

- Serie di Fourier
- Trasformata di Fourier e Laplace
-)-(Variabili complesse)

implicazioni

Equazioni differenziali

Inquadramento nello "spazio vettoriale di funzioni"

Spazi vettoriali
"di funzioni"

Ricevimento : dalle 10:30 - 13:00

Richiami

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

A sottoinsieme $\mathbb{R}^N$ (spazio n-dimensionale), $(x_1, \dots, x_N)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

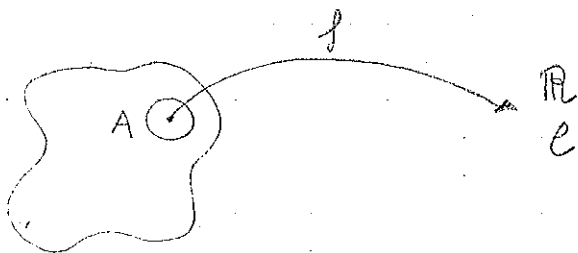
vale dire

$$l \in \mathbb{R}$$

$$x_0 \in A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

OVVERO:

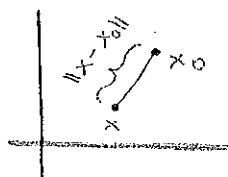


WWW.INGONLINE.BIZ

 $\| \cdot \| \rightarrow$ NORMA

$$\|x - x_0\| = \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + \dots + (x_N - x_{0N})^2}$$

$$N=2 \quad \text{distanza } x \text{ e } x_0$$



CRITERIO DI CAUCHY

Supponiamo di avere una successione di punti di $\mathbb{R}^N$ (x_n)

$$x_1, x_2, x_3, x_4$$

SI DICE CHE LA SUCCESSIONE (x_n) E' DI CAUCHYSE $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{m}$ tale che $m, n \geq \bar{m}$

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

I termini tendono a essere più vicini

Dico che f_n tende uniformemente a f su A , se [UNIFORMEMENTE]

$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}$ tale che se $n \geq \bar{n}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon} \quad \boxed{\forall x \in A}$$

Ovvero $\bar{n}$ deve andare bene per tutte le x

Si può anche dire $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ OVVERO $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$
 secondo la definizione di NORMA UNIFORME CHE DARÀ DOPO

Nel nostro esempio (esempio della notte)

$f_n \rightarrow f$ uniformemente su $[0, T]$ ma non su tutto $\mathbb{R}$

Se $T > 0$ finito $\max_{[0, T]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{[0, T]} \left| \frac{x}{n} \right| = \frac{T}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

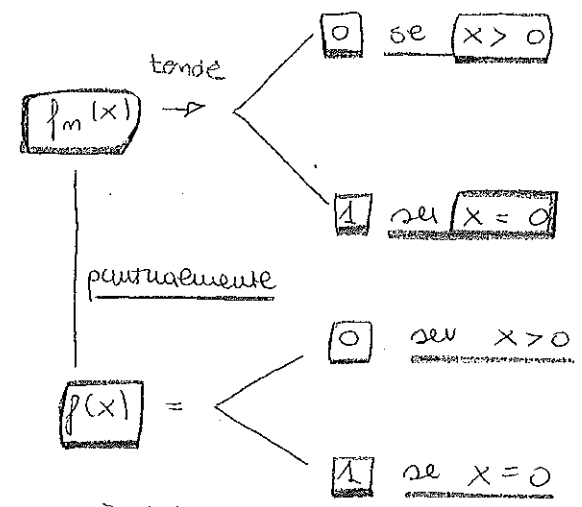
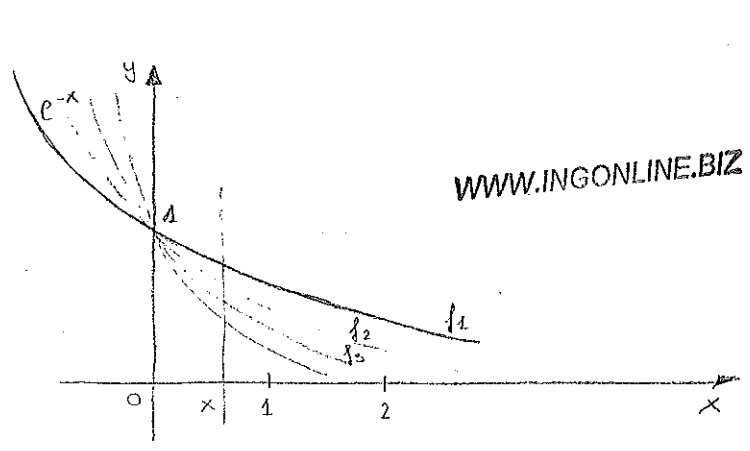
NON È VERO CHE $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $\mathbb{R}$

$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$ (non può tendere a 0)

✓ $\forall n$ trovo x per cui $|f_n(x) - f(x)| > 1$ $\rightarrow$ in termini formalmente più corretti

Defetti della convergenza puntuale: per capirci facciamo alcuni esempi

esempio: $f_n(x) = e^{-nx}$, $A = [0, 1]$

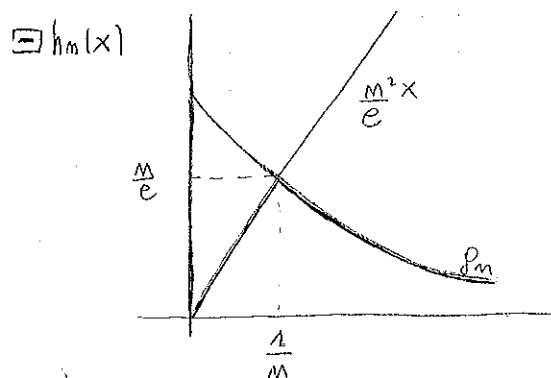


limite puntuale di funzioni continue non è detto che sia continuo - $f(x)$ infatti non è continua.

[LIMITE PUNTUALE DI FUNZIONI CONTINUE NON È DETTO CHE SIA CONTINUO]

Si può modificare il nostro esempio in modo da considerare $[0, +\infty[$
 $[0, 1]$

$$h_m(x) = \begin{cases} p_m(x) & \text{se } x \geq \frac{1}{m} \\ \frac{m^2 x}{e} & 0 \leq x \leq \frac{1}{m} \end{cases}$$



$$h_m(x) \rightarrow 0 \quad \forall x > 0$$

$$\text{fatto } x \quad h_m(x) = p_m(x) \quad \text{e } m \text{ è grande}$$

$$h_m(0) = 0 \rightarrow 0$$

quindi $h_m \rightarrow 0$ puntualmente su $[0, +\infty[$

ma si può vedere $\int h_m(x) \rightarrow c \neq 0$

LA CONVERGENZA PUNTUALE NON VA D'ACCORDO CON LA CONTINUITÀ

CON L'INTEGRALE $\rightarrow$ se $f_m \rightarrow f$ puntualmente non è detto che $\int_A f_m \rightarrow \int_A f$

limite puntuale di f
 continuo può non essere
 continuo $\rightarrow$ non si
 può invertire ordine
 dei limiti

$$f_m: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

f_m CONVERGE UNIFORMEMENTE

a f su A , se

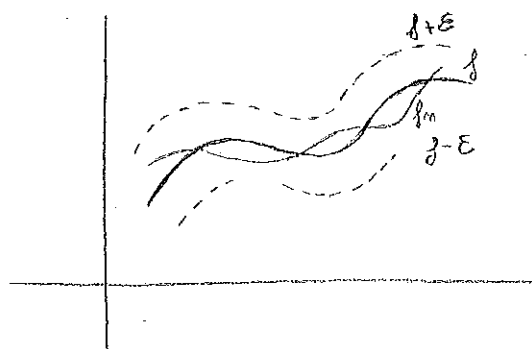
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

QUESTO VUOL DIRE
 CHE SI VEDE GRAFICAMENTE

$$\forall \epsilon > 0$$

$$f_n \in \text{tubo } (f, \epsilon)$$

per n grande.



WWW.INGONLINE.BIZ

NOTAZIONE

Data una f

$$\|f\|_{\infty}$$

(norma uniforme)

$$= \sup_{x \in A} |f(x)|$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$$

NORMA UNIFORME di f

Intuitivamente questo vuol dire che :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$\underbrace{\quad}_{l_n} \qquad \underbrace{\quad}_{f(x)}$

Posso scambiare ordine con cui posso i limiti

Dimostrazione

1) DIAMOLA PER BUONA si ammette cioè che $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} l_n = l$

Dimostriamo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

Prendiamo $\varepsilon > 0$ valore differenza $|f(x) - l| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - l_n + l_n - l|$

$$\leq \|f_n - f\|_\infty + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l|$$

/ perché il max della espressione di I.

Se prendo n grande
i 3 termini sopra :

- PER CONVERGENZA UNIFORME $\|f_n - f\|_\infty$ diventa piccolo quanto vogliamo
- II si trova uguale $|f_n(x) - l_n|$
- III diventa piccolo quanto vogliamo per il punto x che abbiamo dato per buono.

lo prendo lo minimo $\frac{\varepsilon}{3}$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3}$$

ma lo prendiamo minimo di $\varepsilon/3$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + |f_n(x) - l_n| + \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \Rightarrow$$

$$|f(x) - l| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(x) - l_n|$$

WWW.INGONLINE.BIZ

A questo punto dato che $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n$ (n fissato)

N. FISSATO

Trovo δ tale che

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - l_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

per la defniz di limite

$$\Rightarrow \text{per tutti } x \text{ si ha } |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$\text{cioè } f(x) \rightarrow l \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Dal disegno si vede che il massimo della differenza si ha a π

per vederlo chiamo $h_m(x) = f(x) - f_m(x) = x - m \sin\left(\frac{x}{m}\right)$

)

calcolo derivata

$$h'_m(x) = 1 - \cos\left(\frac{x}{m}\right) \geq 0$$

$\Rightarrow$ cresce sempre ha 1 mm in 0 e il max in π cos minore di 1

$$\Rightarrow \max_{0 \leq x \leq \pi} h(x) = h_m(\pi) = \left(\pi - m \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \right) \rightarrow \pi \rightarrow 0$$

$$\|f_m - f\|_{\infty} \rightarrow 0$$

per il limite notevole

$$\frac{\sin \frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}} \rightarrow 1$$

$\rightarrow$ questa successione tende uniformemente alla funzione x

In altro modo con sviluppo di Taylor

resto in forma di Lagrange

$$f(x) - f_m(x) = x - m \sin\left(\frac{x}{m}\right)$$

$$= x - m \left(\frac{x}{m} - \frac{\cos(\xi_m)}{2} \frac{x^2}{m^2} \right) =$$

$$\xi_m \text{ compreso } 0 \leq \xi_m \leq \frac{x}{m}$$

$$\sin y = y + \frac{\cos(\xi)}{2} y^2$$

per un opportuno ξ tra 0 e y

$$= \frac{\cos(\xi_m)}{2} \frac{x^2}{m} \leq \frac{x^2}{2m}$$

perché $\cos \leq 1$

WWW.INGONLINE.BIZ

Prendo

Minimo su $[0, \pi]$ trovo $\|f - f_m\|_{\infty} \leq \frac{\pi^2}{2m}$ e questa $\rightarrow 0$

per m che tende all'infinito.

Indico con $C^0(A)$ l'insieme di funzioni continue su A $\{f: A \rightarrow \mathbb{R}\}$



Osservazione



è uno

SPAZIO VETTORIALE

ovvero

WWW.INGONLINE.BIZ

se

$$f_1, f_2 \in$$



$\Rightarrow$

$$f_1 + f_2 \in$$



$$c \in \mathbb{R}$$

$$c f_1 \in$$



se considero $\|f\|_{\infty} \Rightarrow$ OTTENGO UNA NOZIONE DI "DISTANZA TRA I PUNTI"

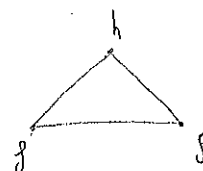
$$\text{distanza}(f, g) = \|f - g\|_{\infty}$$

distanza $(f, g) = \|f - g\|_\infty$

Valore disuguaglianza triangolare

i cioè $f, g, h \in X$

$\text{dist}(f, h) \leq \text{dist}(f, g) + \text{dist}(g, h)$



somma dei 2
con maggiore del
terzo lato

$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

OSSO CONSIDERARE LE APPLICAZIONI LINEARI SU X

per es. $L : X \rightarrow \mathbb{R}$

1) $L_1(f) = \int_a^b f(x) dx$

dato una funz. scelta valore nel punto x_0

E' lineare : ovvero $L(f+g) = L(f) + L(g)$

$L(cf) = cL(f)$

$L_2(f) = \int_A f(x) dx$

2 applicazioni lineari dalle funzioni continue ai numeri reali

se $L : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ LINEARE

} infatti (L matrice $N \times M$)

$\Rightarrow$ L E' CONTINUA

WWW.INGONLINE.BIZ

1) "In realtà" quando lo spazio ha dimensione $\infty \rightarrow$

SE CONSIDERO APPLICAZIONI LINEARI SU X NON E' DETTO CHE SIANO

CONTINUE - (VA VERIFICATO CASO PER CASO)

= continua $F(x) \rightarrow F(x_0)$ se $x \rightarrow x_0$

o con una successione $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow F(x_n) \rightarrow F(x_0)$

CONTINUITA'

Vel mostro caso

$L : X \rightarrow \mathbb{R}$

e continua se

$f_n \rightarrow f$ uniformemente $\Rightarrow (L(f_n) \rightarrow L(f))$

1) Le 2 applicazioni di I sono anche continue $L_1(f) = \int_a^b f(x) dx$

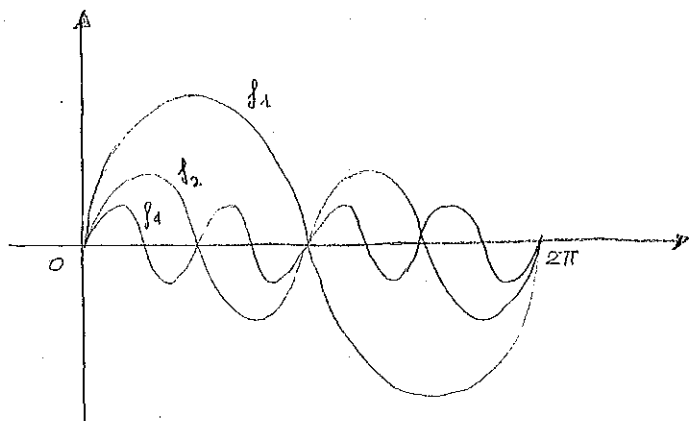
$L_2(f) = \int_A f(x) dx$

come applicazioni da $C^0(A)$ in $\mathbb{R}$

Esempio

13

$$f_m(x) = \frac{1}{m} \sin(mx) \quad \text{su } [0, 2\pi]$$



$f_m \rightarrow 0$ uniformemente

$$\|f_m\|_\infty = \frac{1}{m} \rightarrow 0$$

$$f'(x) = \cos(mx) \neq 0$$

$$\|f'_m\|_\infty = 1$$

NON È POSSIBILE CHE $f'_m \xrightarrow{\text{UNIF}} 0$

perché se $f'_m \rightarrow 0 \Rightarrow \|f'_m\| \Rightarrow \|0\| = 0$

e invece fa 1 in tutti i punti

Della disp. triang. deriva infatti

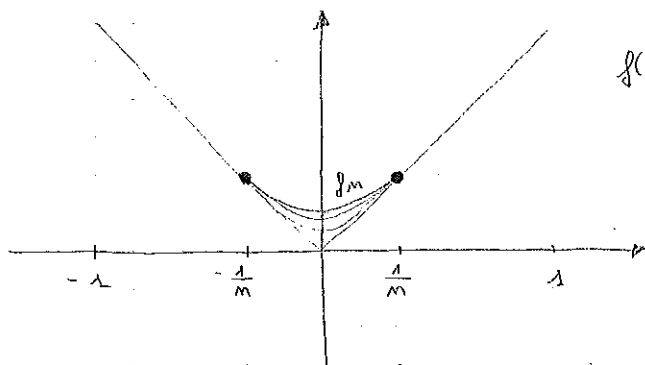
$$f_m \xrightarrow{\text{unif}} f \Rightarrow \|f_m\|_\infty \rightarrow \|f\|_\infty$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Altro problema della derivata

se $\forall m$ f_m DERIVABILE e $f_m \rightarrow f$ uniformemente non è detto che f sia derivabile - ~~NON È CHIUSO ALLA CONVERGENZA~~ UNIFORME

$$f(x) = |x|$$



$$f(x) = |x|$$

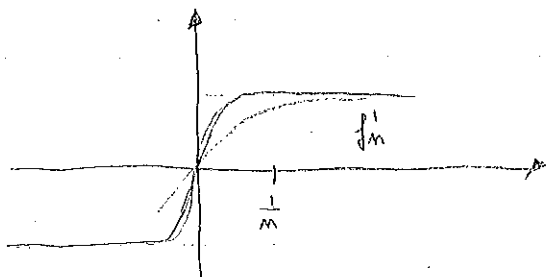
Non è continua

$\Rightarrow$

prendiamo

$f(x)$ fuori $[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]$

$f_m(x)$ parabola che passa $(-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}), (\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$ con derivata 1



La funzione limite non ha derivata

$$\|f_m - f\|_\infty \rightarrow 0$$

3. conseguenza della completezza X

15

Serie di Funzioni SERIE DI FUNZIONI

1) $f_1, f_2, \dots, f_m$ funzioni da $A \rightarrow \mathbb{R}$

Sommolesso

$$f_m(x) = f_1(x) + \dots + f_m(x) = \sum_{k=1}^m f_k(x) \quad (\text{Sono funzioni da } A \rightarrow \mathbb{R})$$

beno chiedermi se esiste g tale che $f_m \rightarrow g$ UNIFORMEMENTE

Deco che la serie $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ è UNIFORMEMENTE CONVERGENTE SE

ESISTE $g(x)$ tale che $\sum_{k=1}^m f_k \xrightarrow{\text{UNIF}} g$ AUTOMATICAMENTE $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ CONTINUA IN X

$$\Rightarrow \forall x \in A \quad \sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) \in \mathbb{R} \quad \text{È CONVERGENTE}$$

SOMMA DI FUNZIONI CONTINUE È CONTINUA

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_m(x)$$

supponiamo di sapere che $f_1, \dots, f_m$ continue $\in C^0(A) = X$

(A LIMITATO E CHIUSO)

Supponiamo di sapere anche

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|f_m\|_{\infty} < +\infty \quad (\text{serie numerica})$$

$$\Rightarrow \text{serie delle } f_m \quad \sum_{m=1}^{\infty} f_m \quad \text{È CONVERGENTE UNIFORMEMENTE}$$

(quindi mi da una funzione continua)

WWW.INGONLINE.BIZ

Dimostrazione

$$\text{chiamiamo } g_m(x) = \sum_{k=1}^m f_k(x)$$

logico dimostrare che esiste g , tale che $g_m \rightarrow g$ uniformemente - Dimostrare che g_m ha la proprietà di Cauchy - Fisso ϵ positivo $(\forall \epsilon \exists \bar{m} / \forall m, m' > \bar{m} \quad \|g_m - g_{m'}\|_{\infty} < \epsilon)$

$$\|g_m - g_{m'}\|_{\infty} = \left\| \sum_{k=1}^m f_k - \sum_{k=1}^{m'} f_k \right\|_{\infty} = \left\| \sum_{k=m+1}^{m'} f_k \right\|_{\infty} \leq \sum_{k=m+1}^{m'} \|f_k\|_{\infty} =$$

$$= \sigma_m - \sigma_m \quad \text{dove } \sigma_m = \sum_{k=1}^m \|f_k\|_{\infty} \quad \text{e} \quad \sigma_m = \sum_{k=1}^m \|f_k\|_{\infty}$$

So so che σ_m converge $\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty} < +\infty \Rightarrow$ è di Cauchy

APPLICAZIONE ALLE SERIE DI POTENZE

17

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$x_0 \in \mathbb{R}$$

a_n coefficiente reale

PROBLEMI:

per quali x

la serie converge -

proprietà di F (derivata, continuità)

conviene ambientare il problema nei complessi $\mathbb{C}$

bisogna sostituire $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ in tutte le cose che abbiamo fatto I

$$f: A \rightarrow \mathbb{C}$$

$$|f(x)| = \text{MODULO NEI COMPLESSI}$$

$$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$\Rightarrow a_n$ sono numeri complessi

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$\begin{array}{l} z_0 \in \mathbb{C} \\ a_n \in \mathbb{C} \end{array}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Come converge (se converge) questa serie? Problema è anche l'insieme in cui mi metto A .

conviene studiare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n (z-z_0)^n\|_{\infty, A}$$

TEOREMA: Supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = c \in [0; +\infty]$$

$$\text{CHIAMO } \bar{R} = \frac{1}{c} = (+\infty \text{ se } c=0, \text{ } 0 \text{ se } c=+\infty) \text{ reciproco}$$

$$\text{ALLORA } \forall R < \bar{R} \text{ LA SERIE IN ESAME } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ CONVERGE}$$

UNIFORMEMENTE SUL DISCO $B(z_0, R)$, entro z_0 e raggio R

INOLTRE LA SERIE NON CONVERGE IN NESSUN z FUORI DA $B(z_0, \bar{R})$

$$B(z_0, R) = \{z : |z-z_0| \leq R\}$$

Non si riesce a dire nulla su quello che ho sul disco

19

Dimostrazione 1, $R < \bar{R}$

$$f_m(z) = \sum_{k=0}^m p_k(z) \quad \text{dove} \quad p_k(z) = a_k (z-z_0)^k$$

Voglio far vedere che è unif. conv.

Mostriamo che $\sum_{m=0}^{\infty} \|p_k\|_{\infty, B(z_0, R)} < \infty$

$$\|p_k\|_{\infty, B(z_0, R)} = \max_{|z-z_0| \leq R} |a_k (z-z_0)^k| = |a_k| R^k$$

mi basta dimostrare che $\sum_{m=0}^{\infty} |a_m| R^m < +\infty$

Una serie maggiorata da una serie conv. è convergente

CRITERIO DELLA RADICE per le serie numeriche a termini positivi

$$C_m > 0$$

$$\sum C_m < +\infty$$

$$\sqrt[m]{C_m} \rightarrow l < 1$$

$$C_m = l^m; \text{ se } \sum l^m \text{ conv}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$\Rightarrow$ applico criterio della radice

$$\sqrt[m]{|a_m| R^m} = R \sqrt[m]{|a_m|} \rightarrow \boxed{R_c} = \frac{R}{R} \quad \boxed{\frac{R}{R} < 1} \text{ perche } R < \bar{R}$$

Dimostrazione 2

se $|z-z_0| > \bar{R}$, NON PUO' ESSERE CHE $|a_m (z-z_0)^m| \rightarrow 0$

perche il suo modulo $|a_m (z-z_0)^m| \neq 0$

$$\text{perche } \sqrt[m]{|a_m| (z-z_0)^m} = |z-z_0| \sqrt[m]{|a_m|} \rightarrow \frac{|z-z_0|}{R} > 1$$

(un po' come $l^m \rightarrow \infty$ se $l > 1$)

Quindi dati $a_m \in \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ la serie $\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-z_0)^m = f(z)$

definisce una funzione $f: \dot{B}(z_0, \bar{R}) \rightarrow \mathbb{C}$

$$(\dot{B}(z_0, \bar{R})) = \{z: |z-z_0| < \bar{R}\} \quad \text{disco}$$

SE PARTO DA 1 FUNZIONE $f \in C^\infty$

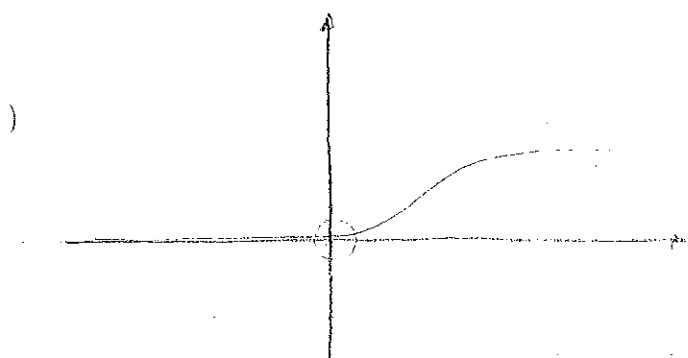
trovo $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ e costruisco

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \Rightarrow \text{RITROVO } f \quad \text{NO}$$

CONTROESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$x_0 = 0$$



$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = x^{-2} e^{-x^{-1}} \rightarrow 0$$

l'esponenziale vince

$$f'(0) = 0$$

$$f''(x) = (-2x^{-3} + x^{-4}) e^{-x^{-1}}$$

$$\rightarrow 0$$

$$f''(0) = 0$$

In generale $f^{(k)} = \text{polinomio}(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$

$f \in C^\infty$ e tutte le derivate sono nulle in 0, $f^{(k)}(0) = 0, \forall k$

$$\Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0$$

LO SVILUPPO DI TAYLOR TENDE A ZERO

WWW.INGONLINE.DIZ

$$f \neq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m, \quad \forall x > 0$$

$\Rightarrow$ LE SERIE DI POTENZE SONO FUNZIONI PIÙ "REGOLARI" DELLE C^∞ (in $\mathbb{R}$)

DEF: Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, A aperto (non contiene punti di frontiera)

f SI DICE ANALITICA se $f \in C^\infty$ e

$$\forall x_0 \in A \quad \exists \delta \text{ tale che } f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x-x_0)^m$$

$$\text{in }]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$$

$$A^m - B^m = (A-B)(A^{m-1} + A^{m-2}B + \dots + AB^{m-2} + B^{m-1})$$

$$\Rightarrow 1 - z^{m+1} = (1-z)(1+z+z^2+\dots+z^m), \quad (1-z^{m+1}) = (1-z) \sum_{k=0}^m z^k$$

$$\sum_{k=0}^m z^k = \frac{1-z^{m+1}}{1-z} \rightarrow \frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1}$$

23

$$\|z\| < 1 \quad \text{CONVERGE}$$

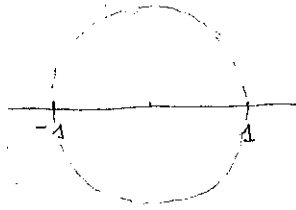
$$\rightarrow 0 \text{ se } \|z\| < 1$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}$$

$$a_m = \frac{1}{m}$$

$$\sqrt[m]{\frac{1}{m}} \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \text{RAGGIO E' } 1$$



$f(x)$ è definita su $]-1; 1[$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m$$

$$\text{uguale a quella di } I = \frac{1}{1-x}$$

Questa è la primitiva $\Rightarrow$

$$f(x) = (-\ln(1-x) + c)$$

$$f(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$c = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$\forall x \in]-1; 1[$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} m x^m = f(x)$$

$$\sqrt[m]{m} \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \text{RAGGIO E' } 1$$

$$f(x) = x \sum_{m=1}^{\infty} m x^{m-1} = x \sum_{m=0}^{\infty} x^m = x \left(\frac{1}{1-x}\right)' \Rightarrow x \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$x^m = m x^{m-1} \quad x \left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m\right)'$

$$\sqrt[m]{|a_m|} < \begin{cases} 1 & m \text{ pari} \\ 0 & m \text{ dispari} \end{cases}$$

il limite non esiste perco

25

$$\max \lim \sqrt[m]{|a_m|} = 1$$

$$\bar{R} = 1$$

Questa serie converge sul disco di raggio 1

In realtà f la so ede allora

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-z^2)^m = \frac{1}{1+z^2}$$

$$\text{se } |z| < 1$$

serie geo di ragione z^2

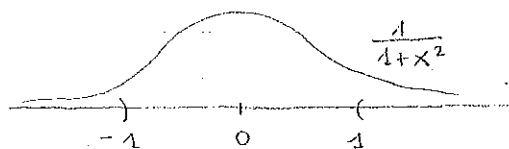
$$\sum_{m=0}^{\infty} w^m = \frac{1}{1-w}$$

$$\text{se } |w| < 1$$

Se guardo solo x reali

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{per } -1 < x < 1$$

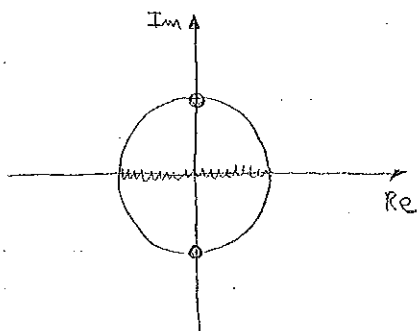


$$\text{per } -1 < x < 1$$

funz. fcas omeppo in o
questo converge a f da -1 a 1

WWW.INGONLINE.BIZ

Nei esempi f ha 2 singolarità in i e $-i$ ($|i| = |-i| = 1$)



Dimostrazione

27

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k}_{\text{polinomio}} + \underbrace{\frac{f^{(m+1)}(\xi_{mx})}{(m+1)!} (x-x_0)^{m+1}}_{R_m(x)}$$

ξ_{mx} tra x e x_0

resto in forma di Lagrange

$m \rightarrow \infty$ la speranza è che resto tende a 0

Se dimostro che $|R_m(x)| \rightarrow 0$,

$$|R_m(x)| \leq \frac{M^m \delta^m}{(m-1)!} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

perché $m!$ va all'inf + velocemente x^m

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad (x_0=0) \quad \text{quanto fa?}$$

Reggio di convergenza

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \rightarrow 1$$

$$\bar{R} = 1$$

$f(x)$ esiste $[-1; 1]$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$x f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$(x f'(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow x f'(x) = -\ln|1-x| + c \quad \text{se } x=0 \text{ trovo } c=0$$

Questa serie (di matrici), o di punti di $\mathbb{R}^{n^2}$ converge perché

29

$$1) \sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{A^m}{m!} \right|_{\mathbb{R}^{n^2}} < +\infty$$

serie di numeri

$$\leq \sum \frac{|A|^m}{m!} = e^{|A|} < +\infty$$

se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $|A| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$A^0 = I \quad e^0 = I$$

$$e^A * e^B = e^{A+B} \quad \text{vero se } A \text{ e } B \text{ commutano } (AB = BA)$$

Fatto generale sulle serie numeriche

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI

ossia $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty \quad (\Rightarrow \text{SONO CONVERGENTI})$

considero $C_m = \sum_{k=1}^m a_k b_{m-k}$ ALLORA

$$\left(\sum_{m=1}^{+\infty} C_m \right) \quad (\text{E' ASSOLUT CONV}) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right)$$

Dimostrazione

$$1) S_m' = \sum_{k=1}^m a_k \quad S_m'' = \sum_{h=1}^m b_h$$

WWW.LINGONLINE.BIZ

$$S_m' \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad ; \quad S_m'' \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^m \frac{m!}{m!(m-n)!} A^m B^{m-n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (A+B)^m = e^{A+B}$$

binomio di Newton per le matrici che vale se le matrici commutano
 es. $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \iff AB = BA$

Esempi

se $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $A^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$

1) $e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$

1) $A^m = \begin{pmatrix} a^m & m a^{m-1} b \\ 0 & a^m \end{pmatrix}$

WWW.INGONLINE.BIZ

$A^{m+1} = \begin{pmatrix} a^m & m a^{m-1} b \\ 0 & a^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{m+1} & (m+1) a^m b \\ 0 & a^{m+1} \end{pmatrix}$ ok!

ipo x
 vedere se
 è vero $\forall m$

$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} = \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} & * \\ 0 & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \end{pmatrix}$

* $b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m a^{m-1}}{m!} = b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} = b e^a$

infatti

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{A^m}{m!} \right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|A|^m}{m!} = e^{|A|}$$

33

1) vorrei che fosse vero $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \|B\|$

questo non è vero x la norma definita come m 1 $\Rightarrow$

2) $\|A\| = \max \{ |Ax| \}; \quad |x| = 1$

Anche questa è una buona norma (1) DA LA STESSA NOZIONE DI CONVERGENZA

1) Sicuramente questa ha la proprietà $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \|B\|$

$t \rightarrow e^{tA}$

Applicazione $\mathbb{R} \rightarrow$ matrici $N \times N$

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} = M(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m A^m}{m!}$$

*1 $\exists M'(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^m A^m}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m t^{m-1} A^m}{m!} = A \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^{m-1} A^{m-1}}{(m-1)!}$

$= A e^{tA}$

Per avere che valga (*1) basta che $(M' \in [c; c])$

BRANZINGONLINE.BIZ

$A \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^{m-1} A^{m-1}}{(m-1)!}$ converge uniformemente su $[-c, c]$

VERO perché $\sum_{m=1}^{\infty} \left\| \frac{t^{m-1} A^{m-1}}{(m-1)!} \right\|_{\infty, [-c; c]} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c^{m-1} |A|^{m-1}}{(m-1)!} = e^{c|A|}$

$\max_{t \in [-c; c]} \left| \frac{t^{m-1} A^{m-1}}{(m-1)!} \right| = \frac{c^{m-1} |A|^{m-1}}{(m-1)!} \leq c^{m-1} \frac{|A|^{m-1}}{(m-1)!}$

$$\begin{cases} Y'(t) = A Y(t) + B(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

$$\int_{t_0}^t e^{-(t-\tau)A} B(\tau) d\tau$$

35

$$Y(t) = e^{tA} \left\{ Y_0 + \int_0^t e^{-\tau A} B(\tau) d\tau \right\}$$

$$\boxed{Y'(t)} = \underbrace{A e^{tA} \left\{ Y(t) \right\}}_{Y(t)} + \underbrace{e^{tA} e^{-tA} B(t)}_I = \boxed{A Y(t) + B(t)}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Equazioni disaccoppiate

$$y_1' = \lambda_1 y_1$$

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$$

$$y_m' = \lambda_m y_m$$

$$y_m(t) = e^{\lambda_m t}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\boxed{A = B A' B^{-1}}$$

$$\boxed{e^A = B e^{A'} B^{-1}}$$

infatti $\boxed{A^m} = \underbrace{(B A' B^{-1})(B A' B^{-1}) \dots (B A' B^{-1})}_m = \boxed{B (A')^m B^{-1}}$

$$\boxed{e^A} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B (A')^m B^{-1}}{m!} = \underbrace{B \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(A')^m}{m!} \right)}_{e^{A'}} B^{-1} = \boxed{B e^{A'} B^{-1}}$$

$$A v_1 = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 B e_1$$

$$B^{-1} A B e_1 = B^{-1} \lambda_1 B e_1 = \lambda_1 e_1$$

$$) B^{-1} A B e_k = B^{-1} \lambda_k B e_k = \lambda_k e_k$$

$$k = 1, \dots, N$$

Se per esempio A ha N autovalori distinti:

$$\lambda_1, \dots, \lambda_N$$

$\Rightarrow \exists$ m autovettori indipendenti

$$\exists B \text{ tale che } B^{-1} A B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = B D B^{-1}$$

$$) e^A = B e^D B^{-1} \quad \text{con} \quad e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_N} \end{bmatrix}$$

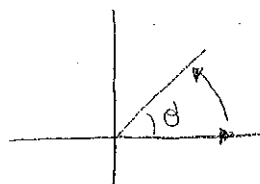
Oppure se A è simmetrica $\Rightarrow$ tutti autovalori reali

$\Rightarrow \exists$ base di autovettori ortogonali; $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$
 $\langle v_i, v_i \rangle = 1 \quad \forall i = 1, \dots, N$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} = A$$

matrice di rotazione

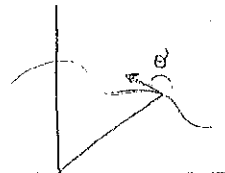


$$\begin{cases} y_1' = \cos \theta y_1 - \sin \theta y_2 \\ y_2' = \sin \theta y_1 + \cos \theta y_2 \end{cases}$$

$$e^{At} = e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \cos \theta$$

$$\omega = -\sin \theta$$



Un V punto del piano la derivato ha un angolo theta risp. congruente
con l'origine

1. P.B. Trovare e^A

WWW.INGONLINE.BIZ

cerco di diagonalizzare A

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

39

$$\underline{D} = \underline{B}^{-1} \underline{A} \underline{B}, \quad \underline{A} = \underline{B} \underline{D} \underline{B}^{-1}$$

$$\underline{e}^{\underline{A}} = \underline{B} \underline{e}^{\underline{D}} \underline{B}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} i \\ e^{\lambda_2} & -e^{\lambda_2} i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} & i(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}) \\ -i(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}) & e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2}}{2} = e^a \frac{(e^{ib} + e^{-ib})}{2} = e^a \frac{(\cos b + j \sin b + \cos b - j \sin b)}{2}$$

$$= e^a \cos b$$

Dobbiamo ritrovare un numero reale

$$= \begin{pmatrix} e^a \cos b & -e^a \sin b \\ e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

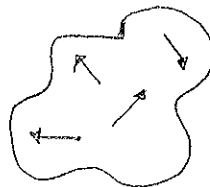
$$\frac{1}{2} (e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}) = e^a \frac{1}{2} (e^{ib} - e^{-ib}) =$$

$$e^a \frac{1}{2} (\cos b + j \sin b - \cos b + j \sin b) = -e^a \sin b$$

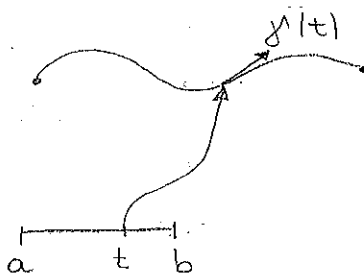
DISCORSI PRELIMINARI SUI CAMPI VETTORIALI E INTEGRALI CURVILINEI

Campo vettoriale:

$$\omega : A \rightarrow \mathbb{R}^N \quad (A \subset \mathbb{R}^N)$$

In $\forall$ punto di A c'è un vettoreCURVA in $\mathbb{R}^N$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

 $\gamma([a, b])$ "supporto di γ "punti della curva

Non è solo punti ma c'è anche un verso.

continua
derivabile

$$\text{se } \exists \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \boxed{\gamma'(t_0)}$$

vettore tangente a γ nel punto $\gamma(t_0)$

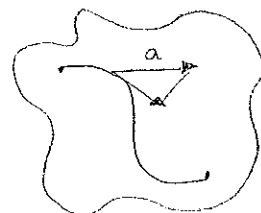
WWW.INGONLINE.BIZ

vettore tangente:modulo mi rapp. la velocità
direz. in cui sto andandoDato un campo $\omega : A \rightarrow \mathbb{R}^N$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow A$$

continuo e una curva γ :
derivabile

$$\int_{\gamma} \omega d\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \omega(\gamma(t)) \cdot (\gamma'(t)) dt$$



CAMPI CONSERVATIVO

Campo che ammette il potenziale: ω tale che $\exists W: A \rightarrow \mathbb{R}$

1) $W \in C^1$ tale che $\omega = \nabla W$

63

$$\omega_1(x_1, \dots, x_N) = \frac{\partial}{\partial x_1} W(x_1, \dots, x_N)$$

$$\omega_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{\partial}{\partial x_N} W(x_1, \dots, x_N)$$

Se è conservativo il lavoro dipende solo della posiz. iniziale e

finale

TEOREMA:

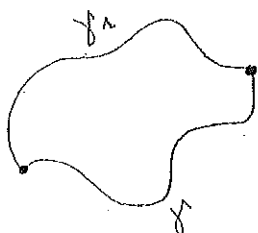
$$\omega: A \rightarrow \mathbb{R}^N$$

È CONSERVATIVO



(a) $\int_{\gamma} \omega dy = \int_{\gamma_1} \omega dy_1$ se

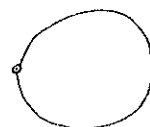
γ_1, γ_2 hanno gli stessi estremi



WWW.INGONLINE.BIZ

(b) $\int_{\gamma} \omega dy = 0$ $\forall \gamma$ CURVA CHIUSA

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$



SE ω è derivabile, derivare continue

CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ ω SIA CONSERVATIVO E

1) (*) $\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$

$$i, j = 1, \dots, N$$

rotore nullo
IRROTAZIONALE

perché se $\omega = \nabla W \Rightarrow \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_i}$

$$\omega_i = \frac{\partial W}{\partial x_i}$$

(*) più A SEMPLICEMENTE CONNESSO $\Rightarrow$ w CONSERVATIVO

4.
65

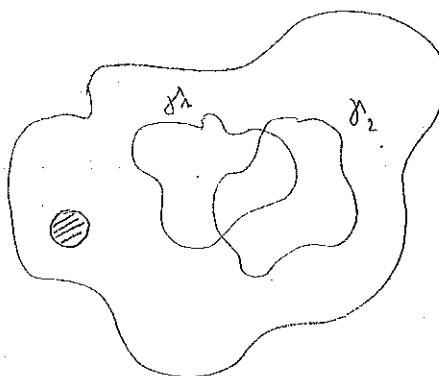
) Controllare se la posso deformare in un punto

PIÙ IN GENERALE DATE 2 CURVE CHIUSE, γ_1 e γ_2 , dico che γ_1 è deformabile a γ_2 in A se esiste una funzione $H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow A$

CONTINUA

$$H(t, 0) = \gamma_1(t)$$

$$H(t, 1) = \gamma_2(t)$$



TEOREMA: Se w verifica

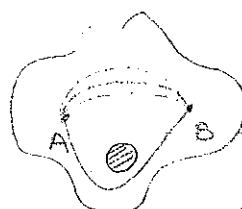
$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i}$$

, se

$$\gamma_1$$

DEFORMABILE A γ_2

$$\int_{\gamma_1} w d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} w d\gamma_2$$



Se fmo $h_2 = 0$ e mando $h_1 \rightarrow 0 \Rightarrow$

67

$$f'(z_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Se invece $h_1 = 0$ $h_2 \rightarrow 0$

$$f'(z_0) = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = -i \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0)$$

FAITTO : Se esiste $f'(z_0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

CONDIZIONI DI
CAUCHY RIEHANN

In tale caso $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

VICEVERSA se f ha derivate parziali ^{continue} e verifica (C.R.) in $\forall$ punto di $A \Rightarrow \exists f'(z) \forall z \in A$

WWW.INGONLINE.BIZ

Esempio

$f(z) = z^m \Rightarrow f$ è derivabile e $f'(z) = m z^{m-1}$

Dimostrazione

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^m - z_0^m}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z^{m-1} + z^{m-2} z_0 + \dots + z_0^{m-1}) = m z_0^{m-1}$$

z^2 è derivabile

$$(x + iy)(x + iy) = \underbrace{x^2 - y^2}_{f_1} + \underbrace{2xy i}_{f_2}$$

$$= \int_{\gamma} \omega_1 + i \int_{\gamma} \omega_2$$

49

dove $\omega_1 = (f_1, -f_2)$

$\omega_2 = (f_2, f_1)$

Supponiamo f olomorfa e facciamo

$$\int_{\gamma} f'(z) dz =$$

$$f'(z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} - i \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

$$\int_{\gamma} f'(z) dz =$$

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(\gamma) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(\gamma) \right) (\gamma_1' + i \gamma_2')$$

WWW.LINGONLINE.BIZ

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \gamma_1' - \frac{\partial f_2}{\partial x} \gamma_2' \right) + i \int_a^b \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \gamma_2' + \frac{\partial f_2}{\partial x} \gamma_1' \right) dt$$

con C.R

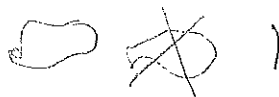
$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \gamma_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y} \gamma_2' \right) dt + i \int_a^b \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \gamma_1' + \frac{\partial f_2}{\partial y} \gamma_2' \right) dt$$

$$= \int_{\gamma} \nabla f_1 + i \int_{\gamma} \nabla f_2 = \frac{f_1(\gamma(b)) - f_1(\gamma(a)) + i (f_2(\gamma(b)) - f_2(\gamma(a)))}{}$$

x definit. conservativo

Se f OLOMORFA in A CONNESSO (significa che se z_1, z_2 stanno in

A c'è una curva che li congiunge



$$z_1, z_2 \in A \Rightarrow \int_{\gamma} f'(z) dz = f(z_2) - f(z_1)$$

$\forall \gamma$ curva e' tale che $\gamma(a) = z_1, \gamma(b) = z_2$

Dimostrazione

59

Fisso un punto z_0

1) Prendo z qualunque e una curva γ che congiunge z_0 a z

$$\underbrace{f_m(z)} = \underbrace{f_m(z_0)} + \underbrace{\int_{\gamma} f'_m(z) dz}_{\times \text{ conv. uniforme}} \quad \text{mando } m \rightarrow \infty$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\underbrace{f(z)} \quad \underbrace{f(z_0)} \quad \underbrace{\int_{\gamma} p(z) dz}$$

$$\Rightarrow f(z) = f(z_0) + \int_{\gamma} p(z) dz$$

$$\Rightarrow \underline{f'(z) = p(z)}$$

Quindi $\underline{f(z) = \sum a_m (z-z_0)^m}$

WWW.LINGONLINE.BIZ

E' OLOMORFA in $B(z_0, \bar{R})$ $\bar{R}$ raggio di convergenza

(e $\underline{f' = \sum a_m m (z-z_0)^{m-1}}$)

Infatti per teo prima

1) Per lo stesso $\bar{R}$

$$\begin{cases} \underline{f_m(z)} = \sum_{k=0}^m a_k (z-z_0)^k \rightarrow f \\ \underline{f'_m(z)} = \sum_{k=1}^m a_k k (z-z_0)^{k-1} \rightarrow f' \end{cases}$$

Esempio

e^z e' OLOMORFA

Ini e' e^z

$$\underline{e^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \underline{e^a (\cos(b) + i \sin(b))}$$

si vede

$$\begin{aligned} a &= \text{Re}(z) \\ b &= \text{Im}(z) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{de^z}{dz} \right) = \underline{e^z} \quad \left(\frac{d}{dz} e^z \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{(n-1)!} = \underline{e^z}$$

F è derivabile

$$F' = \frac{\partial F}{\partial x} = f_1 + i f_2 = f \quad / \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{\lambda} (f_2 + i f_1) = f_1 + i f_2$$

QUINDI Se f OLOMORFA è "NON HA BUCHI"

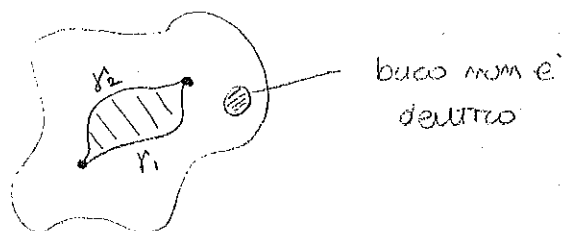
$$\Rightarrow \exists \boxed{F : F' = f} \Rightarrow$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

DIPENDE SOLO DAGLI ESTREMI
 $(F(z_1) - F(z_2))$

Più in generale (non chiesto niente su A) - Se γ_1 è deformabile a γ_2 $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$



Se le due curve si deformano l'una dell'altra e int. di 1 funz. olomorfa è lo stesso

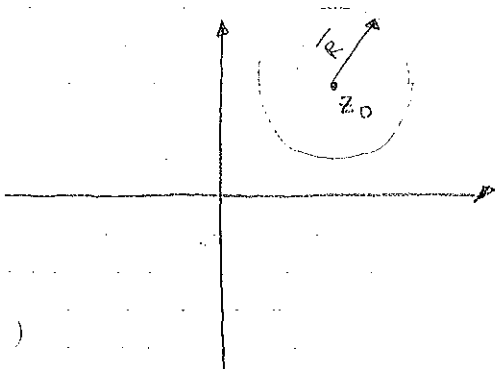
ESEMPIO

$$\frac{1}{z - z_0}$$

OLOMORFA

in $\mathbb{C} - \{z_0\}$

WWW.INGONLINE.BIZ



Ho 1 singolarità in z_0 (un buco)

$$\gamma(t) = z_0 + R e^{it} \quad 0 \leq t < 2\pi$$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t) - z_0} \gamma'(t) dt$$

$$\gamma'(t) = i R e^{it}$$

$\Rightarrow$

$$\int_0^{2\pi} \frac{R i e^{it}}{R e^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

$$\gamma_2(t) = Re^{it}$$

$$0 \leq t \leq 4\pi$$

(fa 2 giri)

54

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z} = 4\pi i$$

$\Rightarrow$ PRIMITIVA DI $\frac{1}{z}$ DEFINITA SU $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

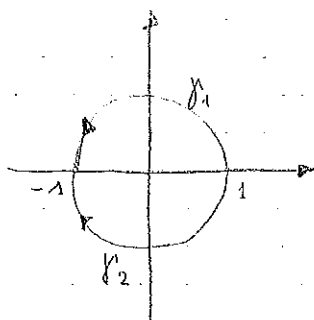
Se ci fosse $\exists F: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$

$$F(z) = F(z_0) + \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$$

$$F(z) = F(z_0) + \int_{z_0}^z F'(\xi) d\xi$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Se ci fosse questa $F \Rightarrow \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz$



$$\gamma_1(t) = e^{it}$$

$$\gamma_2(t) = e^{-it}$$

$$0 \leq t < \pi$$

πi

$$0 \leq t < \pi$$

$-\pi i$

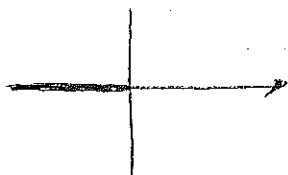
VICERVA

$$\frac{1}{z}$$

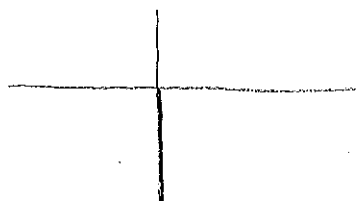
AMMETTE PRIMITIVA SU

$$\mathbb{C} \setminus \{x < 0\}$$

semplicemente
connesso



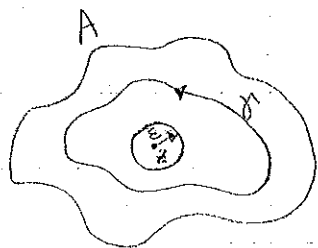
e così anche



$$\mathbb{C} \setminus \{x < 0\}$$

Ani è $F(z)$ Dovrebbe essere $F(z) = \ln(z)$

Nota che $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ e' domarja in $A \setminus \{z\} \Rightarrow$ θ' integrabile *



non cambia se prendo un'altra

curva γ_1 deformata di γ

in $A \setminus \{z\}$,

Prendo come γ_1 $\gamma_1(t) = z + \epsilon e^{it}$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(*) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi}_{= f(z)}$$

Dimostriamo che 1 tende a 0

WWW.INGONLINE.BIZ

$$1 \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \epsilon e^{it}) - f(z)}{\epsilon e^{it}} \epsilon i e^{it} dt$$

$$\text{es. } \epsilon = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$p_n(\xi) = \frac{f\left(z + \frac{1}{n} e^{it}\right) - f(z)}{\frac{1}{n} e^{it}}$$

$p_n(\xi) \rightarrow f'(z)$, si vede che $\rightarrow$ uniformemente

$$\Rightarrow \text{tutto tende a } \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f'(z) i e^{it} dt = 0$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

dove γ fa un giro (positivo, antiorario) intorno a z

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{f(\xi)(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}} \right\|_{\infty} < +\infty$$

$$\sup_{\xi \in \gamma} \left(\right) \leq \max_{\xi \in \gamma} \frac{|f(\xi)|}{R} \left(\frac{|z-z_0|}{R} \right)^m = C \delta^m$$

$\delta < 1$
SOMMABILE

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \right]$$

TEOREMA: Se $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ OLOMORFA

Se $z_0 \in A$, $R > 0$ t.c. $\bar{B}(z_0, R) \subset A$

$$\Rightarrow \forall z \in B(z_0, R)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi$$

WWW.INGONLINE.BIZ

dove γ è una curva chiusa

$$I(\gamma, z_0) = 1$$

$$\Rightarrow f \in \mathbb{C}^{\infty} \text{ su } B(z_0, R)$$

$$\Rightarrow f^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{m+1}} d\xi \quad (\Rightarrow a_m)$$

Se va bene $\forall z_0 \Rightarrow$ posso scrivere z

$$\text{dove } I(\gamma, z) = 1$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi$$

$$\Im \mathbb{C} \quad f \text{ DERIVABILE}$$

$\Leftrightarrow$

$$f \in \mathbb{C}^{\infty} \text{ anzi } f \text{ analitica}$$

11/10/2005

Se g è analoga in A , A semplicemente connesso

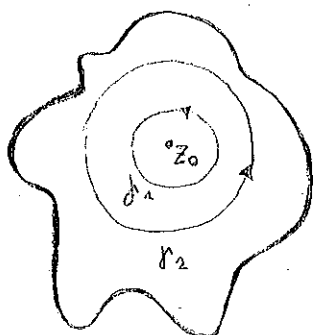
157

) $\int_{\gamma} g dz = 0$ γ curva chiusa

se $m+1 < 0 \Rightarrow$ non ci sono singolarità $\Rightarrow$ l'integrale di I è $\neq 0$

se f ha singolarità (se all'interno del disco + piccolo ci sono

singolarità) Generalizzazione del teorema di Cauchy



$\gamma_1(t) = z_0 + r e^{it}$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$\gamma_2(t) = z_0 + R e^{it}$

$0 \leq t \leq 2\pi$

WWW.LINGONLINE.BIZ

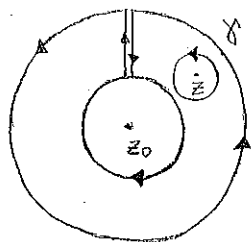
formula di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad *$$

dove $I(\gamma, z) = 1$

) Prendiamo uno z nella corona $\in C(z, r, R)$

Considero γ fatta così



$I(\gamma, z) = 1$

γ si potrebbe deformare a una curva che fa un giro intorno a z_0 in senso antiorario

) Applico * con questa γ

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi$$

61

serie di potenze negative con questi coefficienti

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m (z - z_0)^m$$

$$\text{dove } a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(z - z_0)^{m+1}} d\xi$$

$$\forall z \in C(z_0, r, R)$$

Finché riesco a mettere dentro una corona chiusa vale quello
in una corona aperta (xkè non posso andare a toccare la frontiera)

NOTA

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) d\xi$$

$$I(\gamma, z_0) = 1$$

$$\text{Se } f = \frac{1}{z} \quad z_0 = 0$$

$$a_m = 0 \quad \forall m \text{ eccetto } m = -1 \quad a_{-1} = 1$$

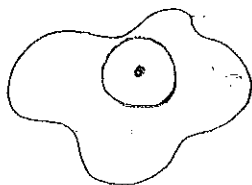
$$\text{infatti } \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

$$a_{-1} = 1 \quad f(z) = 1 z^{-1} \quad \text{ok!}$$

a_{-1} si chiama **RESIDUO**

WWW.INGONLINE.BIZ

Supponiamo che f sia



converga in $A \setminus \{z_0\}$, per quanto visto
vale $f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m (z - z_0)^m$

chiamo **RESIDUO** di f in z_0

il termine a_{-1}

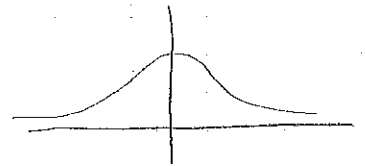
$$0 = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z) dz$$

perche' circoletti interni percorsi
in senso opposto da $\tilde{\gamma}$

Esercizio

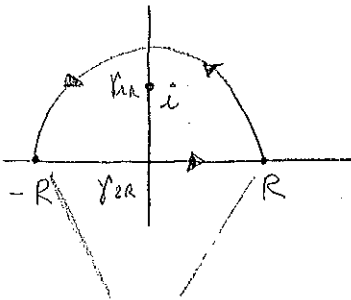
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\left(= \arctan x \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$



Facciamo un altro esempo

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}, \quad f: \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ olomorfa}$$



$$\int_{\gamma_R} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$

In questi punti la curva non
ha direz. tangente

WWW.INGONLINE.BIZ

NON ci preoccupiamo anche se non è derivabile in 2 punti

$$\text{Xie } \underline{\text{teorema dei residui}} \quad \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{1+z^2}, i \right)$$

$$\int_{-R}^R \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{\gamma_{1,R}} \frac{1}{1+z^2} dz$$

$$\forall R > 1$$

$$\gamma_{1,R}(t) = R e^{it}$$

$$0 \leq t \leq \pi$$

$$\gamma_{1,R}(t) \quad -R \leq t \leq R \quad \frac{1}{1+t^2} \cdot i$$

RISULTATO

Se P polinomio di grado ≥ 2

65

$p(x) = 0$ non ha radici reali ($\Rightarrow$ grado pari)

Siano $z_1, \dots, z_m$ le radici di P

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{p(x)} = 2\pi i \sum \text{Res} \left(\frac{1}{p(z)}, z_j \right)$$

$\int$ tale che
 $\text{Im}(z_j) > 0$

$$\boxed{=} -2\pi i \sum \text{Res} \left(\frac{1}{p}, z_j \right)$$

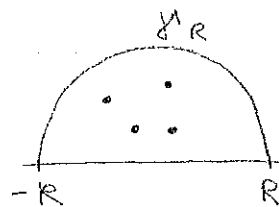
$\int$ tale che
 $\text{Im}(z_j) < 0$

$p(x)$ potrebbe essere anche
esempio (+ solitamente
è un polinomio reale)

WWW.INGONLINE.BIZ

DIM.

Si prende γ_R come prima, se R grande (tutte gli z_j stanno dentro)
 γ_R "circonda" tutte le radici con $\text{Im}(z) > 0$



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{1}{p(z)} dz = \sum_{\text{Im}(z_j) > 0} \text{Res} \left(\frac{1}{p}, z_j \right)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \frac{1}{p(x)} dx + \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{pezzo tondo}(R)} \frac{1}{p(z)} dz$$

$$\downarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p(x)} dx$$

$\boxed{0}$ se $R \rightarrow \infty$
(grado $p \geq 2$)

REGOLA 1

$$\text{se } f(z) = \frac{h(z)}{z-z_0}$$

con h olomorfa, $h(z_0) \neq 0$

$$\text{Res}(f, z_0) = h(z_0)$$

(perché $h(z) = h(z_0) + h'(z_0)(z-z_0)$

$$f(z) = \frac{h(z_0)}{z-z_0}$$

$$f(z) = \frac{h(z_0)}{z-z_0} + h'(z_0) + h''(z_0)(z-z_0)$$

NOTA CHE SE $f(z) = \frac{h(z)}{z-z_0} \iff h(z) = f(z)(z-z_0)$

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z-z_0)$$

se viene $\neq 0$

Se derivo trovo che ~~$h'(z) = f'(z)(z-z_0) + f(z)$~~
 ~~$h'(z_0) =$~~

CASO PARTICOLARE

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

P, Q , polinomi

$$Q(z_0) = 0, P(z_0) \neq 0$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$Q(z) = (z-z_0) Q_1(z)$$

z_0 radice semplice di $Q \iff Q_1(z_0) \neq 0$

$$\iff Q'(z_0) \neq 0$$

infatti

da

$$Q(z) = (z-z_0) Q_1(z) \Rightarrow$$

$$Q'(z) = Q_1(z) + (z-z_0) Q_1'(z)$$

$$\Rightarrow Q'(z_0) = Q_1(z_0)$$

Se la sua radice è semplice la derivata $\neq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_j) > 0} \text{Res} \left(\frac{z^2}{1+z^4}, z_j \right)$$

89

RADICI QUARTE DI -1

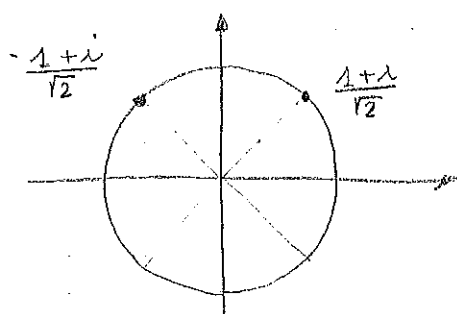
$$-1 = e^{-i\pi} = \rho^4 e^{i4\theta}$$

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$



$$\text{Residuo} \left(\frac{P}{Q}, z_j \right) = \frac{P(z_j)}{Q'(z_j)} = \frac{z_j^2}{4z_j^3} = \frac{1}{4} \frac{1}{z_j} = \frac{1}{4} \frac{\bar{z}_j}{|z_j|^2} = \frac{1}{4} \bar{z}_j$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{4} \left\{ \frac{1-i}{\sqrt{2}} + \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right\} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{-2i}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Chiamo residuo di f a ∞

71

$$\text{Res}(f, \infty) = -a_{-1}$$

$$\text{con } a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{m+1}} dz$$

$$a_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

γ dentro $\bar{C}(0, R, +\infty)$

già in una curva γ di fuori della quale non ci sono più singolarità

NOTA

$$) \text{ Se } p(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$p(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m z^m$$

$$\text{Residuo}(f, \infty) = \text{coeff } a_1 \text{ di } p$$

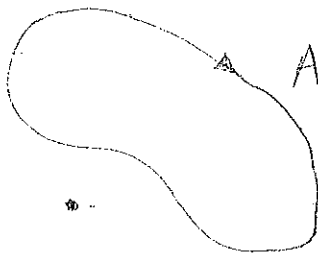
WWW.INGONLINE.BIZ

$$\text{Se } p \text{ è derivata in } 0 \quad a_1 = p'(0)$$

II TEOREMA DEI RESIDUI

) A cont. $\bar{C}(z_0, R, \infty)$ per $R \geq 0$ (bordo di A) descritto da una curva γ chiusa percorsa

compatibilmente con A (A sta a sinistra)



$$f: A \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{olomorfa}$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) + \text{Res}(f, \infty)$$

Esempio: se prendo

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

P, Q polinomi

grado di $Q \geq$ grado di $P + 2$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, \infty) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{Q(z_j)=0} \text{Res}(f, z_j) = 0$$

Se prendo i curva che contiene tutte le singolarità infatti si ha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res} = 0$$

$\times i \in \mathbb{Z}$
Residui

Si può anche fare così

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{z^K} h(z)$$

$$h(z) \text{ t.c. } \lim_{|z| \rightarrow \infty} h(z) = \frac{a_m}{a_m}$$

$$K \geq 2$$

$$\frac{a_m z^m}{a_m z^m} = \frac{z^m}{z^m} \frac{a_m + \text{infinit. } a \infty}{a_m + \text{infinit. } a \infty}$$

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = z^K h\left(\frac{1}{z}\right)$$

h olomorfa anche in ∞

$$h(0) = \frac{a_m}{a_m}$$

$$\text{Res}(f, \infty) = -g'(0) = K z^{K-1} h\left(\frac{1}{z}\right) + z^K h'\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$z=0$$

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z^2}, \infty\right) = 0$$

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z}, \infty\right) = -1$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Calcolo dei residui

REGOLA 3

$$\text{se } f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^K}$$

h olomorfa
 $h(z_0) \neq 0$

(z_0 polo di ordine K)

Sviluppo h in serie di Taylor rispetto a z_0

$$h(z) = h(z_0) + h'(z_0)(z-z_0) + \frac{h''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{h(z_0)}{(z-z_0)^K} + \frac{h'(z_0)}{(z-z_0)^{K-1}} + \frac{h''(z_0)}{2!(z-z_0)^{K-2}} + \dots$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

trasformata
in pratica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad s = \gamma + i\omega$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ (parametro)

P, Q polinomi

con grado di $Q > \text{grado } P + 2$, Q non ha radici reali

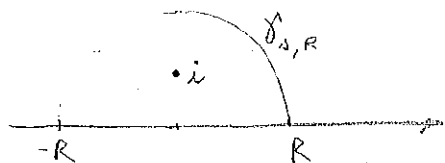
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{1+x^2} dx$$

$$f(z) = \frac{e^{-i\lambda z}}{1+z^2}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$
ha 2 poli $i, -i$
semplici

$\lambda \leq 0$

WWW.INGONLINE.BIZ



γ_R come nel disegno

$R > 1$

$$\gamma_{\lambda, R}(t) = R e^{it} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \left. \frac{e^{-i\lambda z}}{2z} \right|_{z=i} =$$

$$\pi e^{\lambda}$$

$$h(z) = \frac{e^{-i\lambda z}}{z+i}$$

$$h(i) = \frac{e^{\lambda}}{2i}$$

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_{\lambda, R}} f(z) dz = \text{[2]}$$

però che $\int_{\gamma_{\lambda, R}} f(z) dz \rightarrow 0$ $R \rightarrow \infty$
del modulo

$$\text{[2]} = \int_0^\pi e^{-i\lambda R e^{it}} \frac{P(R e^{it})}{Q(R e^{it})} R e^{it} dt \leq \cos t \frac{R}{R^2} \int_0^\pi e^{\operatorname{Re}(-i\lambda e^{it})} dt$$

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$$

è maggiore $\frac{K}{R^2} R$

17/10/2005

77

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-i\lambda x} \frac{P(x)}{Q(x)}}_{f(x)} dx = \frac{2\pi i}{\underbrace{Q(z_j)=0}_{\text{Im}(z_j) > 0}} \text{Res}(f, z_j) \quad \text{se } \lambda < 0$$

$$\frac{-2\pi i}{\underbrace{Q(z_j)=0}_{\text{Im}(z_j) < 0}} \text{Res}(f, z_j) \quad \text{se } \lambda > 0$$

Ipotesi $[P, Q]$ polinomi

$$Q(x) \neq 0 \quad \text{se } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Grado}(Q) \geq \text{Grado}(P+2)$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\lambda x}}{(x^2+1)^2} dx$$

$$f(z) = \frac{e^{-i\lambda z}}{(1+z^2)^2}$$

$$= \frac{h_1(z)}{(z-i)^2}$$

 $h_1(z)$ dom. in i

$$\frac{h_2(z)}{(h+i)^2}$$

 $h_2(z)$ converge in $-i$ Radici sono $\boxed{\pm i}$ (doppie)

$$h_1(z) = \frac{e^{-i\lambda z}}{(z+i)^2}$$

$$\text{Res}(f, i) = h_1'(i) = \frac{d}{dz} \frac{e^{-i\lambda z}}{(z+i)^2} \Big|_{z=i} = \frac{d}{dz} e^{-i\lambda z} (z+i)^{-2} \Big|_{z=i}$$

$$= -i\lambda e^{-i\lambda z} (z+i)^{-2} - 2e^{-i\lambda z} (z+i)^{-3} \Big|_{z=i}$$

$$= -i\lambda e^{\lambda} (2i)^{-2} - 2e^{\lambda} (2i)^{-3} = \frac{-i\lambda e^{\lambda}}{-4} - \frac{2e^{\lambda}}{8(-i)} =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{1}{4} \right) i e^{\lambda} = \left(\frac{\lambda-1}{4} \right) i e^{\lambda}$$

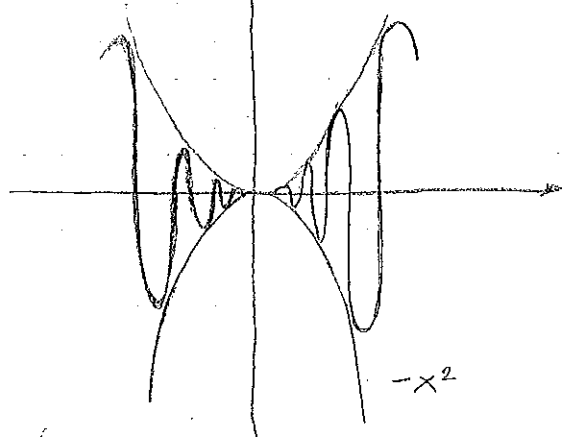
Residuo in $\boxed{-i}$ non è detto che sia il coniugato

$$\text{se } \lambda < 0 \quad -2\pi \frac{\lambda-1}{4} e^{\lambda} = \frac{\pi}{2} (1-\lambda) e^{\lambda}$$

vuel dire forse

$$\int_{-R}^R x^2 \cos(\lambda x) dx - i \int_{-R}^R x^2 \sin(\lambda x) dx$$

79



$$\frac{\sin \lambda x}{\lambda} x^2 - \int \frac{\cos \lambda x}{\lambda} 2x$$

WWW.ONLINE.BIZ

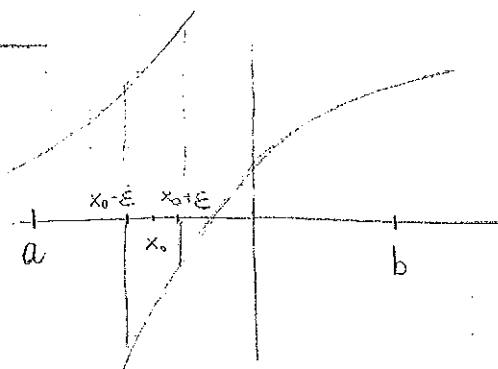
POLI SULL'ASSE REALE

Definizione

$$x_0 \in \mathbb{R}$$

f definita vicino a x_0

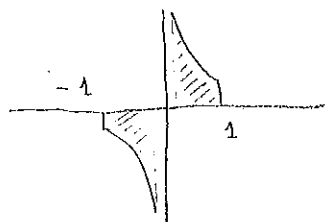
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[a,b] / [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} f(x) dx = \text{V.P.} \int_a^b f(x) dx$$



$x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$ non si usa VALORE PRINCIPALE come defniz: $x \in \mathbb{R}^+$
Se togliessi un intervallo non simmetrico sembrerebbe $\Rightarrow$ sarebbe una definizione molto instabile

$$\frac{1}{x} \text{ per Riemann non \u00e8 integrabile}$$

$$\text{ma } \text{V.P.} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0$$



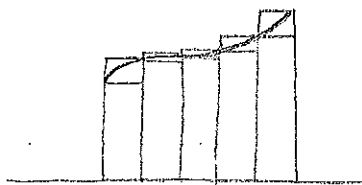
$$\text{V.P.} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln \varepsilon - \ln \varepsilon] = 0$$

INTEGRALI MULTIPLI

81

Misura / Area / Volume di un insieme di $\mathbb{R}^N$



WWW.LINGONLINE.BIZ

punto di partenza (in $\mathbb{R}^N$)

$$E = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n],$$

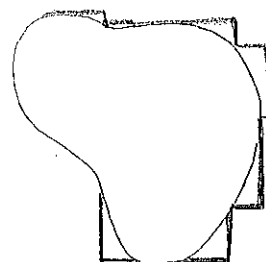
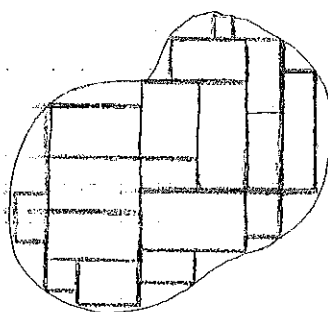
$$m(E) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n) \quad (N\text{-RETTANGOLO})$$

(anche se aperti)

Problema $E \subset \mathbb{R}^N$

Idea di Riemann

Ipotesi E limitato



$$\text{se } P = \bigcup_{j=1}^n R_j$$

R_j rettangoli disgiunti

$$m(P) = \sum_{j=1}^n m(R_j)$$

(P plurirettangolo finito)

$$m_*(E) = \sup \{ m(P) : P \text{ plurirettangolo}, P \subset E \}$$

finito $x \in E$ e limitato

misura int.

$$m^*(E) = \inf \{ m(P) : P \text{ plurirettangolo}, P \supset E \}$$

misura est

se $m^*(E) = m_*(E) \Rightarrow E$ misurabile secondo Riemann $m(E)$ il valore comune

Si generalizza la definizione per avere più funzioni o insiemi misurabili in modo da avere una stabilità per il passaggio al limite. 83

$$m(R) = (b_1 - a_1) \dots (b_m - a_m)$$

plurirettangoli $P = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$

dove R_j sono una successione di rettangoli (disgiunti)

$$m(P) = \sum_{j=1}^{\infty} m(R_j) \quad \left(\text{Anche } +\infty \right)$$

Dato $E \subset \mathbb{R}^N$ qualunque chiamo

$$m^*(E) = \inf \{ m(P) \mid \text{plurirettangoli } P \supset E \}$$

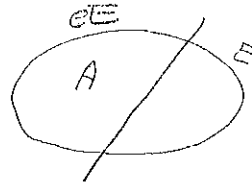
(può essere $+\infty$)

Si individua la classe degli insiemi misurabili, dico che E misurabile se $\forall$ insieme A

MISURA ESTERNA DI A

$$m^* A = m^*(E \cap A) + m^*(A \cap E^c)$$

"E" opera bene ogni A



Chiamo $\mathcal{M} = \{ \text{insiemi misurabili} \}$

Se $E \in \mathcal{M}$ servo

$m(E)$ invece di $m^*(E)$

PROPRIETÀ

Se $A, B \in \mathcal{M}$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$
 $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

ANZI

Se A_n successione di insiemi misurabili (disgiunti), se $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

Da questo segue che se A_m misurabili, $A_m \subset A_{m+1}$

$$\Rightarrow m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m(A_n)$$

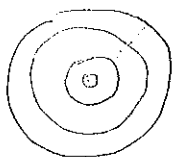


85

oppure se $A_m \supset A_{m+1}$

$$e \quad m(A_m) < +\infty$$

$$\Rightarrow m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m(A_n)$$



WWW.INGONLINE.BIZ

$$1) \quad A_n = \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$$

$$\cup A_n = [0, 1[$$

$$A_n \subset A_{n+1}$$

$$2) \quad A_n = \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right]$$

$$\cap A_n = [0, 1]$$

Se $m^*(E) = 0 \Rightarrow E$ è misurabile

Questi insiemi si dicono TRASCURABILI

per esempio: $A = \{x_0\}, A = \{x_1, \dots, x_k\}$

$A = \{x_m, m \in \mathbb{N}\}$ sono trascurabili.

$\Rightarrow$ i razionali sono trascurabili. $\rightarrow$ legato al fatto che

i num. razionali sono numerabili

Tutti gli insiemi immagine di 1 successione trascurabili.

sono

Insinsiemi possono anche essere illimitati x_k può essere ∞

In generale una proprietà $P(x)$ vale "quasi ovunque" se vale $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, con $|E| = 0$

187

(5) INTEGRALE

Caso $f \geq 0$, f MISURABILE

Dico che f è integrabile se l'epigrafo $|m(G_f)| < +\infty$

Chiamo integrali di f $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = m(G_f)$ (misura epigrafica può essere finita o infinita)

Se f cambia segno dico che è integrabile quando f^+ e f^- lo sono

e pongo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x) dx$$

($\in \mathbb{R}$)

$f \in \mathcal{L}$ se f integrabile

PROPRIETÀ

Se f, g integrabili $\Rightarrow f+g \in \mathcal{L}$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\int f+g = \int f + \int g$$

Non è vero che $f \cdot g \in \mathcal{L}$ LO VEDREMO DOPO

Definizione: Se $A \in \mathcal{M}$ (misurabile), $f: A \rightarrow \mathbb{R}$,

Dico che f è integrabile su A

se posto $f^*(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

f^* è integrabile pongo $\int_A f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^*(x) dx$

$$= m \{ \{x, y\} : x \in A, 0 \leq y \leq f(x) \}$$

Conseguenza

$f(x, y)$

anche I
intervallo
in $\mathbb{R}$

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ x & y \end{array}$$

$\forall x \ f(x, \cdot) \in \mathcal{L}$
 fissato x la funzione
 $y \mapsto f(x, y)$ integrabile

89

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, y) \, dy$$

SUPPONGO che $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \forall x, \forall y$

$$\Rightarrow F'(x) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \, dy$$

se $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq p(y) \quad (\text{con } p \in \mathcal{L})$

nota che
 qui non c'è x - Quindi deve valere $\forall x, y$

Esempio

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y} \sin(xy) \, dy$$

integrabile in y
 $\forall x$

WWW.ONLINE.BIZ

PROBLEMA 1

F continua?

pono oltre che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_0^{+\infty} e^{-y} \sin(xy) \, dy = \int_0^{+\infty} e^{-y} \sin(x_0 y) \, dy$$

per esempio
 $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-y} \sin(xy) \, dy = 0$$

! Mi basta trovare p integrabile tale che $|e^{-y} \sin(xy)| \leq p(y)$
 $\forall x$ e $\forall y$ - Per esempio posso prendere $p(y) = e^{-y}$ integrabile
 $\Rightarrow$ e^{-y} CONTINUA

(è definita quasi ovunque) Pono metterla uguale a 0 (per esempio) sulle
 x in cui $f(x,y)$ non è misurabile in y

91

$$(3) \quad \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M} f(x,y) \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y) \, dy \right) dx \quad \left(\begin{array}{l} \text{vale anche} \\ \text{con } +\infty \end{array} \right)$$

Si può anche scambiare gli ordini

(b) f (ha segno variabile) $f \in L$

vale (1)

e $\int f(x,y) \, dy \in \mathbb{R}$ per quasi ogni x

vale (2)

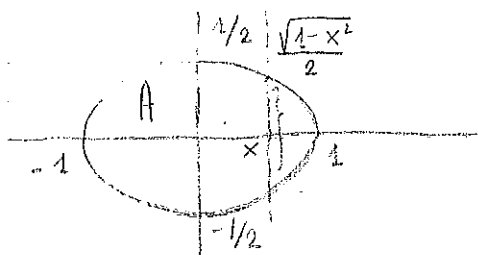
vale (3)

Deve esistere l'integrale di f

WWW.ONLINE.BIZ

Mi permette di calcolare integrali prima in una direzione poi nello' altra

$\Rightarrow$ CALCOLO ESPlicito



$$A \{ (x,y) : x^2 + 4y^2 \leq 1 \}$$

$$x^2 + 4y^2 \leq 1$$

ELLISSE

$$y^2 = \frac{1-x^2}{4}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$$

Nota che misura di un insieme

$$\boxed{m(E)} = \int \boxed{1_E} \, dx$$

$$1_E(x) \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

$$m(A) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} 1_A(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_A \, dy \right) dx$$

Indicatrice

Esempio tipico

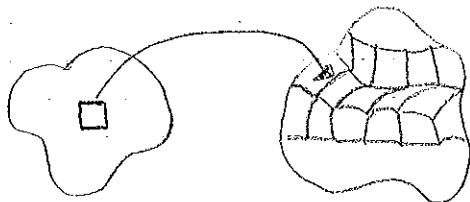
COORDINATE POLARI

lo fa dopo

193

X espone meglio
 $\int = 1$

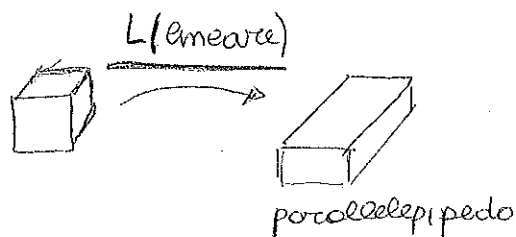
$$m(\phi(A)) = \int_A \det J_\phi(y) dy$$



viamo al punto x a metro
 lo jacobiano

La funzione approssimata dallo jacobiano

Determinante mi dice come si
 modifica il volume



determinante e il volume

ESEMPIO TIPICO / Coordinate polari

$$\phi(r, \theta) = r \cos \theta, r \sin \theta$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$J_\phi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\det J_\phi = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

$$\int_{\{r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]\}} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta = \int f(x, y) dx dy$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy =$$

28

$$) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 = \pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt} = \sqrt{\pi}$$

WWW.VINGONLINE.BIZ

20/10/2005

097

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{x^2 + x + 1} dx$$

* $\operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + x + 1} e^{ix} dx \right)$

Se avessi il coseno prendere la parte reale

Quello che troveremo e^{-} $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + x + 1} dx$

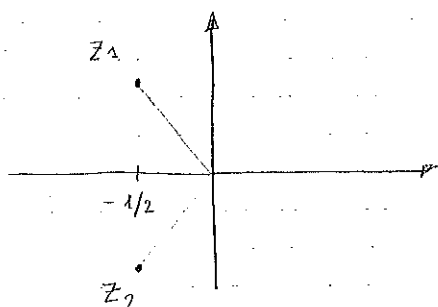
Si devono calcolare i residui

$$f(z) = \frac{z e^{iz}}{z^2 + z + 1}$$

[Simplicità]

$$z^2 + z + 1 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$



WWW.INGONLINE.BIZ

$$2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1)$$

Se avessi avuto $-iz$ avrei dovuto prendere z_2 . Devo prendere poli della parte in cui l'esp. diventa negativo $\Rightarrow$ sopra

$$f(z) = \frac{z e^{iz}}{Q(z)}$$

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{z_1 e^{iz_1}}{Q'(z_1)} = \frac{z e^{iz}}{2z+1} \Big|_{z=z_1}$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \Rightarrow \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}{-1 + i\sqrt{3} + 1} e^{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{1}{2} - i \operatorname{sen} \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \right) \right) + 1 \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \right) = \operatorname{Res}(f, z_1)$$

$\sqrt{z}$ non ha poli dove è definita.

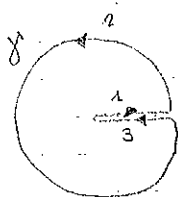
199

Poli SEMPLICI

1 e -1

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz = 2\pi i \left(\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i) \right)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$



1 $\rightarrow \int_0^R \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}}$

3 $\rightarrow \int_R^0 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}} = \int_0^R \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}}$

1 + 3 $\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0}$ $2 \int_0^R \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}}$

2 $\rightarrow \int_{C_R} \frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{z}}$

non è chiusa

WWW.INGONLINE.BIZ

Ora mostriamo $R \rightarrow \infty$

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{z}} \right| \leq 2\pi R \frac{C}{R^2 \sqrt{R}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

che denominatore con grado > 1

$$\Rightarrow 2\pi i \left(\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i) \right) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{Q(z)}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i) &= \frac{1}{\sqrt{i}} \cdot \frac{1}{2i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2i} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{i-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{-1-i}{2} \end{aligned}$$

Per esempio

101

$$\frac{z^3 + 2}{(z^2 + 1)^2 (z - 1)} = \frac{A}{(z - i)} + \frac{B}{(z - i)^2} + \frac{C}{z + i} + \frac{D}{(z + i)^2} + \frac{E}{z - 1}$$

A, B sono i termini negativi dello sviluppo di f in i

$\downarrow$
res(f, i)

C, D
 $\downarrow$
res(f, -i)

m = 1

E
 $\downarrow$
res(f, 1)

m = 1

WWW.INGOALIME.BIZ

$$f(z) = \frac{z^3 + 2}{(z^2 + 1)^2 (z - 1)} = \frac{h(z)}{(z - i)^2}$$

se sviluppo h in i $h(i)$

$$\frac{h(i) + h'(i)(z - i) + h''(i)(z - i)^2}{(z - i)^2} \quad \begin{aligned} A &= h'(i) \\ B &= h(i) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} C = \bar{A} \\ D = \bar{B} \end{cases} \quad \text{N.B.}$$

In 1 $f(z) = \frac{z^3 + 2}{(z^2 + 1)^2} \cdot \frac{1}{z - 1} \quad E = h(1)$

Se sono semplici $\frac{P}{Q}$ (RADICE)

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$$

108

$$2 \operatorname{Re} \frac{1}{x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = 2 \operatorname{Re} \frac{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) x}{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1/2 \cdot 2}{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

Si devono poi ripetere gli stessi calcoli x gli altri 2 pezzi.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx = 2\pi i \quad (\text{somma residui in } z_1, z_2, z_3)$$

$$2\pi i \frac{(-i)}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

WWW.MOLUNEBIZ

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)x^p} \quad 0 < p < 1$$

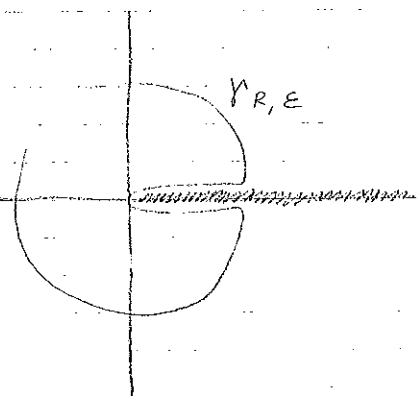
Viamo a 0 e dell'ordine $\sim \frac{1}{x^p}$ $p < 1$

all'infinito $\sim \frac{1}{x^{p+1}}$ $p > 0$

$$z^p = e^{p \ln(z)}$$

cammino in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$

$$\ln|z| = \ln|z| + i, \quad \forall R \in |z|$$



$$\oint_{\gamma_{R, \epsilon}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1) = \frac{2\pi i}{(-1)^p}$$

$$e^{p \ln(z)} = e^{p\pi i} = \cos(p\pi) + i \sin(p\pi)$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi i}{\cos(p\pi) + i \sin(p\pi)}$$

CONVERGENZA

105

A sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e per ogni n intero sia data una funzione $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f_n è una successione di funzioni (definita su A a valori in $\mathbb{R}$)

→ la successione f_n CONVERGE PUNTUALMENTE su A se $\forall x \in A$ ESISTE $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. È chiaro che se tale limite esiste chiamo

arbitrariamente a considero $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

WWW.INCOGNITE.IT

→ Data la successione di funzioni (f_n) e una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ diciamo che f_n CONVERGE UNIFORMEMENTE a f se si ha:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, \forall x \in A \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Se introduciamo la norma uniforme di una funzione f (sull'insieme A) mediante $\|f\|_\infty := \sup_{x \in A} |f(x)|$

(che potrebbe essere $+\infty$) ALLORA LA CONVERGENZA UNIFORME SI PUÒ ESPRIMERE DICENDO CHE f_n CONVERGE UNIFORMEMENTE A f SE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| \rightarrow 0$$

CONVERGENZA PUNTUALE

- Limite puntuale di funzioni continue può non essere continuo
NON POSSO SCAMBIARE L'ORDINE DEI LIMITI

$$\text{es. in generale } \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

- Nel caso convergenza puntuale inoltre si ha in generale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) \neq \int f(x)$$

IN CASO DI CONVERGENZA UNIFORME

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \quad \bullet \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) = \int_A f(x) dx$$

CONDIZIONE NECESSARIA DI CONVERGENZA

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

- Se tutti i termini di una serie sono dello stesso segno $\Rightarrow$ la serie è regolare (ammette limite)
- Se 2 serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sono convergenti allora anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ è convergente, e vale l'uguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

- Se $0 \leq a_n \leq b_n \Rightarrow$ la convergenza $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica la convergenza $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, mentre la divergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica la divergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

SAPPIAMO STUDIARE 2 TIPI DI SERIE

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

convergente se $|q| < 1$

$$S_n = \frac{1}{1-q}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

convergente

$$\alpha > 1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

CONVERGE

divergente

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$$

DIVERGE

Criteri di CONVERGENZA:

I CRITERIO DEL RAPPORTO

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$$

$$\ell < 1$$

SERIE CONVERGE

$$\ell = 1$$

NON SI PUÒ DIRE NULLA

$$\ell > 1$$

SERIE DIVERGE

II CRITERIO DELLA RADICE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$$

$$\ell < 1$$

SERIE CONVERGE

$$\ell = 1$$

NON SI PUÒ DIRE NULLA

$$\ell > 1$$

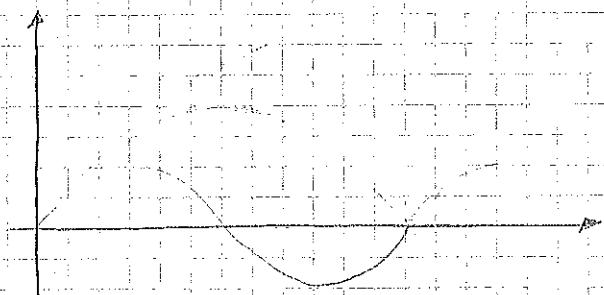
SERIE DIVERGE

III CRITERIO DEL QUOZIENTE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0$$

le 2 serie hanno lo stesso carattere o entrambi divergenti o entrambi convergenti

$$) \quad f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$



$$) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\frac{x}{n}}{\left(\frac{x}{n}\right)} = x$$

Convergenza puntuale

Convergenza uniforme $[0, T]$ non su $\mathbb{R}$. $\forall n$ trovo x con $|f_n(x) - f(x)| > 1$

$$\max_{0 \leq x \leq T} \underbrace{\left| n \sin\left(\frac{x}{n}\right) + x \right|}_{g_n(x)}$$

$$) \quad g'_n(x) = 1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right) \geq 0$$

$$0 \geq g_n(x) \geq g_n(T)$$

$$|g_n(x)| \leq |g_n(T)| \quad \forall x \in [0, T]$$

$$\|f_n(x) - x\|_\infty = |g_n(T)| \rightarrow 0$$

$f_n(x)$ non tende uniformemente ad x su $\mathbb{R}$

$$f_m(x) = \frac{1}{m} \sin(mx)$$

puntualmente

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sin(mx) = 0$$

UNIFORMEMENTE

$$\|f_m(x)\|_{\infty, R} = \frac{1}{m}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} = 0$$

Vediamo le derivate

$$f'_m(x) = \cos(mx)$$

$$\|f'_m(x)\| = 1$$

$$\text{se esiste } f : f'_m \rightarrow g \Rightarrow \|g\| = 1$$

$$\text{e se } \|f_m - g\| \rightarrow 0 \quad \|f_m\| \rightarrow \|g\|$$

$$\int_a^b f'_m(t) dt = f_m(b) - f_m(a) \rightarrow 0$$

$$\int_a^b g(t) dt$$

$$\text{ma } \Rightarrow \int_a^b g(t) dt = 0 \quad \forall a \text{ e } b$$

quindi non può essere vero che $\|g\|_{\infty} = 1$

Vediamo la derivata

113

$$D'(m e^{-m x^2}) = -2m^2 x e^{-m x^2}$$

puntualmente su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} -2m^2 x e^{-m x^2} = 0$$

uniformemente $\| -2m^2 x e^{-m x^2} \|_{\infty, \mathbb{R}}$

$$D'(-2m^2 x e^{-m x^2}) = 4m^3 x^2 e^{-m x^2} - 2m^2 e^{-m x^2}$$

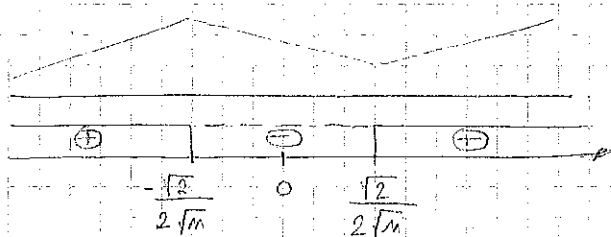
$$= (4m^3 x^2 - 2m^2) e^{-m x^2} = 0$$

WOLFRAM ONLINE BIZ

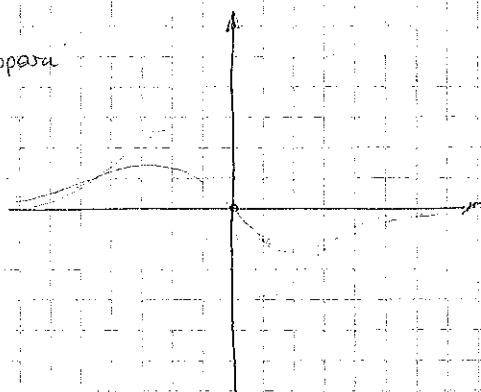
$$4m^3 x^2 - 2m^2 = 0$$

$$4m^3 x^2 = 2m^2$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{m}}$$



$-2m^2 x e^{-m x^2}$
 $\downarrow$
 funzione dispari
 $x \rightarrow \infty \rightarrow -\infty$



Il massimo è in $x = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{m}}$

$$D'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{m}}\right) = -2m^2 \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{m}} e^{-m \frac{1}{2m}} = \sqrt{2} \frac{m^2}{\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{2} \frac{m^2}{\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{e}} = \infty$$

Nei intervalli $]-\infty, -T]$ $[T, +\infty[$ è uniformemente convergente

Il massimo è in T $\propto T > \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{m}}$ e vale

$$-2m^2 T e^{-m T^2}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} -2m^2 T e^{-m T^2} = 0 \Rightarrow \text{E' UNIFORMEMENTE CONVERGENTE}$$

$$) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{1+n x^4}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n x^4}$$

puntualmente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

$l < 1$ conv
 $l = 1$ non si può dire nulla
 $l > 1$ div

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

WWW.ONLINE.BIZ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$$

Se 2 serie hanno lo stesso carattere o entrambe divergenti o entrambe convergenti

$$) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^x}} = l \neq 0$$

$$x > 0$$

$$0 \leq x \leq 1$$

la serie DIVERGE
la serie CONVERGE

$$b_n = \frac{1}{n x^4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+n x^4}}{\frac{1}{n x^4}} = 1$$

$\Rightarrow \sum b_n$ e $\sum a_n$ hanno lo stesso carattere

$$\text{Panche } \sum b_n = \sum \frac{1}{n x^4} = \frac{1}{x^4} \sum \frac{1}{n} \text{ DIVERGENTE}$$

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{1+n x^4} \text{ DIVERGENTE}$$

)

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x}{1+n^2 x^2}$$

puntualmente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{1+n^2 x^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

Se 2 serie hanno lo stesso carattere

$$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x}{1+n^2 x^2}$$

CONVERGENTE per $x \neq 0$

Questo PUNTUALMENTE

Per vedere se è derivabile per serie devo dimostrare che

1/2

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f'_n\| \text{ CONVERGE}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left\| \frac{1 - m^2 x^2}{(1 + m^2 x^2)^2} \right\|_{\infty, [a, +\infty]}$$

$$\frac{1 - m^2 x^2}{(1 + m^2 x^2)^2} \leq \frac{1 + m^2 x^2}{(1 + m^2 x^2)^2} = \frac{1}{1 + m^2 x^2} \leq \frac{1}{m^2 a^2} = \frac{1}{m^2 a^2}$$

$$\|f'_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{1}{m^2 a^2} < +\infty \text{ CONVERGENTE}$$

→ a può derivare per serie

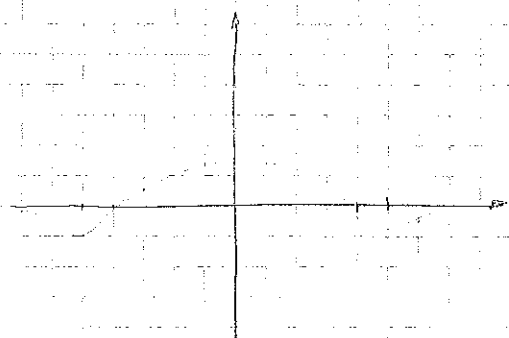
WWW.INGONLINE.BIZ

$$D'(f'_n) = \frac{-2m^2 x (1 + m^2 x^2)^2 - 2(1 + m^2 x^2) 2m^2 x (1 - m^2 x^2)}{(1 + m^2 x^2)^4}$$

$$= \frac{(1 + m^2 x^2) (-2m^2 x - 2m^4 x^3 - 4m^2 x + 4m^4 x^3)}{(1 + m^2 x^2)^4}$$

$$= \frac{(1 + m^2 x^2) (-6m^2 x + 2m^4 x^3)}{(1 + m^2 x^2)^4} = \frac{2m^2 x (m^2 x^2 - 3)}{(1 + m^2 x^2)^3}$$

$$D'(f'_n) = 0 \quad m^2 x^2 - 3 = 0 \quad x^2 = \frac{3}{m^2} \quad x = \pm \frac{\sqrt{3}}{m}$$



$\frac{\sqrt{3}}{m}$

$$1 - m^2 x^2 = \frac{1}{m^2}$$

$$1 - m^2 \left(\frac{3}{m^2} \right) = \frac{1}{m^2}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{-m^2 x^{m-1}}{(1+x^m)^2}$$

119

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{-(m+1)^2 x^m}{(1+x^{m+1})^2}}{\frac{(1+x^m)^2}{-m^2 x^{m-1}}} =$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{-(m+1)^2}{-m^2} \cdot \frac{x^m}{x^{m-1}} \cdot \frac{(1+x^m)^2}{(1+x^{m+1})^2} = \frac{1}{x}$$

$\downarrow$ 1 $\downarrow$ x $\downarrow$ $\frac{1}{x^2}$

se $|x| < 1$ DIVERGENTE

se $|x| > 1$ CONVERGE

WWW.INGONLINE.BIZ

uniformemente

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left\| \frac{-m^2 x^{m-1}}{(1+x^m)^2} \right\|_{\infty, [a, +\infty[} \quad a > 1$$

$$\leq \left\| \frac{-m^2 x^{m-1}}{(1+x^m)^2} \right\|_{\infty} \leq \frac{-m^2 x^{m-1}}{x^{2m}} =$$

~~scribbles~~

Dato A Pseudo anello $\mathbb{C}$ nella corona $C(z_0, r, R)$

121

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m (z-z_0)^m$$

dove $a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(z-z_0)^{m+1}} d\xi \quad \forall z \in C(z_0, r, R)$

NOTA $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) d\xi \quad I(\gamma, z_0) = 1$

SI CHIAMA RESIDUO

WWW.INGONLINE.BIZ

I TEOREMA DEI RESIDUI

A aperto e limitato di $\mathbb{C}$, γ curva chiusa che percorre ∂A ,
 γ "gira in senso antiorario"



$$z_1, \dots, z_n \in A$$

f olomorfa in $A \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$

$$\text{Allora } \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j)$$

SI OTTENE altrettanto applicando il teorema dei residui:

Se P è un polinomio di grado maggiore di 2 $q(x), p(x)$ non ha
 radici reali (grado pari) hanno $z_1, \dots, z_n$ le radici di

$$p(x) \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(x)}{p(x)} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_j) > 0} \text{Res} \left(\frac{1}{p(z)}, z_j \right)$$

$$= -2\pi i \sum_{\text{Im}(z_j) < 0} \text{Res} \left(\frac{1}{p(z)}, z_j \right)$$

RESIDUI (COME SI CALCOLANO)

Se $f(z) = \frac{h(z)}{z-z_0}$

$h(z)$ olomorfa in z_0

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) / (z-z_0)$$

$z_1, \dots, z_p$

radici di Q non reali

$x_1, \dots, x_m$

radici di Q reali semplici

123

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{P(x)}{Q(x)} dx =$$

$$= 2\pi i \sum_{\substack{Q(z_j) = 0 \\ \text{Im}(z_j) > 0}} \text{Res}(f, z_j) + \pi i \sum_k \text{Res}(f, x_k) \quad \lambda < 0$$

$$= -2\pi i \sum_{\substack{Q(z_j) = 0 \\ \text{Im}(z_j) < 0}} \text{Res}(f, z_j) - \pi i \sum_k \text{Res}(f, x_k) \quad \lambda > 0$$

WWW.MINDONLINE.IT

II TEOREMA DEI RESIDUI

A contenuto in $\bar{C}(z_0, R, \infty)$ per $R \geq 0$ o A bordo di A
 percorso da una curva γ chiusa percorsa compatibilmente con A



$f: A \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$
 olomorfa

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) + \text{Res}(f, \infty)$$

Esempio se prendo $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ P, Q polinomi
 grado $Q >$ grado $P+1$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, \infty) = 0$$

Quindi se prendo γ curva che circonda tutti gli z in cui f non
 è olomorfa si ha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res} = 0 \quad \begin{matrix} \downarrow x \in \mathbb{R} \\ \downarrow x \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Esempio 3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_j) > 0} \text{Res} \left(\frac{z^2}{1+z^4}, z_j \right)$$

Radici quarte di -1

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Res} \left(\frac{z^2}{1+z^4}, z_j \right) = \frac{z_j^2}{4z_j^3} = \frac{1}{4} \frac{1}{z_j} = \frac{1}{4} \frac{\bar{z}_j}{|z_j|^2} = \frac{1}{4} \bar{z}_j$$

$$= 2\pi i \frac{1}{4} \left\{ \frac{1-i}{\sqrt{2}} + \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right\} = 2\pi i \frac{1}{4} (-2i) = \frac{\pi}{2}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Esempio 4

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_j) > 0} \text{Res}(f, z_j)$$

poli sono due: i e $-i$ di ordine 2

$$f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{h(z)}{(z-i)^2} \quad h(z) \text{ OLOMORFA IN } i$$

$$h'(z) = \frac{2z(1+z^2)^2 - 2(1+z^2)z^2}{(z+i)^4} = \frac{2z(z+i) - 2z^2}{(z+i)^3}$$

$$h'(i) = \frac{2(1-2i-i)}{(2i)^3} = 2 \frac{-1}{2(-i)} = \frac{1}{4i}$$

$$2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$$

Esempio 7

127

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{x^2 + x + 1} dx$$

$$\operatorname{Immm} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + x + 1} dx \right)$$

$$f(z) = \frac{z e^{iz}}{z^2 + z + 1}$$

simpolari $z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$\lambda = -1 \rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + x + 1} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Immm}(z_j) > 0} \operatorname{Res} \left(\frac{z e^{iz}}{z^2 + z + 1}, z_j \right)$$

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \left. \frac{z e^{iz}}{2z + 1} \right|_{z=z_1} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}{-1 + \sqrt{3} i + 1} e^{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} i + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\cos \frac{1}{2} + i \operatorname{sen} \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \right) \right) + \frac{i e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \right)$$

$$2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1) = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \right) + i \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \right) \right)$$

Risultato:

$$i \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \right) \right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{\sqrt{x} (1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(e - \frac{1}{e} \right)$$

$$f_n = n \arctan \left(\frac{x}{n} \right)$$

Conv. puntuale

Chi è limite

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x$$

Convergenza uniforme $[0, T]$

$$\max_{0 \leq x \leq T} \overbrace{\left| n \arctan \left(\frac{x}{n} \right) - x \right|}^{f_n(x)}$$

$$f'_n(x) = \arctan \left(\frac{x}{n} \right) - 1 \leq 0$$

$$0 \geq f'_n(x) \geq f'_n(T)$$

$$|f_n(x)| \leq |f'_n(T)| \quad \forall x \in [0, T]$$

$$\|f_n(x) - x\|_{\infty} = |f'_n(T)| \rightarrow 0$$

ESERCIZI

131

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{1+3x^2+3x^4+x^6} dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{(1+x^2)^3} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_j) > 0} \text{Res}(z_j)$$

$$f(z) = \frac{z^4}{(z-i)^3(z+i)^3}$$

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-i)^3}$$

$$h(z) = \frac{z^4}{(z+i)^3} \quad \text{OLOHORFA in } i$$

$$\text{Res}(f, i) = \frac{h''(i)}{2!} = \frac{h''(i)}{2}$$

$$h(z) = z^4 (z+i)^{-3}$$

www.inonline.biz

$$h'(z) = 4z^3(z+i)^{-3} - 3(z+i)^{-4} z^4$$

$$h''(z) = 12z^2(z+i)^{-3} - 3(z+i)^{-4} 4z^3 + 12(z+i)^{-5} z^4 - 4z^3(z+i)^{-4} 3$$

$$h''(i) = \frac{-12}{-8i} + \frac{-24(-i)}{16} + \frac{12}{32i}$$

$$h''(i) = -\frac{3}{2}i + \frac{3}{2}i - \frac{3}{8}i = -\frac{3}{8}i \quad \frac{h''(i)}{2} = -\frac{3}{16}i$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{(1+x^2)^3} dx = 2\pi i \left(-\frac{3}{16}i \right) = \frac{3}{8}\pi$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(1+x^2)^3} dx = \frac{3}{16}\pi$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{4 + 4x^2 + x^4} dx$$

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \ln z}$$

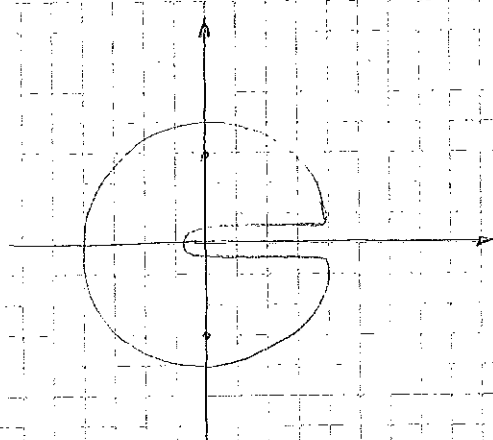
$$\ln z = \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z)$$

$$[0, 2\pi[$$

Se $z \rightarrow x > 0$

con $\operatorname{Im} z > 0 \Rightarrow \sqrt{z} \rightarrow \sqrt{x}$

$\operatorname{Im} z < 0 \Rightarrow \sqrt{z} \rightarrow -\sqrt{x}$



$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{4 + 4z^2 + z^4}$$

$$z^4 + 4z^2 + 4 = 0$$

$$(z^2 + 2)^2 = 0$$

$$z = \pm \sqrt{2}i$$

WWW.ONLINE.BIZ

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{(z - \sqrt{2}i)^2 (z + \sqrt{2}i)^2} = \frac{h(z)}{(z - \sqrt{2}i)^2} = \frac{h_1(z)}{(z + \sqrt{2}i)^2}$$

$$h(z) = \frac{\sqrt{z}}{(z + \sqrt{2}i)^2}$$

olomorfia in $\sqrt{2}i$

$$h_1(z) = \frac{\sqrt{z}}{(z - \sqrt{2}i)^2}$$

olomorfia in $-\sqrt{2}i$

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{4 + 4x^2 + x^4} dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i)$$

$$h'(\sqrt{2}i) = \frac{1}{2\sqrt{z}} (z + \sqrt{2}i)^{-2} - 2(z + \sqrt{2}i)^{-3} \sqrt{z} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{2}i}} ((2\sqrt{2}i)^{-2} - 2(2\sqrt{2}i)^{-3} \sqrt{\sqrt{2}i})$$

$$= \frac{\sqrt{2}i - 2\sqrt{2}i}{(2\sqrt{2}i)^3} = \frac{-\sqrt{2}i}{(2\sqrt{2}i)^3} = \frac{-\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{(2\sqrt{2}i)^3}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+2x^2+x^4)(x^2+2x+2)} dx$$

$$z = -1 \pm \sqrt{1-i} = -1 \pm i$$

135

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} = \frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2(z-(-1+i))(z-(-1-i))}$$

POLE		polo	du	ordone	
i		"	"	"	2
$-i$		"	"	"	"
$-1+i$		"	"	"	1
$-1-i$		"	"	"	"

$$g(z) = \frac{h(z)}{(z-i)^2}$$

$$h(z) = \frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+2z+2)}$$

olomofija m i

$$\text{Res}(f, i) = h'(i)$$

$$h'(z) = \frac{2z(z+i)^2(z^2+2z+2) - \{2(z+i)(z^2+2z+2) + (2z+2)(z+i)^2\}z^2}{(z+i)^4(z^2+2z+2)^2}$$

$$h'(i) = \frac{(2i) \cdot (2i) \cdot (1+2i) + (2+4i-4+4i)}{-8i(1+2i)^2}$$

$$= \frac{-4-8i+2+4i-4+i}{-8i(-3+4i)} = \frac{3}{4i(-3+4i)} = \frac{3(-4i)(-3-4i)}{16(-9+16)}$$

$$= \frac{36i+48}{400} = \frac{9i+12}{100}$$

$$f(z) = \frac{h_2(z)}{(z-(-1+i))}$$

$$h_2(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z-(-1-i))}$$

olomofija m $-1+i$

$$h(-1+i) = \frac{-2i}{(1-2i)^2(2i)} = \frac{-1}{(1-2i)^2} = \frac{-1}{1-4-4i} =$$

$$= \frac{-1(-3+4i)}{(3-4i)(-3+4i)} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3-4i}{25}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} dx = \frac{1}{2} 2\pi i \left(\frac{9i+12}{100} + \frac{12-16i}{100} \right) = \frac{7}{100} \pi$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(9+x^2)^2} dx$$

WWW.INGONLINE.BIZ

$$\begin{array}{r} x^4 \\ -x^4 - 18x^2 - 81 \\ \hline -18x^2 - 81 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^4 + 18x^2 + 81 \\ 1 \end{array}$$

$$\frac{x^4}{x^4 + 18x^2 + 81} = 1 - \frac{18x^2 + 81}{x^4 + 18x^2 + 81}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} 1 dx - \int_0^{+\infty} \frac{18x^2 + 81}{(x^2 + 9)^2} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{18x^2 + 81}{(x^2 + 9)^2} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_j) > 0} \text{Res}(f, z_j)$$

$$f(z) = \frac{18z^2 + 81}{(z-3i)^2(z+3i)^2}$$

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-3i)^2}$$

h(z) olomorfa in 3i

$$\text{Res}(f, 3i) = h'(3i)$$

$$h(z) = (18z^2 + 81)(z+3i)^{-2}$$

$$h'(z) = 36z(z+3i)^{-2} - 2(z+3i)^{-3}(18z^2 + 81)$$

$$h'(3i) = \frac{3}{108i} + \frac{-2(-81)}{-216i} = -3i + \frac{3}{4}i = -\frac{9}{4}i$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{18x^2 + 81}{(x^2 + 9)^2} dx = 2\pi i \cdot -\frac{9}{4}i = \frac{9}{2}\pi$$

$$\int_0^{+\infty} 1 dx = x \Big|_0^{+\infty} = \infty$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-\frac{1}{4}i(1-2i)}{1+4} + \frac{\frac{1}{2}(-i-1)(-3-4i)}{-3+4i} \\
 &= \left(-\frac{1}{4}i - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \frac{(-4+7i)}{25} \\
 &= -\frac{1}{20}i - \frac{1}{10} - \frac{1}{50} + \frac{7}{50}i \\
 &= \frac{5+4}{100}i - \frac{10+2}{100} = -\frac{9}{100}i - \frac{12}{100} \cdot \frac{3}{25}
 \end{aligned}$$

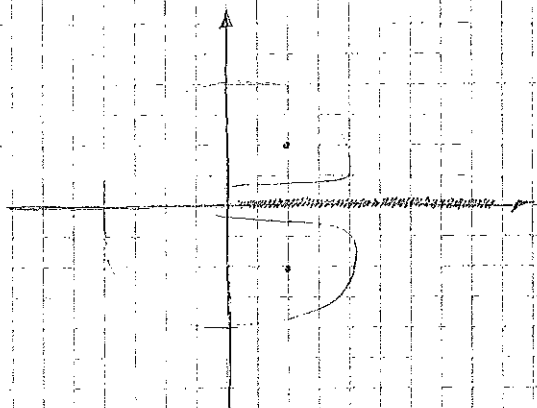
$$\begin{aligned}
 \sum \operatorname{Res}(f, z_j) &= \frac{3-4i}{25} + \frac{9}{100}i - \frac{3}{25} = \\
 &= -\frac{16}{100}i + \frac{9}{100}i = -\frac{7}{100}i
 \end{aligned}$$

$$2\pi i \cdot -\frac{7}{100}i = 2 \cdot \frac{7}{100} \pi = \frac{7}{50} \pi$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+2x^2+x^4)(2+2x+x^2)} dx = \boxed{\frac{7}{100} \pi}$$

$$) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-2x+2} dx$$

poli $x^2-2x+2=0 \quad x=1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$



$$\sqrt{z-1}$$

$$\frac{1}{2} \ln(z-1)$$

$$\ln(z-1) = \ln|z-1| + i \operatorname{Arg}(z-1)$$

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-2x+2} dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f, z_j)$$

$$f(z) = \frac{\sqrt{z-1}}{z^2-2z+2} = \frac{h(z)}{(z-(1+i))(z-(1-i))} = \frac{h_1(z)}{[z-(1-i)]}$$

$$\operatorname{Res}(f, 1+i) = h(1+i)$$

$$h(z) = \frac{\sqrt{z-1}}{[z-(1-i)]} \quad \text{olomorfa in } 1+i$$

$$) \quad h(1+i) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}}{2i} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2i} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{4i}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{4}$$

$$h_1(z) = \frac{\sqrt{z-1}}{[z-(1+i)]} \quad \text{olomorfa in } 1-i$$

$$h_1(1-i) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}{-2i} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{4i} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{4}$$

$$) \quad \operatorname{Res}(f, 1+i) + \operatorname{Res}(f, 1-i) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{4} + \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{4} = \frac{-2\sqrt{2}i}{4} = \frac{-\sqrt{2}i}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-2x+2} dx = \pi i \cdot \frac{-\sqrt{2}i}{2} = \boxed{\frac{\pi\sqrt{2}}{2}}$$