

Controlli Automatici, lezioni del prof. Zini ed ampliamenti

(Alessandro Iacopini)

01-04-02

Capitolo 1

Dimostrazioni per gli esercizi

Vengono riportate ,in questo capitolo, tutta una serie di dimostrazioni matematiche utili per lo svolgimento degli esercizi di controlli automatici, al fine di non avere dubbi sull'origine di alcuni passaggi o calcoli effettuati su tali esercizi.

1.1 Impulso di Dirac

Alla fine degli anni venti, P.Dirac nelle sue ricerche sulla meccanica quantistica introdusse per la prima volta nella scienza la cosiddetta funzione δ con le seguenti proprietà

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0; \quad \int \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0) \quad \varphi \in C \quad \textbf{formula di Dirac}$$

Presto i matematici dimostrarono che, dal punto di vista matematico, era una definizione senza senso. Naturalmente allo stesso Dirac era chiaro che la funzione δ non era una funzione in senso classico e, ciò che più importa, che agiva come un operatore (più precisamente come un funzionale), il quale associa ad ogni funzione continua φ il numero $\varphi(0)$ mediante la formula di Dirac: la valutazione in 0. Occorsero molti anni e le fatiche di numerosi matematici per trovare una definizione matematicamente corretta della funzione δ , delle sue derivate e, in generale delle distribuzioni. Una delle sue principali utilità è, per noi, la proprietà che la sua L-trasformata sia uguale ad uno.

1.2 Trasformate di Laplace

Indichiamo con

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \quad \text{con } s \in C$$

la trasformata di Laplace (o L-trasformata) della funzione $f(t)$. Elenchiamo una serie di proprietà della L-trasformata:

1. La L-trasformata è lineare

$$L\{\alpha_1 \cdot f_1(t) + \alpha_2 \cdot f_2(t)\} = \alpha_1 \cdot L\{f_1(t)\} + \alpha_2 \cdot L\{f_2(t)\}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} L\{\alpha_1 \cdot f_1(t) + \alpha_2 \cdot f_2(t)\} &= \int_0^{+\infty} \alpha_1 \cdot f_1(t)e^{-st}dt + \int_0^{+\infty} \alpha_2 \cdot f_2(t)e^{-st}dt = \\ &= \alpha_1 \int_0^{+\infty} f_1(t)e^{-st}dt + \alpha_2 \int_0^{+\infty} f_2(t)e^{-st}dt = \\ &= \alpha_1 \cdot L\{f_1(t)\} + \alpha_2 \cdot L\{f_2(t)\} \end{aligned}$$

2. Traslazione nel dominio del tempo

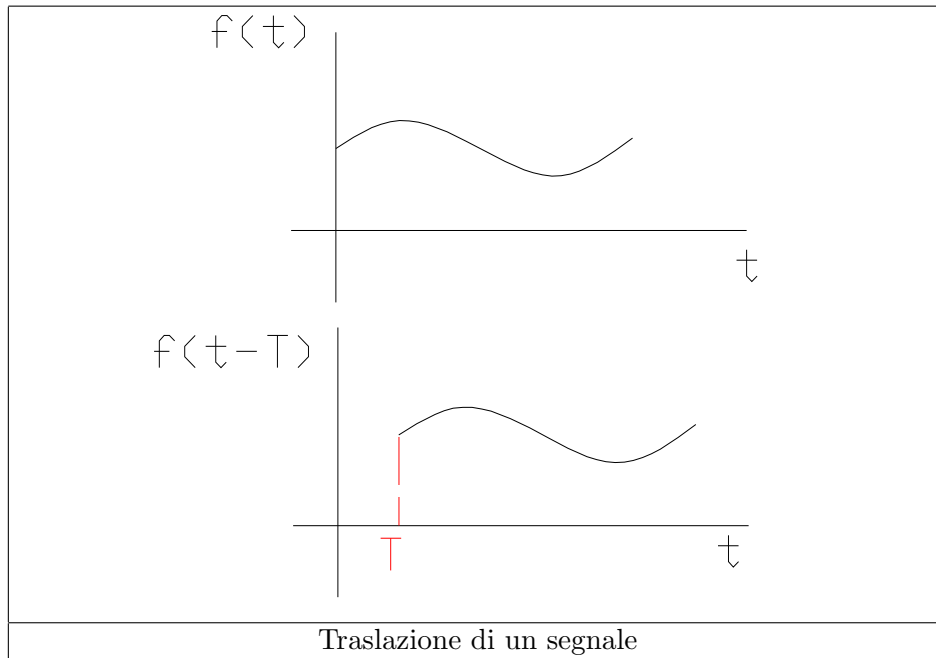
$$L\{f(t)\} = F(s) \implies L\{f(t - \tau)\} = F(s)e^{-s\tau}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} L\{f(t - \tau)\} &= \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau)e^{-st}e^{s\tau}e^{-s\tau}dt = \\ &= e^{-s\tau} \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau)e^{-s(t-\tau)}dt = \end{aligned}$$

con $t' = t - \tau$

$$= e^{-s\tau} \int_0^{+\infty} f(t')e^{-st'}dt$$



3. Traslazione nel dominio della frequenza

$$L\{f(t)\} = F(s) \implies L\{f(t) \cdot e^{at}\} = F(s - a)$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} L\{f(t) \cdot e^{at}\} &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{at}e^{-st}dt = \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(s-a)t}dt = F(s - a) \end{aligned}$$

4. Derivazione

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} = F(s) \implies L\left\{\frac{df}{dt}\right\} &= sF(s) - f(0) \iff \\ &\iff \lim_{s \rightarrow +\infty} f(t) \cdot e^{-st} = 0 \end{aligned}$$

ovvero $f(t)$ deve avere un ordine di infinito minore di e^{-st} .

Dimostrazione

$$L\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} \cdot e^{-st} = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^{+\infty} + s \cdot \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0)$$

se e solo se $\lim_{s \rightarrow +\infty} f(t) \cdot e^{-st} = 0$

5. Convoluzione tra due segnali

Siano

$$L\{f(t)\} = F(s) \quad L\{g(t)\} = G(s)$$

allora

$$L\{f(t) * g(t)\} = F(s) \cdot G(s)$$

Il prodotto di convoluzione di $f(t)$ e $g(t)$ è definito come

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} L\{f(t) * g(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau \right] e^{-st} e^{s\tau} e^{-s\tau} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) e^{-s(t-\tau)} dt \right] e^{-s\tau} d\tau = \end{aligned}$$

ponendo $t - \tau = t'$, otteniamo

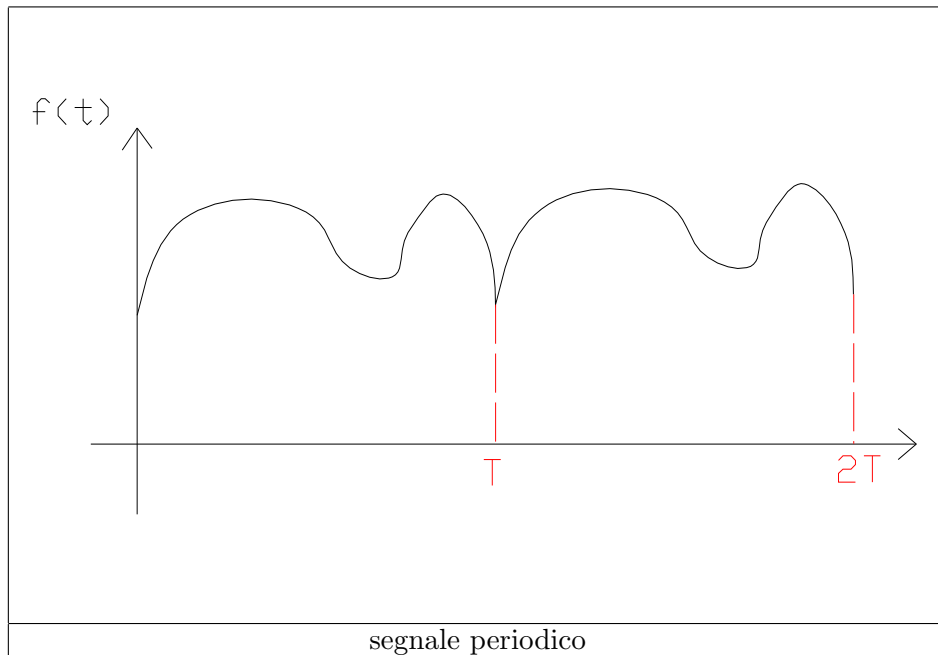
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) F(s) e^{-s\tau} d\tau = F(s) \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau = F(s) \cdot G(s)$$

6. Traslazione di un segnale

Sia una funzione periodica

$$f(t) = f(t + T)$$

la quale esprime un segnale periodico di periodo T :



la sua L-trasformata è dunque

$$L\{f(t)\} = \left[\int_0^T f(t) e^{-st} dt \right] \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

Dimostrazione

$$L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \sum_{K=0}^{+\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st} dt =$$

con $t' = t - kT$

$$\begin{aligned} &= \sum_{K=0}^{+\infty} \int_0^T f(t' + kT)e^{-s(t'+kT)} dt' = \sum_{K=0}^{+\infty} \int_0^T f(t')e^{-st'-skT} dt' = \\ &= \sum_{K=0}^{+\infty} (e^{-sT})^k \int_0^T f(t')e^{-st'} dt' = \left[\int_0^T f(t)e^{-st} dt \right] \sum_{K=0}^{+\infty} (e^{-sT})^k = \left[\int_0^T f(t)e^{-st} dt \right] \frac{1}{1 - e^{-sT}} \end{aligned}$$

in cui $\sum_{K=0}^{+\infty} (e^{-sT})^k = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$ è la serie geometrica.

Sono elencate, nella seguente tabella, le più usate L-trasformate

$f(t)$	$F(s)$
Dirac $\delta(t)$	1 $\longrightarrow \int_{0-}^{+\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1$
gradino $H(t)$	$\frac{1}{s}$ $\longrightarrow H(t) = \int \delta(t) dt$
$t = \frac{t^1}{1!}$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{1}{s^3}$
.....	
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin \omega t = \frac{1}{j2} [e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}]$	$\frac{1}{j2} \left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t = \frac{1}{2} [e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}]$	$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2} \longrightarrow$ Traslazione nel dominio del tempo
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2} \longrightarrow$ Traslazione nel dominio del tempo
$f(t)$	$L\{t \cdot f(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$ (dimostrare per esercizio)
$t \cdot e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$\frac{t^2}{2} \cdot e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^3}$
$\frac{t^n}{n!} \cdot e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$

1.3 Tecniche di antitrasformazione

Sia $F(s)$ L-trasformata di una funzione $f(t)$, allora $F(s)$ può essere rappresentata come frazione di due polinomi:

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

tenendo ben presente che il grado del denominatore deve essere maggiore di quello del numeratore:

$$n \geq m$$

Non deve verificarsi che il grado del numeratore superi quello del denominatore:

$$n < m \quad \text{NO!}$$

se questo si verifica otteniamo:

$$F(s) = q(s) + \frac{r(s)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

dalla quale $q(s)$ rappresenta la parte intera del polinomio razionale fratto :

$$q(s) = q_{m-n} s^{m-n} + \dots + q_1 s + q_0$$

facendo la sua antitrasformata:

$$L^{-1}\{q(s)\} = q_{m-n} L^{-1}\{s^{m-n}\} + \dots + q_1 L^{-1}\{s\} + q_0 = q_{m-n} \cdot \frac{d^{(m-n)}}{dt^{(m-n)}} \delta(t) + \dots + q_1 \cdot \frac{d}{dt} \delta(t) + q_0 \cdot \delta(t)$$

in cui le derivate dell'impulso di Dirac

$$\frac{d^{(m-n)}}{dt^{(m-n)}} \delta(t); \dots; \frac{d}{dt} \delta(t)$$

da un punto di vista fisico **non hanno nessun senso**, quindi è importante che $n \geq m$.

1.3.1 Fattorizzazione del denominatore in poli semplici

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

Supponiamo che $n > m$, allora possiamo subito fattorizzare la $F(s)$ nei seguenti fratti semplici supponendoli, per ipotesi, composti al loro denominatore da polinomi di grado uno (poli semplici)

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \dots + \frac{A_n}{s - p_n}$$

con

$$A_1, A_2, \dots, A_n \quad \text{RESIDUI POLARI}$$

$$P_1, P_2, \dots, P_n \quad \text{POLI}$$

Se $n=m$, prima di fattorizzare la $F(s)$ in fratti semplici, dobbiamo dividere il numeratore con il denominatore, dopo di che siamo nella condizione che $n > m$ e quindi possiamo procedere alla fattorizzazione della $F(s)$.

I residui polari vengono calcolati per mezzo della seguente formula di immediata dimostrazione :

$$A_i = \lim_{s \rightarrow p_i} [F(s)(s - p_i)]$$

Esempio. Antitrasformare la seguente $F(s)$

$$F(s) = \frac{3s^2 + s + 1}{s^2 + 3s + 2}$$

siamo nella situazione in cui il grado del numeratore è uguale a quello del denominatore ($n=m$), quindi scomponiamo $F(s)$ in polinomi fratti semplici

$$\begin{array}{r|l} 3s^2 + s + 1 & s^2 + 3s + 2 \\ -3s^2 - 9s - 6 & 3 \\ \hline -8s - 5 & \end{array}$$

$$\frac{3s^2 + s + 1}{s^2 + 3s + 2} = 3 + \frac{-8s - 5}{s^2 + 3s + 2} = 3 + \frac{-8s - 5}{(s+1)(s+2)} = 3 + \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s+1}$$

calcolo i residui polari

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow -2} \left(3 + \frac{-8s - 5}{(s+1)(s+2)} \right) (s+2) = \frac{+16 - 5}{-1} = -11$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -1} \left(3 + \frac{-8s - 5}{(s+1)(s+2)} \right) (s+1) = 3$$

$$F(s) = 3 + \frac{-11}{s+2} + \frac{3}{s+1}$$

antitrasformando otteniamo la funzione $f(t)$

$$L^{-1} = \{F(s)\} = f(t) = 3 + \delta(t) + 3 \cdot e^{-t} - 11 \cdot e^{-2t}$$

Esercizio.

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 3\dot{y} + 4y = 1 \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

L'equazione differenziale è lineare, perciò possiamo risolvere il problema con la tecnica delle antitrasformate. L-trasformiamo

$$y(t) \longrightarrow Y(s)$$

per la proprietà di linearità della L-trasformata otteniamo

$$L\{3\dot{y} + 4y\} = L\{3\dot{y}\} + L\{4y\} = 3[sY(s) - y(0)] + 4Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$3[sY(s) - 5] + 4Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s} + 15}{3s + 4} = \frac{1 + 15s}{s(3s + 4)}$$

la esprimiamo in questa forma

$$Y(s) = \frac{1 + 15s}{s(3s + 4)} = \frac{A_1}{s} + \frac{1}{3} \cdot \frac{A_2}{s + \frac{4}{3}}$$

determiniamo i residui polari

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0_+} s \cdot \left(\frac{A_1}{s} + \frac{1}{3} \cdot \frac{A_2}{s + \frac{4}{3}} \right) = \lim_{s \rightarrow 0_+} (sY(s)) = \lim_{s \rightarrow 0_+} \left(s \cdot \frac{1 + 15s}{s(3s + 4)} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{A_2}{3} = \lim_{s \rightarrow -\frac{4}{3}} \left(s + \frac{4}{3} \right) \left[\frac{A_1}{s} + \frac{1}{3} \cdot \frac{A_2}{s + \frac{4}{3}} \right] = \lim_{s \rightarrow -\frac{4}{3}} \left(s + \frac{4}{3} \right) \left[\frac{1 + 15s}{s(3s + 4)} \right] = \frac{19}{4}$$

da cui

$$A_2 = 3 \cdot \frac{19}{4} = \frac{57}{4}$$

sostituendo i residui polari

$$Y(s) = \frac{1}{4s} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{57}{4}}{s + \frac{4}{3}} = \frac{1}{4s} + \frac{57}{12} \cdot \frac{1}{s + \frac{4}{3}}$$

antitrasformando otteniamo l'unica funzione che risolve il problema di Cauchy

$$y(t) = L^{-1} \{Y(s)\} = \frac{1}{4} \cdot H(t) + \frac{57}{12} \cdot e^{-\frac{4}{3}t} = \frac{1}{4} + \frac{57}{12} \cdot e^{-\frac{4}{3}t}$$

Esercizio.

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y' + y = \sin t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Osserviamo che

$$L \left\{ \frac{d^2 f}{dt^2} \right\} = sL \left\{ \frac{df}{dt} \right\} - \left\{ \frac{df}{dt} \right\}_{t=0} = s(sF(s) - f(0)) - f'(0)$$

da cui

$$s(sY(s) - 1) - 2 + 3(sY(s) - y(0)) + Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

facendo i passaggi algebrici otteniamo

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1 + (s + 5)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 3s + 1)} = \frac{1 + (s + 5)(s^2 + 1)}{(s - j)(s + j)(s - \frac{-3+\sqrt{5}}{2})(s + \frac{3+\sqrt{5}}{2})} = \\ &= \frac{A_1}{(s - j)} + \frac{A_2}{(s + j)} + \frac{A_3}{s - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}} + \frac{A_4}{s + \frac{3+\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

calcoliamo i residui polari

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow j} (s - j) Y(s) = -\frac{1}{6}$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -j} (s + j) Y(s) = -\frac{1}{6}$$

$$A_3 = \lim_{s \rightarrow \frac{-3+\sqrt{5}}{2}} \left(s - \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right) Y(s) = \frac{2(13-3\sqrt{5})}{3\sqrt{5}(3-\sqrt{5})}$$

$$A_4 = \lim_{s \rightarrow -\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \left(s + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) Y(s) = -\frac{2(13+3\sqrt{5})}{3\sqrt{5}(3+\sqrt{5})}$$

dopo aver fatto un poco di facchinaggio algebrico per determinare i residui polari (mezz'ora, avevo sonno), finalmente antitrasformiamo ed otteniamo la funzione cercata

$$y(t) = -\frac{1}{6} \cdot e^{jt} - \frac{1}{6} \cdot e^{-jt} + \frac{2(13-3\sqrt{5})}{3\sqrt{5}(3-\sqrt{5})} \cdot e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t} - \frac{2(13+3\sqrt{5})}{3\sqrt{5}(3+\sqrt{5})} \cdot e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t}$$

1.3.2 Fattorizzazione del denominatore in poli multipli

Intanto dobbiamo fare una precisazione su quei coefficienti che possono essere chiamati residui polari e quelli che non lo possono e vengono chiamati semplicemente coefficienti. Nello sviluppo in fratti semplici della $F(s)$, i **coefficienti che hanno come denominatore polinomi di primo grado si chiamano residui polari**, mentre quelli che hanno al denominatore polinomi di grado superiore al primo sono chiamati coefficienti. Nel paragrafo precedente a questo, per esempio, abbiamo trattato solamente i residui polari in quanto la fattorizzazione del denominatore è stata fatta con polinomi del prim'ordine. Facciamo ulteriori esempi

- **Poli semplici**

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)} = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \frac{A_3}{s-p_3}$$

nella quale A_1, A_2, A_3 sono **RESIDUI POLARI**

- **Polo doppio**

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)^2(s-p_2)(s-p_3)} = \frac{A_{1,2}}{(s-p_1)^2} + \frac{A_{1,1}}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \frac{A_3}{s-p_3}$$

- **Polo triplo**

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)^3(s-p_2)(s-p_3)} = \frac{A_{1,3}}{(s-p_1)^3} + \frac{A_{1,2}}{(s-p_1)^2} + \frac{A_{1,1}}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \frac{A_3}{s-p_3}$$

iterando il procedimento identifichiamo la fattorizzazione con polo ennesimo

- **Polo ennesimo**

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)^n(s-p_2)(s-p_3)} = \frac{A_{1,n}}{(s-p_1)^n} + \dots + \frac{A_{1,2}}{(s-p_1)^2} + \frac{A_{1,1}}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \frac{A_3}{s-p_3}$$

A_2, A_3 sono i **residui polari** mentre $A_{1,n}, A_{1,2}, A_{1,1}$ sono **I COEFFICIENTI**.

Il **CALCOLO DEI COEFFICIENTI** può essere effettuato per mezzo della seguente formula

$$A_{1,n-i} = \frac{1}{i!} \lim_{s \rightarrow p_1} \left(\frac{d^i}{ds^i} [F(s)(s-p_1)^n] \right)$$

1.3.3 Trucco di calcolo per determinare i residui polari

Questo trucco è un metodo di calcolo che permette di determinare più rapidamente i residui polari. Quello che simpaticamente chiamiamo trucco è naturalmente un metodo dimostrabile attraverso il teorema dei residui: esso è parte della teoria delle funzioni olomorfe, chiamate anche, in alcuni testi sacri di analisi matematica, funzioni analitiche o regolari. Inoltre, è da precisare che tale teoria (forse una delle più belle teorie) riveste particolare importanza in quanto unisce la teoria dei campi, la differenziabilità nella sua generalizzazione, i numeri complessi e ci dà gli strumenti necessari per calcolare l'integrale improprio di una funzione razionale e l'integrale di Cauchy, tutte cose che stanno alla base dello sviluppo scientifico. La dimostrazione del trucco è riportata, per esempio, nel libro Giovanni Marro- **CONTROLLI AUTOMATICI** -Zanichelli a pagina 114 e qui non verrà riportata. Le regole del trucco sono queste:

riferendoci alla nostra $F(s)$ e supponendo che essa sia scomponibile in fratti semplici ognuno dei quali, al numeratore, ha un residuo polare

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{A_n}{s-p_n} + \frac{A_{n-1}}{s-p_{n-1}} + \dots + \frac{A_1}{s-p_1}$$

allora **la somma dei residui** è pari a

$$\sum_i^n A_i = \begin{cases} 0 & \text{se } [n - m] > 1 \\ b_m & \text{se } [n - m] = 1 \end{cases}$$

con la quantità

$$[n - m] \longrightarrow \text{ECCESSO POLI-ZERO}$$

Esempio.

Sia data la seguente funzione

$$F(s) = \frac{3s + 2}{(s + 1)^2(s + 2)}$$

fattorizzandola

$$F(s) = \frac{A_{1,2}}{(s + 1)^2} + \frac{A_{1,1}}{(s + 1)} + \frac{A_2}{s + 2}$$

nella quale $A_{1,2}$ è un coefficiente, mentre $A_{1,1}$ e A_2 sono i residui polari. Applicando la formula per determinare i coefficienti otteniamo

$$A_{1,2-0} \Big|_{n=2,i=0} = A_{1,2} = \frac{1}{0!} \lim_{s \rightarrow -1} \left(\frac{d^0}{ds^0} [F(s)(s + 1)^2] \right) = \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{3s + 2}{s + 2} \right] = -1$$

$$A_{1,2-1} \Big|_{n=2,i=1} = A_{1,1} = \frac{1}{1!} \lim_{s \rightarrow -1} \left(\frac{d}{ds} [F(s)(s + 1)^2] \right) = \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{3(s + 2) - (3s + 2)}{(s + 2)^2} \right] = 4$$

Applicando il trucco sui residui polari $A_{1,1}$ e A_2 , nel nostro caso per $[n - m] > 1$, otteniamo:

$$A_{1,1} + A_2 = 0 \implies A_2 = -4$$

Verifichiamo

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -2} (F(s)(s + 2)) = \frac{3s + 2}{(s + 1)^2} = -4$$

Esercizio.

Risolvere il seguente problema di cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' + y = e^{-t} \\ y(0) \\ y'(0) \end{cases}$$

$$s^2 Y(s) - sy'(0) - y(0) + sY(s) - y(0) + C = \frac{1}{s + 1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s + 1)(s^2 + s + 1)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s + 1) \left[s - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \left[s - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]} = \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{s - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} + \frac{A_2^*}{s - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}$$

i residui polari complessi sono

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow -1} [Y(s)(s + 1)] = 1$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[Y(s) \left(s - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \right] = \frac{1}{\left[-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right] j\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6}$$

per il nostro trucco deve essere

$$A_1 + A_2 + A_2^* = 0$$

e quindi determiniamo A_2^* che vale

$$A_2^* = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}$$

1.4 Determinazione della F.d.T direttamente dal sistema dinamico in forma I.S.U

Dato un sistema in forma **I.S.U.** (ingresso-stato-uscita)

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + b \cdot u \\ y = c \cdot x + d \cdot u \end{cases} \longrightarrow G(s)$$

La $G(s)$ essendo la **L-trasformata della risposta impulsiva** otteniamo:

$$G(s) = L\{h(t)\} = L\{c \cdot e^{At} \cdot b + d \cdot \delta(t)\} = c \cdot L\{\cdot e^{At}\} \cdot b + d \cdot L\{\delta(t)\}$$

Osserviamo che

$$L\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$$

con I la matrice identica. Infatti la L-trasformata di

$$\dot{x} = Ax + bu$$

del sistema I.S.U. diventa

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + bU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = X(0) + bU(s)$$

$$X(s) = [sI - A]^{-1}X(0) + [sI - A]^{-1}bU(s)$$

antitrasformando $X(s)$ otteniamo

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}b \cdot u(\tau)d\tau$$

e quindi

$$L\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$$

di conseguenza

$$G(s) = c \cdot L\{\cdot e^{At}\} \cdot b + d \cdot L\{\delta(t)\} = c[sI - A]^{-1}b + d$$

ed infine otteniamo la nostra F.d.T.

$$G(s) = c[sI - A]^{-1}b + d$$

dalla quale **A,b,c,d** vengono prelevati direttamente dal sistema **I.S.U.**

1.4.1 matrici in forma di controllo

Le matrici in forma compagna sono particolari strutture matriciali, le quali permettono un immediato calcolo del loro polinomio caratteristico. Diamo alcuni esempi di tali strutture

1. forma di controllo orrizzontale inferiore

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \bullet & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

2. forma di controllo verticale destra

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \bullet & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \bullet & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \bullet & 0 & -a_3 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

3. forma di controllo orrizzontale superiore

$$\begin{bmatrix} -a_{n-1} & \bullet & -a_3 & -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bullet & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bullet & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. forma di controllo verticale sinistra

$$\begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ -a_3 & 0 & \bullet & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & \bullet & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di una matrice in forma di controllo qualunque (una delle quattro forme) è sempre

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

1.5 Determinazione del sistema dinamico in forma I.S.U. direttamente dalla F.d.T

$$G(s) \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + b \cdot u \\ y = c \cdot x + d \cdot u \end{cases}$$

1.5.1 1° metodo o in forma di Jordan

La F.d.T. può essere espressa come segue

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad \text{con} \quad n \geq m$$

e per i motivi esposti precedentemente è importante che sia $n \geq m$. Quindi

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \dots + \frac{A_n}{s - p_n}$$

in cui $A_1, \dots, A_n$ sono i residui polari e $p_1, \dots, p_n$ sono i poli del sistema.

Inoltre dalle precedenti considerazioni abbiamo

$$G(s) = c[sI - A]^{-1}b + d$$

otteniamo quindi

$$G(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \dots + \frac{A_n}{s - p_n} = c[sI - A]^{-1}b + d$$

dall'ultima uguaglianza possiamo ottenere la seguente catena di prodotti tra matrici (da essa potevamo ottenere altre combinazioni che però non servirebbero al nostro scopo)

$$G(s) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-p_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s-p_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + d$$

con

$$c = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-p_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s-p_n} \end{bmatrix}$$

se $n=m$ (eccesso poli zero=0) allora si può verificare il caso in cui $d \neq 0$ (resto della divisione tra polinomi)

$$d = \frac{A_i}{s - p_i} = \frac{K(s - p_i)}{s - p_i} = K$$

il sistema è **NON è STRETTAMENTE CAUSALE**.

se $n > m$ (eccesso poli-zero > 1) allora $d=0$, il sistema è **STRETTAMENTE CAUSALE**

Osserviamo che

$$[sI - A]^{-1} [sI - A] = I$$

da cui

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s - p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s - p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s - p_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}$$

e quindi abbiamo ottenuto **i coefficienti b,c,d e la matrice dinamica A in forma di controllo**, del sistema I.S.U., **ottenuta dai poli della G(s)**

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + b \cdot u \\ y = c \cdot x + d \cdot u \end{cases}$$

1.5.2 2° metodo o in forma di controllo

Prendiamo sempre la nostra F.d.T

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad \text{con} \quad n \geq m$$

il denominatore lo possiamo esprimere come polinomio caratteristico di una matrice in forma di controllo (pagina ??)

$$s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = \det [sI - A]$$

Esprimo A in forma di controllo orizzontale inferiore (potevo scegliere indifferentemente una delle quattro forme)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \bullet & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

La G(s) esprimendola come prodotto tra matrici ottengo

$$G(s) = \frac{1}{\det [sI - A]} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{m-1} & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

ricordando che

$$G(s) = c [sI - A]^{-1} b + d$$

i coefficienti d, b, c sono allora

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{m-1} & b_m \end{bmatrix}$$

il coefficiente d è implicito nella $F(s)$, e quindi se $n=m$ (eccesso poli-zero=0) allora esiste la possibilità che $d \neq 0$, per determinarlo scomponiamo $F(s)$ in fratti semplici verificando se

$$d = \frac{A_i}{s - p_i} = \frac{K(s - p_i)}{s - p_i} = K$$

come nel primo metodo.

Abbiamo quindi ottenuto **i coefficienti b, c, d e la matrice dinamica A in forma di Jordan** del sistema I.S.U.:

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + b \cdot u \\ y = c \cdot x + d \cdot u \end{cases}$$