(x) \quad (\text{caso reale})$$

$$T : L^2(A) \rightarrow \mathbb{R}$$

T è un OPERATORE LINEARE da L^2 in $\mathbb{R}$

$$|T(f)| \leq \|f_0\|_2 \|f\|_{L^2} \quad \left(\Leftrightarrow |T(f) - T(g)| \leq \|f_0\|_2 \|f - g\|_2 \right)$$

$\uparrow$
 T continuo

$\swarrow$ conseguenza della disug. Swothz

Viceversa mi posso chiedere se dato $T : L^2(A) \rightarrow \mathbb{R}$, T

lineare e continuo posso dire che $(\Leftrightarrow \exists K \text{ tale che } |T(f)| \leq K \|f\|_2)$

$$T(f) = \int_A f_0 f$$

RISPOSTA È SÌ. Dato $T \quad \exists f_0 \in L^2$

se $f_n \rightarrow f$ in conv. unif

$$T(f_n) \rightarrow T(f)$$

PROBLEMA

A compatto (es. intervallo chiuso)

Dato $T : C^0(A) \rightarrow \mathbb{R}$,

T LINEARE, T CONTINUO

CIOE'

$$|T(f)| \leq K \|f\|_\infty$$

Posso dire che $T(f) = \int f \cdot f_0$

con $f_0 \in L^1$

NO

Esempio

$$T_{x_0}(f) = f(x_0) \quad (x_0 \in A \text{ fisso})$$

WWW.INGONLINE.IT

$$f \rightarrow f(x_0)$$

T LINEARE

$$T_{x_0}(\lambda f + \mu g) = \lambda f(x_0) + \mu g(x_0) = \lambda T_{x_0}(f) + \mu T_{x_0}(g)$$

T CONTINUO cioe'

$$|T_{x_0}(f)| = |f(x_0)| \leq \max_{x \in A} |f(x)| = \|f\|_\infty$$

$$K(\text{norma operatore}) = 1$$

T_{x_0} non e' integrabile

Non esiste $f_0 \in L^1$ tale che

$$f(x_0) = \int f(x) f_0(x) dx \quad \forall f \in C^0(A)$$

FATO (Riguardante gli integrali)

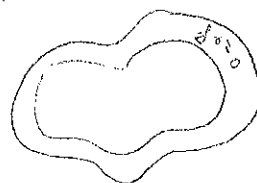
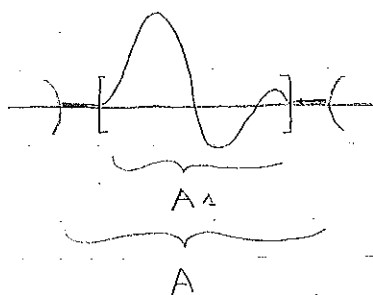
235

$$A \subset \mathbb{R}^N \text{ APERTO}, f_0 \in L^1(A)$$

$$C_0^\infty(A) = \left\{ f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue a supporto compatto} \right\}$$

cioè $f(x) = 0$ se $x \in A_1$ se A_1 chiuso e $A_1 \subset A$

e' zero
sul bordo



Se $\int_A f_0 f = 0 \quad \forall f \in C_0^\infty \Rightarrow \boxed{f_0 = 0} \text{ quasi ovunque}$

Desidero fare con la funzione $f(x)$



f_0 non lo conosco x per x

ma se so fare $\int f_0 f$ WWW.INGONLINE.BIZ

non so chi è $f_0(x)$ mi interessa $\int_a^b f_0$ mi renderò conto

se prendo $\int f_0 f$ $\times \forall f$ continuo se conosco questi integrali

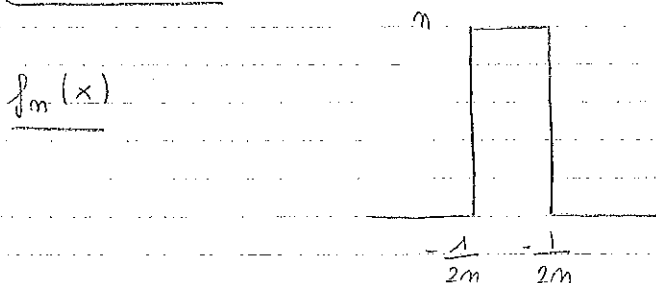
conosco f quasi ovunque

Se si pone una tale funzione

f_0 dovrebbe essere nulla su $] -1, 1[\setminus \{0\}$

$$\int_{-1}^1 f_0 = \int_{-1}^1 f_0 \cdot 1 = 1$$

osservazione



ma, la compiamo
sempre di più, la
densità aumenta.

$$f_m \in L^1, \quad \|f_m\|_{L^1} = 1$$

$$T_m(f) = \int f_m f, \quad \forall f \in C^0([-1, 1])$$

T_m lineare continuo su $C^0([-1, 1])$.

$$T_m(f) \leq \underbrace{\|f_m\|_1}_1 \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

WWW.ONLINE.BIZ

$T_m \rightarrow T$ negli operatori su $C^0([-1, 1])$

Almeno nel senso che $T_m(f) \rightarrow T(f)$

$$m \int_{-\frac{1}{2m}}^{\frac{1}{2m}} f(t) dt \rightarrow f(0)$$

media
integrale della f sull'intervallo

$$\frac{1}{\frac{1}{m}} \int_{-\frac{1}{2m}}^{\frac{1}{2m}} f(t) dt$$

Con queste funzioni possiamo generare tutte le funzioni di L^2 (sono una base)?

238

$$E_m = \left\{ \sum_{j=-m}^m c_j e_j, \quad c_j \in \mathbb{C} \right\} \quad m \in \mathbb{N}$$

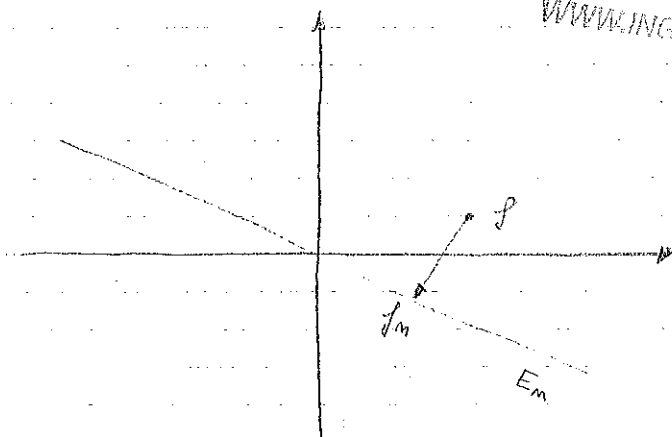
E_m è un sottospazio di dimensione finita in L^2 generato da

$$e_{-m}, \dots, e_0, \dots, e_m$$

$$(\dim(E_m) = 2m+1)$$

Dato f in L^2 la voglio proiettare

su E_m



TROVARE L'ELEMENTO f_m di E_m che minimizza la distanza da f

IDEA $\rightarrow$ cerco di fare in modo che $f_m - f$ sia ortogonale

$$\text{a } E_m \quad (f_m - f) \perp E_m$$

$$f_m = \sum_{j=-m}^m \hat{c}_j e_j$$

f_m sta in E_m

f_m è proiezione (di min. distanza)

Inghot:

241

Sia $f \in E_m$

$$p = \sum_{j=-m}^m c_j e_j$$

$$\|f - p\|^2 = (f - p, f - p) =$$

$$\underbrace{(f - f_m)}_{\perp E_m} + \underbrace{(f_m - p)}_{\in E_m}, \underbrace{(f - f_m)}_{\perp E_m} + \underbrace{(f_m - p)}_{\in E_m} =$$

$$\|f_m - f\|^2 + \|f_m - p\|^2 \geq \|f_m - p\|^2$$

MINIMA
DISTANZA

esattamente
quando

$$p = f_m$$



WWW.INGONLINE.BIZ

quero la questa minima
distanza

$$\times \text{ke } (f_m - f) \perp f_m$$

$$\|f_m - f\|^2 = (f_m - f, f_m - f) = (f_m - f, -f)$$

$$\left(\sum_{j=-m}^m \hat{c}_j e_j - f, \sum_{j=-m}^m \hat{c}_j e_j - f \right) =$$

$$\hat{c}_k = (f, e_k)$$

$$(-\sum (\hat{c}_j e_j, f)) + \|f\|^2$$

$$-\sum \hat{c}_j (e_j, f) + \|f\|^2 = -\sum \hat{c}_j \overline{(f, e_j)} + \|f\|^2$$

$$\|f\|^2 = \sum_{j=-m}^m |\hat{c}_j|^2$$

con forza t. pirapora el tracop. sopra

$$\hat{c}_{-k} = \overline{\hat{c}_k}$$

243

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{c}_k e_k$$

$$a_0 e_0 + \sum_1^{+\infty} \hat{c}_k e_k + \overline{\hat{c}_k e_k} =$$

$$a_0 e_0 + 2 \sum_1^{\infty} \operatorname{Re}(\hat{c}_k e_k) =$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\left((a_k - i b_k) (\cos(\omega_k t) + i \sin(\omega_k t)) \right)$$

$$= a_0 e_0 + \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t) \right)$$

$$f = \sum c_k e^{i \omega_k t} \quad c_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(t) e^{-i \omega_k t}$$

FATTO IMPORTANTE.

Lo spazio $L^2(0, T)$ è completo. Cioè se (f_n) è di Cauchy *
 rispetto a $\|\cdot\|_{L^2} \Rightarrow (f_n)$ ha limite in $L^2([0, T])$.

* (f_n) di Cauchy in L^2 significa $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}$ t.c. se $n, m > \bar{n}$

$\|f_n - f_m\|_{L^2} < \varepsilon \Rightarrow \forall$ successione omette limite

ALLORA DIMOSTRIAMO CHE SE $\sum |c_n|^2 < +\infty$

costo $f_n = \sum_{k=-n}^n c_k e_k$

$$e_k = \frac{e^{i 2\pi k t}}{\sqrt{T}}$$

(f_n) È DI CAUCHY IN $L^2 \Rightarrow \exists f: f_n \xrightarrow{L^2} f$

infatti sono dati $n > m$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\|f_n - f_m\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^n c_k e_k + \sum_{k=-n}^{-m-1} c_k e_k \right\|^2$$

(1) (2)

$$= \sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{-m-1} |c_k|^2$$

-m -m m m

PER CAPIRE

(1+2, 1+2)

$$= (1, 1) + 2(1, 2) + (2, 2)$$

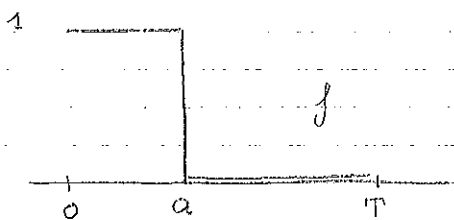
$$\|1\|^2 \quad \text{ortogonali} \quad \|2\|^2$$

$$\sum_{k=m+1}^n c_k \bar{e}_k (e_k, e_h) = \sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 (e_k, e_k)$$

$$\Rightarrow \|f_n - f_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{-m-1} |c_k|^2 \leq$$

Esempi

24.7.8



$$C_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt = (f; e_k)$$

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^a e^{-i\omega_k t} dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \left[\frac{e^{-i\omega_k t}}{-i\omega_k} \right]_0^a =$$

$$\frac{i T}{\sqrt{T} 2\pi k} (e^{-i\omega_k a} - 1)$$

$$C_k = \frac{i \sqrt{T}}{2\pi k} (e^{-i\omega_k a} - 1) =$$

$$= \frac{i \sqrt{T}}{2\pi k} (\cos(\omega_k a) - 1 - i \sin(\omega_k a)) = C_k = \frac{e^{i\omega_k t}}{\sqrt{T}}$$

$$= \frac{1}{k} \frac{\sqrt{T}}{2\pi} (\underbrace{\sin(\omega_k a)}_{a_k} + i \underbrace{(\cos(\omega_k a) - 1)}_{b_k})$$

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{C_k}{\sqrt{T}} e^{i\omega_k t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(a_k + i b_k) (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t)}{\sqrt{T}}$$

$$b_0 = 0 \text{ se } f \in \mathbb{R}$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f \bar{e}_k \in \mathbb{R}$$

$$= a_0 \frac{1}{\sqrt{T}} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{a_k}_{\text{pari}} \cos(\omega_k t) + \underbrace{b_k}_{\text{dispari}} \sin \omega_k t$$