

- CORREZIONE: $C = -E$ (2)

Dalle (1) e (2) si ricava:

$$V = M + C \quad (3)$$

È evidente che queste equazioni non possono essere utilizzate in maniera esatta in quanto non V che E , quindi C non neppure; si tratta, dunque, di relazioni teoriche utilizzabili praticamente solo in maniera approssimata.

È in generale possibile distinguere gli errori di misura, dovuti di solito al metodo ed agli strumenti adottati; è dunque possibile valutare approssimativamente l'ERRORE RISULTANTE, E_R , della misura, il quale risulta dalla somma di più errori, tipizzati in 3 categorie.

1. ERRORE SISTEMATICO - systematic error
2. ERRORE CASUALE - random error
3. ERRORE GROSSOLANO - people (o gross) error.

L'errore sistematico è di origine certa, generalmente conosciuta; in questo caso può dunque essere calcolato e ridursi di fronte ad un errore sistematico di tipo calcolabile, teoricamente correggibile con la (3) - K la sua entità - e tale da rendere utile questa correzione. Esempi di errori sistematici sono quelli dovuti al consumo degli strumenti nelle misure elettriche: cadute su strumenti posti in serie al circuito, correnti in quelli posti in derivazione.

Il valore e il segno dell'errore casuale dipendono dal caso; questo errore è dunque sconosciuto sia a priori che a posteriori; non si può allora effettuare una correzione, ma si può solo determinare l'ampiezza probabile mediante un'analisi statistica di una serie di risultati. Può essere dovuto a disturbi di tipo EM o a rumore di amplificatori elettronici.

L'errore grossolano porta a misure molto divergenti dalle altre. È di solito dovuto ad errori degli operatori in lettura o nel riporto dei dati. Viene notato facilmente e può quindi essere subito eliminato.

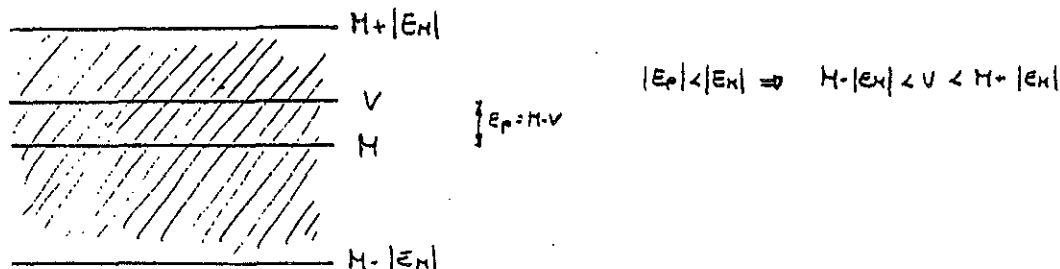
www.ingonline.biz

12.1 ERRORE CASUALE

Come già accennato è una variabile aleatoria; occorre quindi conoscere la distribuzione di probabilità per determinare, con un certo livello di confidenza, un intervallo nel quale si può ritenere che debba cadere. Per far ciò occorrono, però, più misure, nonché una elaborazione statistica di queste.

È, in genere, un errore mai precedo; possiamo pertanto introdurre un valore massimo assoluto, necessariamente più grande: ERRORE MASSIMO ASSOLUTO, $|E_M|$, con: $|E_M| > |E_R|$, dove con E_R si è indicato l'errore probabile.

Questo procedimento ha il pregio di introdurre un errore più grande di quello effettivo, cioè di eseguire una valutazione pessimistica dell'errore, garantendo che V sia compreso dentro la zona fascia tratteggiata in figura. In realtà più errori tendono a compensarsi; trattandoli solo il valore assoluto il più delle volte ne esigiamo una sovrastruttura anche pesante.



In E_M a volte si inserisce anche una componente di errore sistematico, dovuta ad una correzione superflua, o addirittura ad una mancata correzione di questo.

E' importante sapere come gli errori nelle singole misure:

$$E_a = M_a - V_a, \dots, E_n = M_n - V_n$$

si ripercuotano sull'errore con cui conosciamo la misura di x . L'entusiasmo e conseguentemente gli errori massimi ammessi; avremo che:

$$E_x = f'[(M_a, E_a), \dots, (M_n, E_n)]$$

Supponiamo che le misure $M_a, \dots, M_n$ siano indipendenti le une dalle altre. Se gli errori $E_a, \dots, E_n$ sono abbastanza piccoli da poter sviluppare x_m in serie di Taylor trascurando i termini di grado superiore al primo avremo che:

$$E_x = \frac{\partial f}{\partial a} E_a + \frac{\partial f}{\partial b} E_b + \dots + \frac{\partial f}{\partial n} E_n \quad (1)$$

Ponendo:

$$E_a = M_a - V_a = da \approx da \quad \text{e così via per gli altri errori, possiamo scrivere:}$$

$$dx = \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db + \dots + \frac{\partial f}{\partial n} dn \quad (2)$$

Questa relazione è esatta per errori infinitesimi e valida con buona approssimazione per errori sufficientemente piccoli (tal da rendere trascurabili i termini di grado superiore al 1°).

La relazione (1) può essere utilizzata una volta che gli E_i siano noti in valore e segno; si tratta, tuttavia, di una eventualità che accade raramente; solitamente noi conosciamo solo l'errore assoluto di una misura, il quale è privo di segno.

Quindi, in generale, nelle (1) sono noti i segni delle derivate parziali, ma non quelli degli errori; non è dunque possibile ricavare E_x in una semplice combinazione lineare dei prodotti della misura più pessimistica, cioè rendendoli tutti concordi.

La (1) dovrà allora essere modificata rendendo le derivate in modulo e sostituendo agli E_i i corrispondenti errori massimi ammessi $|E_i^*|$. Allora anche E_x sarà espresso in termini di errore massimo ammesso:

$$|E_x^*| \approx |E_{xm}|$$

www.ingonline.biz

Si ha, allora:

$$|E_x^*| = \left| \frac{\partial f}{\partial a} \left(\pm |E_a^*| \right) + \dots + \frac{\partial f}{\partial n} \left(\pm |E_n^*| \right) \right|$$

$$= \left| \frac{\partial f}{\partial a} |E_a^*| + \dots + \frac{\partial f}{\partial n} |E_n^*| \right|$$

$|E_i^*|$ è sicuramente una maggiorazione dell'errore assoluto reale $|E_i| < |E_i^*|$; pertanto diventerà una fase di, entrata nella misura x_m entro cui il valore effettivo della grandezza risulta più alto contenuto. Abbiamo in tal modo effettuato una valutazione pessimistica dell'errore con cui è usata la misura di x , tanto più pessimistica quanto più tale misura è complessa. Infatti si tratta gli errori conosciuti hanno segni tali da compensarsi in parte, per cui nella (1) compariamo termini con segno diverso. In questo modo il risultato è più alto peraltro; tuttavia ci si riflette nell'accuratezza della misura.

Dunque, nel caso di moltiplicazioni (divisioni), nelle misure indirette gli errori, relativi si sommano. (sottopongo)

13. FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

$$1) \quad x = \cos a \quad E_x = -\sin a \cdot E_a \quad e_x = \frac{E_x}{x} = -\frac{\sin a}{\cos a} E_a = -\tan a E_a$$

es.: Sia: $a = 85^\circ \rightarrow \tan a = 11$; $E_a = \pm 0.1^\circ$, allora $e_x \approx \pm 11 \cdot 0.002 \text{ rad} \approx 2$
 $e_x \approx 1\%$

La qualità della misura, per valori di a nell'intervallo di 90° , viene dunque a peggiorare anche di molti ordini di grandezza, portando spesso ad approssimazioni inaccettabili.

$$2) \quad x = \sin a \quad E_x = \cos a \cdot E_a \quad e_x = \frac{E_x}{x} = \frac{\cos a}{\sin a} E_a = \frac{1}{\tan a} E_a$$

Se hanno gli stessi problemi del caso precedente per valori di a prossimi a 0° .
 Dunque, laddove una misura è critica, l'altra è buona, e viceversa.

Nell'effettuare le misure conviene sfruttare appieno tutte le semplificazioni possibili in campo teorico, e solo necessariamente sostituire i valori rilevanti.
 Se ad esempio abbiamo:

$$e_x = 2e_a - 1e_a = e_a$$

questa sottrazione, del tutto legata a questa formula, non è effettuabile se siamo già passati ai valori numerici degli errori:

$$\pm e_x = \pm 2e_a \pm 1e_a = \pm 3e_a \quad \text{ERRATO}$$

Occorre dunque ricordare che di solito non si conoscono gli errori relativi: $e_x = \frac{E_x}{x}$, bensì le incertezze percentuali: $\bar{e}_x = \frac{E_x}{H}$.

Ad esempio, nella misura di una costante: $R = \frac{V}{I}$, se fossero noti gli errori relativi e_v ed e_i :

$$e_v = \frac{E_v}{H_v} = 0.01$$

www.ingonline.biz

$$e_i = \frac{E_i}{H_i} = 0.01$$

risulterebbe:

$$e_R = e_v - e_i = 0$$

Se invece si conoscano, come accade in genere, solo le incertezze relative:

$$\bar{e}_v = \pm \frac{E_v}{H_v} = \pm 0.01$$

$$\bar{e}_i = \pm \frac{E_i}{H_i} = \pm 0.01$$

si ha:

$$\bar{e}_R = \pm 0.01 \pm 0.01 = \pm 0.02$$

Es. 1:

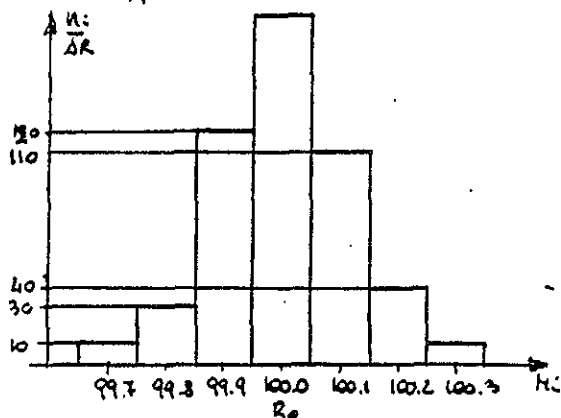
Supponiamo di aver eseguito $N = 50$ misure. L'esperienza consiglia di scegliere un numero n di classi pari a:

$$n \approx \sqrt{N}$$

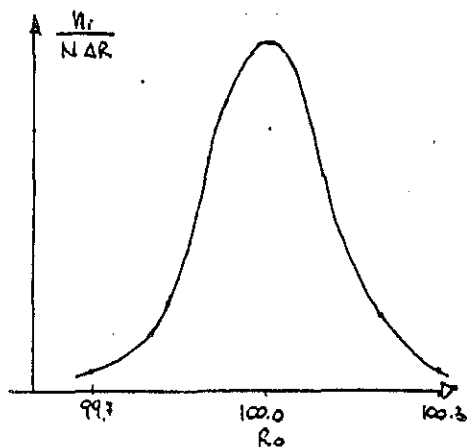
In questo caso avremo dunque $n = 7$. Supponiamo che tutte le misure eseguite siano comprese nell'intervallo $(99.7, 100.3)$; l'ampiezza delle classi R_i sarà allora: $\Delta R = 0.1$. Si può costruire una tabella del tipo:

R_i	n_i	$\frac{n_i}{\Delta R}$	$\frac{n_i}{N} \cdot 100$	$\frac{n_i}{N \Delta R}$
99.7	1	10	2	0.2
99.8	3	30	6	0.6
99.9	12	120	24	2.4
100.0	18	180	36	3.6
100.1	11	110	22	2.2
100.2	4	40	8	0.8
100.3	1	10	2	0.2

e quindi disegnare il relativo istogramma; in generale si preferisce porre in ordinata il rapporto $\frac{n_i}{\Delta R}$; N ha:



Da questo istogramma si può desumere una curva normalizzata, avente cioè, in ordinata, i termini dell'ultima colonna:



Da entrambi i diagrammi è possibile individuare un valore centrale delle misure, costituito dal valore centrale della misura a frequenza più elevata, R_0 . Si può dimostrare che R_0 è prossimo alla media aritmetica delle misure, o VALORE MEDIO, $\bar{R}$:

$$R_0 \cong \bar{R} = \sum_{i=1}^N \frac{R_i}{N}$$

www.ingonline.biz

Il valore medio viene assunto come rappresentazione più probabile del valore vero, sconosciuto. Definiamo:

- SCOSTAMENTO DI UNA MISURA DA $\bar{R}$ la differenza:

$$d_i = R_i - \bar{R} \quad (\text{grandezza algebrica})$$

- SCOSTAMENTO MEDIO O DERIVAZIONE MEDIA, d_m :

$$d_m = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{|d_i|^2}{N}}$$

la media aritmetica degli scostamenti delle singole misure. Questo parametro in realtà non rientra in nessuna analisi statistica; molto probabilmente,

Se l'istogramma delle nostre misure assomiglia a quello della distribuzione gaussiana è possibile una interpretazione del tipo:

$$R = R_0 \pm 2\sigma \quad p = 0.95$$

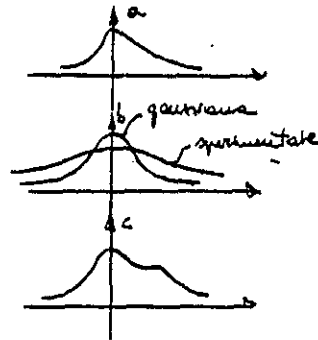
spesso poi si confonde R_0 con $\bar{R}$:

$$R = \bar{R} \pm 2\sigma \quad p = 0.95$$

Per mezzo di misure ripetute, una volta che si siano eliminati gli errori grossolani e quelli sistematici, è possibile eseguire una stima degli errori casuali.

In generale Tra la curva degli spostamenti dal valore medio e quella della distribuzione di Gauss vi saranno delle differenze, le quali saranno essenzialmente riconducibili a 3 tipi:

- asimmetria della curva sperimentale
- appiattimento rispetto alla distribuzione normale
- eventuali cusceli



Queste differenze nascono dovute al fatto che il numero di misure ripetute è limitato, anche alla presenza dell'errore sistematico, non rigorosamente costante, bensì dipendente da alcune grandezze dette grandezze di influenza; in ogni caso, il numero degli effettivi appartenenti alle classi comprese nell'intervallo:

$$(\bar{R} - 2\sigma) \div (\bar{R} + 2\sigma)$$

è circa il 95% del totale in quasi tutti i casi.

1.7 GRANDEZZE DI INFLUENZA

Supponiamo ora di aver eseguito N misure: $M_1, \dots, M_N$ e che da un confronto tra esse si trovi che, per un certo i e un certo j , risulta:

$$|M_i - M_j| > 2|E_x| \quad , \quad E_x = \text{errore sistematico}$$

In tal caso è evidente che il valore di V_{vero} è più univoco, bensì variabile, nel tempo, per cui si ha:

$$M_i = V_i + E_i$$

⋮

$$M_k = V_k + E_k$$

⋮

$$M_N = V_N + E_N$$

www.ingonline.biz

Il valore vero della funzione, dunque, cambia in maniera sensibile, essendo funzione delle grandezze di influenza - o interferenti - $I_1, \dots, I_n$:

$$V = f(I_1, \dots, I_n)$$

Esempi di grandezze di influenza sono la temperatura per le resistenze la frequenza per le reattanze.

Cherchiamo ora un istante il concetto di tolleranza; un elemento passivo, quale un resistore, è individuato nel modo seguente:

R_n - valore nominale

tolleranza % - ad es. 5%

EX.:

Un resistore aventi le caratteristiche:

$$R_n = 1 \text{ K}\Omega$$

tolleranza % = 5%

è garantito per avere, entro un range di temperatura prefissato, resistenza compresa tra:

$$1.05 \text{ K}\Omega = 1 \text{ K}\Omega + 1 \cdot 0.05 \text{ K}\Omega \geq R_n \geq 1 \text{ K}\Omega - 1 \cdot 0.05 \text{ K}\Omega = 0.95 \text{ K}\Omega$$

oltre al range di temperatura si specifica anche la potenza massima dissipata entro cui sono validi i dati forniti:

$$T_m \leq T \leq T_H$$

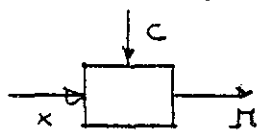
$$P < P_n = R_n I_n^2$$

Nel caso non si conosca la legge che legghi T alle grandezze di influenza non è possibile effettuare la correlazione delle misure e la nostra grandezza va correlata con più valori - cioè con una caratteristica -.

1.8. METODI DI MISURA

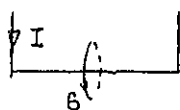
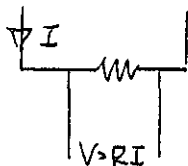
Abbiamo già affermato che misurare una grandezza significa confrontarla con una grandezza di riferimento C - campione - il cui valore rispetto all'unità di misura sia noto.

Lo schema logico di una misura è, in generale:



Esistono tuttavia diversi metodi di misura, distinti per il modo con cui effettuano il confronto e per il fatto di effettuare il confronto sulla base di differenti effetti di una grandezza.

Ad esempio, una corrente elettrica produce come effetto una caduta di tensione su una resistenza, così come un campo magnetico nella vicinanza del conduttore che attraversa.



www.ingonline.biz

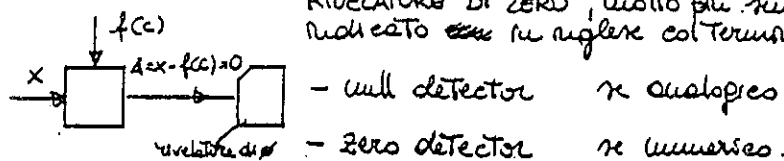
Al limite, per $\Delta=0$, l'accuratezza dello strumento non ha più alcun significato. I metodi in cui $\Delta=0$ si chiamano METODI DI ϕ e sono i più precisi che esistono; se C è modulabile è possibile far Δ da rendere:

$$\Delta = X - C = 0;$$

in tal caso è:

$$e_x = e_c$$

e non occorre più uno strumento indicatore bensì occorre un RIVELATORE DI ZERO, usato più semplice dell'indicatore, indicato con un'inglese col termine di:



Dal rivelatore di zero è interessante la sensibilità, cioè l'intervallo di valori della grandezza per i quali dà valore nullo. Ad esempio, se la sensibilità del rivelatore di zero è 2 mV esso indicherà come nullo una tensione di 1 mV.

Abbiamo detto che i metodi di ϕ sono molto accurati; tuttavia, ottenere una $f(c)$ variabile è molto laborioso; pertanto vi si ricorre solo in caso di necessità.

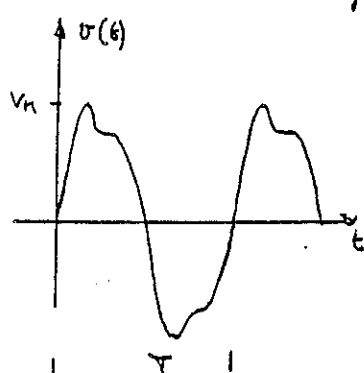
www.ingonline.biz

1.9. MISURE STATICHE - MISURE DINAMICHE

Le grandezze si suddividono solitamente in continue e discrete; consideriamo quelle continue: esse possono essere a loro volta suddivise in temporaneamente e temporaneamente.

Diciamo che una misura è statica se la grandezza misurata è temporaneamente; dinamica in caso contrario. Ad esempio, in d.c. una misura di corrente è una misura statica.

Se consideriamo una grandezza periodica vi saranno ancora dei parametri:



il cui valore non dipende da t ; le loro misure sono ancora misure statiche. Esempi di tali parametri sono:

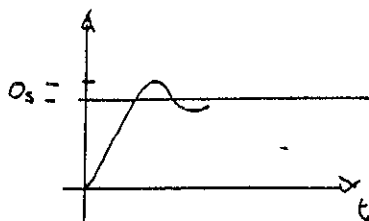
il valore di picco: $V_p = V_n$

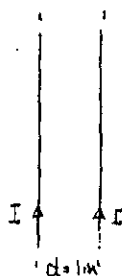
il valore medio: $V_m = \frac{1}{T} \int_{t-T}^T v(t) dt$

il valore efficace: $V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t-T}^T v^2(t) dt}$

Anche la registrazione della forma d'onda di un segnale periodico è una misura statica.

Le misure dinamiche, quali quelle di un overshoot, dipendono dal tempo e sono più difficili di quelle statiche; tuttavia le precisioni richieste sono inferiori.





$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ la permeabilità magnetica dell'aria.
una corrente ha intensità di 1 A e, preesistono due
conduttori paralleli indefiniti di distanza $d = 1 \text{ m}$ provoca tra
essi una forza di attrazione - o repulsione - specifica
per a:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}{2\pi \cdot 1} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

La postulazione di $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ è valida con
ottima approssimazione per l'aria in condizioni appor-
tune.

www.ingonline.biz

1.11. CONSERVAZIONE E CONFRONTO DI UNITÀ ELETTRICHE

I campioni delle grandezze elettriche hanno due distinti problemi:

- 1- impossibilità di conservare una grandezza fondamentale, l'ampere
- 2- la limitata accuratezza con cui è noto l'ampere: $\pm 10^{-5}$. Questa
perché la misura della corrente è realizzata ponendola in relazione
a grandezze meccaniche, note con accuratezza non soddisfacente.

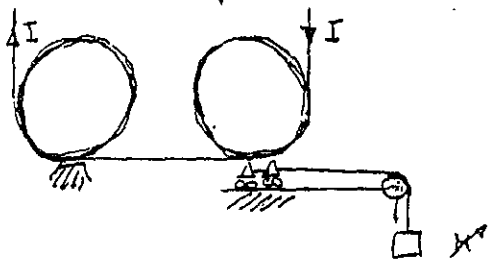
Per le misure elettriche si adottano in pratica due campioni di
misure elettriche derivate, entrambi conservabili:

- il resistore da 1 Ω - campione dell'unità di misura di resistenza
- la pila Weston - campione di ddp, avente $E_{\text{cell}} = 1.1078 \text{ V}$

Le caratteristiche di questi campioni sono riproducibili con un'accuratezza
di 10^{-7} ed hanno una stabilità nel tempo di $\pm 10^{-7}$.

Da questi due campioni di unità di misure elettriche di tipo conservabile
si possono conoscere tutte le altre unità di misura di tipo elettrico senza
effettuare misure meccaniche. Le misure di confronto tra grandezze
elettriche sono dunque facili e accurate con un'accuratezza di $\pm 10^{-7}$. Po-
nendole in relazione con grandezze meccaniche prevale l'errore nella misura
di queste, che è $\pm 10^{-5}$. È quindi evidente la convenienza che si ha nell'e-
vitare misure meccaniche.

Misure assolute: con esse si pone in relazione il campione elettrico di cor-
rente con una grandezza meccanica, attraverso un esente del tipo:



costituito da due bobine identiche, una
fissa ed una mobile.

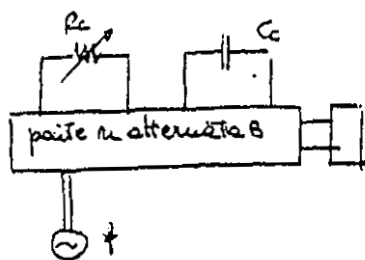
L'equilibrio del sistema è espresso dalla
relazione:

$$F_e = M'g$$

$$F_e = k(s, N, d, \mu) I^2$$

$$KI^2 = M'g$$

dove s è una non meglio definita superficie delle bobine, N il numero



Analogamente al caso precedente, si ottiene che:

$$R_c = g(C_c, \omega, a, b, c) \quad (K_2)$$

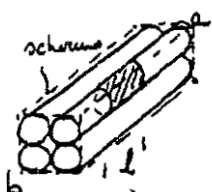
Supponendo che i parametri da cui dipende, g tendano unitario il valore di questa si ottiene, in corrispondenza, il valore di R_c che K_2 :

$$R_c = 1 = g(\bar{C}_c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}).$$

La differente unità di misura è dovuta al fatto che C_c è sempre molto piccolo e che, per una buona precisione della misura, conviene che R_c e $\frac{1}{C_c}$ abbiano lo stesso ordine di grandezza

www.ingonline.biz

Il campione di capacità calcolabile è stato messo a punto da Langford e consta di 4 cilindri conduttori isolati tra loro ed ognuno (v. fig. 2 lato). Una porzione di lunghezza l del conduttore a è isolata dal resto del cilindro. Si dimostra che la capacità di questa parte di a conta vale:

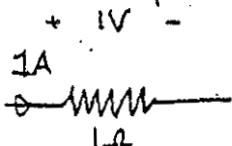


$$C = \left(\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\pi} \ln 2 \right) l$$

ed è indipendente da tutte le grandezze geometriche del sistema tranne l . Anche gli

errori dovuti ad effetti di bordo sono molto ridotti.

Abbiamo dunque ottenuto il campione assoluto di resistenza; esso, attraversato da una corrente di 1A, sarà sottoposto ad una d.d.p. di 1V.



tuttavia, vista la comodità del campione di corrente, si preferisce adottare un campione di d.d.p. convenevole, costituito dalla pila Weston. Confrontata col campione assoluto di d.d.p. appena menzionato: $V = R_c I = 1 \cdot 1 = 1V$ si trova, con $\pm$ errore rappresentativa, il valore della fem

della pila Weston:

$$E_c = K \cdot 1V \quad K \text{ poco maggiore di } 1.$$

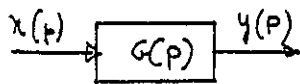
Dunque, per le grandezze elettriche abbiamo determinato i due campioni assoluti e conservabili R_c, E_c . La loro stabilità: $\pm 10^{-4}$, ci consente di evitare per lunghi periodi la determinazione del campione assoluto di intensità di corrente.

I campioni R_c, E_c - campioni primari delle grandezze elettriche - sono costruiti e conservati dai laboratori metrologici nazionali - per l'Italia l'Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris di Torino - presenti in tutti i paesi sviluppati. Essi hanno ottenuto il compito di realizzare dei campioni fissati di questi, da inviare al Bureau International dei pesi e delle misure, a Sèvres, in Francia. Ogni tre anni, qui, vengono confrontati tra loro i campioni delle varie nazioni (conservati in opportune condizioni di temperatura e pressione). La media dei campioni legati nazionali costituisce il campione legale internazionale:

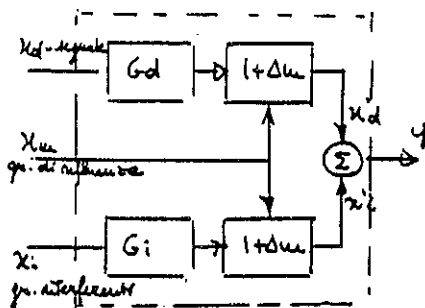
$$\bar{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_{n,i} = R_{leg, int}$$

Esso è la rappresentazione più probabile del valore vero della grandezza

Se la misura è, eseguita da un sistema lineare e non temporaneamente, il blocco che effettua la misura può essere modellato con la sua funzione di Trasferimento $G(p)$:



In realtà questo modello non è perfettamente aderente alla realtà; si dovrebbe adottare un modello che tiene conto dei disturbi provocati dalle grandezze interferenti - che possono riflettersi nella y con una funzione di Trasferimento diversa da quella propria - e dell'effetto delle grandezze di influenza su entrambe le funzioni di trasferimento. Si ottiene il modello:



Se x_d e i disturbi sono sovrapposti risulta, chiaramente: $G_d = G_i$.

www.ingonline.biz

$$y = x_d + x_i$$

$$x_d = (G_d + \Delta u G_d) x_d$$

$$x_i = (G_i + \Delta u G_i) x_i$$

Abbiamo però detto che la 1ª rappresentazione della misura non tiene conto degli effetti di disturbi e delle grandezze di influenza che quindi introduce degli errori; tuttavia, appunto per la sua semplicità, è la più usata.

Consideriamo il caso che l'ingresso sia di tipo sinusoidale (misura statica):
 $p = j\omega$, $\omega = 2\pi f$; si ottiene il blocco:



con: $G(j\omega) = G(\omega) e^{j\phi(\omega)}$, $G(\omega) = \frac{Y}{X}$,
 $\phi(\omega) = \hat{y} - \hat{x}$

In questo caso rientra anche l'eventualità di un segnale continuo: $f=0$, $j\omega=0$.

Dato un segnale periodico qualsiasi sarà dunque possibile svilupparlo in serie di Fourier ed applicare il principio di sovrapposizione degli effetti alle funzioni componenti, ottenendo ancora una misura statica.

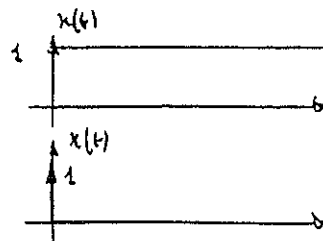
In condizioni dinamiche, cioè non periodiche oppure in presenza di transitori è necessario invece operare nel dominio di Laplace; facendo riferimento allo schema semplificato, si

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} [G(p) X(p)]$$

In particolare, nel caso che:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} [G(p) \frac{1}{p}] = h(t)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} [G(p)] = h'(t)$$



Se gli e_i sono ^{non} tutti n e n ha una loro parziale compensazione. In realtà, come sappiamo, questa è un'assunzione che si verifica molto raramente; di solito si compensano solo le incertezze relative:

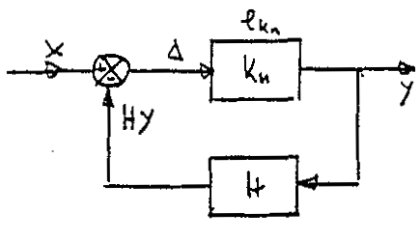
$$\bar{e}_i = \pm \frac{E_i}{K n_i}$$

In tal caso si ottiene:

$$e_K = \pm \sum_{i=1}^n \bar{e}_i$$

1.42 CATENA CHIUSA

Supponiamo che nella serie sia presente uno stadio di qualità molto più elevata degli altri. Evidentemente la qualità dell'intera misura sarà dello stesso ordine di grandezza di quella dello stadio suddetto, con tutte le conseguenti implicazioni che ne derivano. È per questo che spesso si adotta una CATENA DI MISURA CHIUSA - o a retroazione negativa - del tipo:



in cui il nodo delle differenze rappresenta una differenza effettiva tra X e $H Y$; in altri termini sarà con segno meno nell'espresso di $H Y$ se $H > 0$; con segno positivo in caso contrario:

$$\Delta = X - |H| Y$$

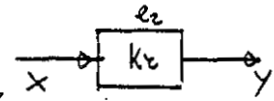
Per avere risultati vantaggiosi occorre che lo stadio H sia di qualità elevata, per i motivi che ora vedremo; osserviamo che risulta:

$$Y = K \Delta, \quad \Delta = X - H Y$$

da cui:

$$Y = K (X - H Y) = K X - K H Y$$
$$Y (1 + H K) = K X$$

www.ingonline.biz



Il fattore di conversione risultante K_r - vedi figura a lato - è dunque dato da:

$$K_r = \frac{Y}{X} = \frac{K}{1 + H K} = \frac{1}{H + \frac{1}{K}}$$

L'errore risultante ^{in K_r} è dato da:

$$e_r = - \left(e_n \frac{H}{H + \frac{1}{K}} - e_K \frac{\frac{1}{K}}{H + \frac{1}{K}} \right) =$$
$$= - \left(e_n \frac{H K}{1 + H K} - e_K \frac{1}{1 + H K} \right)$$

Questa catena è intrinsecamente vantaggiosa e risulta: $\frac{H K}{1 + H K} \sim 1, \quad \frac{1}{1 + H K} \ll 1$

Se si deduce che, se $H K \gg 1$ l'influenza ^{negativa} di e_K sulla qualità della misura è ridotta.

1.15 SISTEMI LINEARI DEL 1° E 2° ORDINE (cont.)

Sono utili perché molti dispositivi di misura - termometri, termistori, etc - sono modellabili con funzioni di trasferimento del 1° e 2° ordine.

Per lo studio di questi sistemi conviene riferirsi ad una funzione di trasferimento ridotta, $g(p)$, data da:

o normalizzata $g(p) = \frac{G(p)}{G_0}$,

$G(p)$ numero puro

$$G(p) \Big|_{p=0} = G(0) = \frac{1}{G_0}$$

dove G_0 - costante di divisione - è un termine della parte denominatore di $G(p)$.
La funzione di trasferimento ridotta ha dunque il vantaggio di essere adimensionale. Di solito si assume: $g(0) = 1$, ovvero: $G_0 = G(0)$; in tal caso, per sistemi del 1° ordine, $g(p)$ ha la forma:

$$(1) \quad g(p) = \frac{1}{1 + pT}$$

$T = \text{costante di tempo}$ ($T = R_3 C_3$ in un circuito R-C)
 $x = v(t) \uparrow \quad y = v(t)$

e, per sistemi del 2° ordine:

$$(2) \quad g(p) = \frac{1}{1 + 2\frac{\zeta}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\frac{1}{pC}}{\frac{1}{pC} + R} = \frac{1}{1 + pRC} = \frac{1}{1 + pT}$$

($\mu \rightarrow \omega_0$, $\zeta \rightarrow \xi$ - GTC)

1.15.1 SISTEMI DEL 1° ORDINE.

www.ingonline.biz

Poniamo: $p = j\omega$; dalla (1) si evince che:

$$g(j\omega) = 1 \quad \text{per } \omega = 0$$

$$g(j\omega) \rightarrow 0 \quad \text{per } \omega \rightarrow \infty$$

Esempi di sistemi del 1° ordine sono i termometri ed i sistemi RC; esaminiamo un sistema di quest'ultimo tipo (grazie); si ha:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{1 + pRC} = \frac{1}{1 + pT} = g(p), \quad T = RC$$

In questo caso è: $G_0 = G(0) = 1$, quindi $G(p)$ e $g(p)$ hanno lo stesso valore numerico. Questo è un tipico esempio di sistema a 1 polo, definito dal fattore di scala $G(0)$ e dalla costante di tempo T .

Poniamo $p = j\omega$; si ha:

$$g(j\omega) = g(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

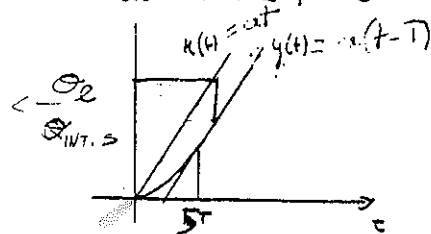
Analizzeremo separatamente gli andamenti di $g(\omega)$ e $\varphi(\omega)$.

Se $t \geq 5T$ si ha: $y = a(t-T)$, cioè la risposta è la stessa rampa dell'ingresso ritardata di T . Questa caratteristica vale sempre, e ripete, per i sistemi del 1° ordine, che sono quindi chiamati anche "sistemi a semplice ritardo".

$\Theta_{INT.S} = \Theta$ di intervento istantanea

$$T = 2\theta \quad \Theta_2 = \Theta_{INT.S} + aT$$

limite



SISTEMI DEL 2° ORDINE

Abbiamo una fdt ridotta del tipo della (2):

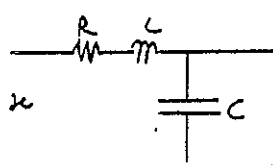
$$g(p) = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{p}{\mu} + \left(\frac{p}{\mu}\right)^2}$$

avente la costante di tempo generalizzata:

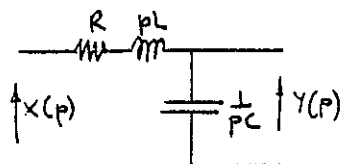
$$T_0 = -g'(0) = + 2\zeta/\mu \quad (1)$$

Es.: -

Un classico sistema del 2° ordine è un circuito RLC serie:



che, Trasformato, dà:



www.ingonline.biz

per esso risulta:

$$\mu = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Nel caso di un ingresso sinusoidale: $p = j\omega$ la fdt ridotta assume la forma:

$$g(j\omega) = \frac{1}{1 + j 2\zeta \frac{\omega}{\mu} - \left(\frac{\omega}{\mu}\right)^2} = \frac{1}{1 - \nu^2 + j 2\zeta \nu} \quad , \text{dove si è posto: } \nu = \frac{\omega}{\mu}$$

Il suo modulo è:

$$|g(j\omega)| = g(\omega) = g(\nu) = \frac{1}{\sqrt{(1-\nu^2)^2 + 4\zeta^2 \nu^2}} = \frac{1}{\sqrt{\nu^4 + 2(2\zeta^2-1)\nu^2 + 1}}$$

ne vogliamo tracciare l'andamento in funzione di ν ; distinguiamo: 3

$$(1) \text{ Risultato: } g(p) = \frac{\frac{2\zeta^2}{\mu} + \frac{p^2}{\mu}}{\left(1 + 2\zeta \frac{p}{\mu} + \left(\frac{p}{\mu}\right)^2\right)^2} \quad , \text{ da cui, per } p=0: \quad g'(0) = - \frac{2\zeta}{\mu}$$

La costante di tempo generalizzata è definita per sistemi di qualsiasi ordine, a patto che la loro fdt ridotta contenga il termine noto al denominatore. Allora, per $p \rightarrow 0$ i termini di ordine superiore possono essere trascurati rispetto a quello in p ed il sistema si comporta come se fosse del primo ordine, con costante tempo il coefficiente di p .

la fase di $g(j\omega)$ è invece espressa da:

$$\varphi(\nu) = -\arctan \frac{2\varepsilon\nu}{1-\nu^2}$$

i cui diagrammi, per differenti valori di ε , sono riportati nel grafico sottostante; osserviamo che per:

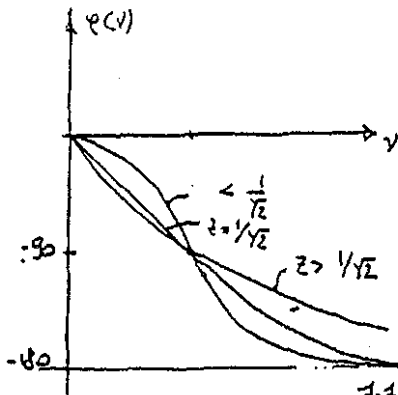
$$\frac{2\varepsilon\nu}{1-\nu^2} \leq 0.1$$

$$\text{si ha: } \varphi(\nu) \approx -\frac{2\varepsilon\nu}{1-\nu^2} ;$$

per

$$\nu^2 \ll 1$$

$$\text{si ha: } \varphi(\nu) \approx -2\varepsilon\nu$$



1.15.3 CONDIZIONE DI RISPOSTA PRIVA DI DISTORSIONE.

Si domanderemo ora in quali condizioni un sistema trasferisce in uscita un segnale periodico nell'ingresso senza variazioni la forma d'onda. Sia:

$$x(t) = x(t-T) \quad , \quad T \text{ periodo dell'ingresso}$$

Il segnale in ingresso; si vuole che ne:

$$y(t) \equiv x(t-\Delta t)$$

si assumette cioè che il segnale in uscita abbia un certo ritardo Δt e ne moltiplicato per un fattore di scala costante

Es.:

www.ingonline.biz

Se, ad esempio, risulta:

$$x(t) = x_{H1} \sin(\omega t + \alpha_1) + x_{H3} \sin(3\omega t + \alpha_3)$$

dovremo supporre che ne:

$$y(t) = Y_{H1} \sin[\omega(t-\Delta t) + \alpha_1] + Y_{H3} \sin[3\omega(t-\Delta t) + \alpha_3] \equiv u_1(t-\Delta t) \quad \text{con: } \frac{Y_{H1}}{x_{H1}} = \frac{Y_{H3}}{x_{H3}} = \text{costante}$$

perché la relazione di proporzionalità ne valida dovremo supporre le due condizioni:

$$\text{- FEDeltA IN AMPIEZZA : } g(\nu) = \text{costante} \Rightarrow g(\nu) = g(0) = 1$$

$$\text{- FEDeltA NEL RITARDO : } \Delta t(\nu) = \text{costante} \Rightarrow -\frac{\omega \Delta t}{\omega} = +\frac{\varphi(\omega)}{\omega} = \text{costante}^{(1)} ; \quad \frac{\varphi(\nu)}{\nu} = \text{costante} \quad (\omega \propto \nu)$$

(1) - $\omega \Delta t = \varphi(\omega)$ - si vede dall'espressione di $y(t)$: più chiaro in Teor. dei segnali

Dunque si può ottenere che la risposta in fase sia fedele e risulta:

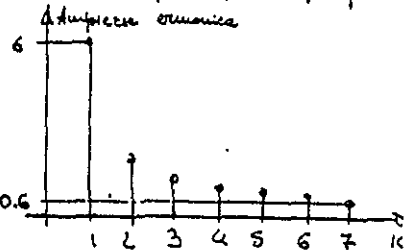
$$0 \leq \gamma \leq \gamma_1 = 0.142$$

L'errore che si commette con questa approssimazione si trova essere dell'ordine di 10^{-2} .

Consideriamo ora un segnale periodico di frequenza 1000 Hz con banda limitata a 7000 Hz (cioè si suppongono trascurabili le armoniche di ordine superiore alle 7^a). Sia $f_0 = 10$ KHz. Si può considerare la risposta del segnale fedele in ampiezza ed in fase per frequenze inferiori, rispettivamente, e:

Fedeltà di ampiezza: $f \leq f_1 = 0.38 \cdot 10^4 = 3800$ Hz

Fedeltà di fase: $f \leq f_2 = 0.41 \cdot 10^4 = 4100$ Hz



La risposta complessiva del sistema può dunque essere ritenuta fedele per frequenze inferiori a circa 3800 Hz. Supponiamo, tuttavia, che il nostro segnale abbia uno spettro tipico, come quello riportato in figura; si vede che non è giusto pretendere di commettere lo stesso errore in tutte le armoniche. Le frequenze più elevate hanno infatti ampiezze minori. L'errore complessivo nel segnale è lo stesso se, ad esempio, è $e_1 = 100 e_2$; si può dunque approssimare la risposta del sistema come fedele anche se la banda del segnale in ingresso è estesa oltre γ_1 . L'errore relativo commesso è infatti proporzionale all'intensità x_i dell'armonica considerata.

$$e_x = e_{x1} \frac{x_1}{x_1 + \dots + x_7} + \dots + e_{x7} \frac{x_7}{x_1 + \dots + x_7}$$

www.ingonline.biz

1.16 MISURE DINAMICHE: STUDIO DELLA RISPOSTA TRANSITORIA DI UN SISTEMA DEL 2° ORDINE

Determiniamo la risposta di un sistema del 2° ordine ad una sollecitazione a gradino unitario e ad una impulsiva unitaria.

1.16.1 PERTURBAZIONE A GRADINO UNITARIO.

Sia:

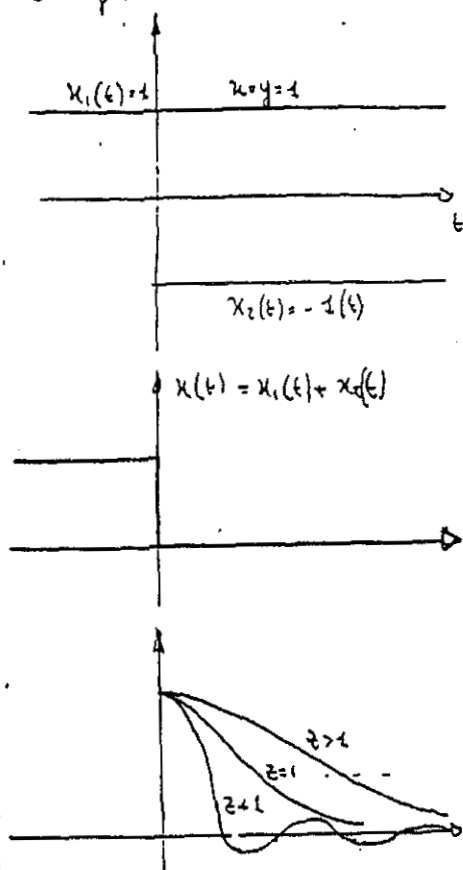
$$x(t) = 1(t) \quad \text{perturbazione applicata}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{P} g(P) \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{P} \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{P}{\mu} + \left(\frac{P}{\mu} \right)^2} \right]$$

I poli della funzione da trasformare sono:

$$\left. \begin{array}{l} P = 0 \\ P_1 = -\mu\zeta + \mu\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ P_2 = -\mu\zeta - \mu\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{caratteristiche della sollecitazione applicata.} \\ \text{caratteristiche di } g(P) \end{array}$$

Consideriamo ora il caso che il gradus unitario x annulli, quando la risposta è nulla a regime:



Si può studiare l'andamento della risposta in base al principio di sovrapposizione degli effetti, sommando ad $x_1(t) = 1$ un gradus unitario negativo applicato all'istante $t=0$; si ha, nelle ipotesi di $z > 1$

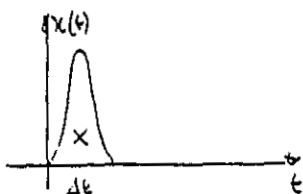
$$h^*(t) = 1 - h(t) = e^{-\mu z t} \left(\cosh h \frac{t}{\tau} + \mu z \tau' \sinh h \frac{t}{\tau} \right), \quad z > 1$$

Analogamente al caso precedente, a seconda del valore di z si ottengono 3 andamenti differenti:

www.ingonline.biz

1162-PERTURBAZIONE IMPULSIVA.

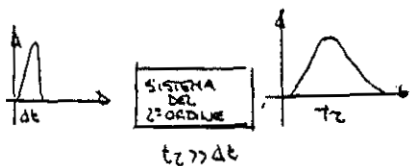
Supponiamo che in ingresso sia presente un impulso fisso, caratterizzato da un'area X ed una durata Δt :



$$X = \int_0^{\Delta t} x(t) dt$$

Se la durata della risposta è molto maggiore di Δt possiamo approssimare l'impulso fisso ad un impulso ideale:

$$x(t) = X \delta(t)$$



La $y(t)$ sarà allora approssimabile, per $X \neq 0$, con la risposta all'impulso unitario applicato all'istante $t=0$ e varrà:

$$h'(t) = \mathcal{L}^{-1}[y(p)] = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{1 + 2\tau \frac{p}{\mu} + \left(\frac{\tau}{\mu}\right)^2 p^2} \right)$$

(1) se questa ipotesi è verificata impulsi diversi, ma aventi stessa durata e - soprattutto - stessa area, possono essere ritenuti equivalenti.

Ricordiamo che $h'(t)$ è la risposta all'impulso esecolata attraverso la fdt ridotta; quella effettiva risulterà:

$$y(t) = X \cdot G_0 h'(t) \quad - \text{risposta ad un impulso reale di area } X \text{ applicato all'istante } t.$$

MISURE BALISTICHE DELL'AREA DI UN IMPULSO.

Consideriamo il 1° momento della risposta di un sistema del 2° ordine ad una sollecitazione impulsiva:

$$y_H = y(t_H) = X G_0 h'(t_H),$$

con $h'(t_H) = f(\mu, z)$

μ è una caratteristica intrinseca del sistema ed è quindi costante; è dipendente, invece, dalle condizioni di misura; diviene costante una volta che queste condizioni siano state fissate, per cui risulta:

$$h'(t_H) = K(z) = \text{costante},$$

da cui:

www.ingonline.biz

$$y_H = X G_0 K(z)$$

A questo punto possiamo eseguire la misura balistica, consistente di due tempi:

1) Fase di calibrazione: si misura un impulso noto, misurando il corrispondente valore massimo di y : y_{Hc} :

$$y_{Hc} = X_c G_0 K(z)$$

da questa relazione si può ricavare $K(z)$

2) Misura vera e propria: si misura l'impulso da misurare; il primo massimo di y verrà:

$$y_H = X G_0 K(z)$$

sostituendo il valore ricavato per $K(z)$ si ottiene:

$$y_H = X \cancel{G_0} \frac{y_{Hc}}{X_c \cancel{G_0}}$$

da cui posso ricavare l'area dell'impulso X :

$$X = \frac{y_H}{y_{Hc}} X_c$$

- FONDO SCALA (full scale) o portata: è, per gli strumenti a deviazione (analogici), l'estremo superiore della scala. Per gli strumenti numerici è invece un valore nominale, base di riferimento, utile per i calcoli di errore.

Ad esempio, per uno strumento numerico può risultare:

$$\left. \begin{array}{l} V_{FS} = 10V \\ \text{(misura)} \quad V = 19V \end{array} \right\} \text{N ha cioè un over-range pari a: } \frac{V_{OR} - V_{FS}}{V_{FS}} \cdot 100 = 90\%$$

E' così può essere possibile effettuare una misura superiore al valore di fondo scala, pur rimanendo nella classe di accuratezza specificata - circostanza irrealizzabile con uno strumento a deviazione.

- COSTANTE STRUMENTALE K . E' tipica degli strumenti elettronici a deviazione per i quali risulta: $\lambda \approx x$, dove con λ si indica la deviazione dell'indice dello strumento. K è la costante di proporzionalità che lega λ ad x :

$$x = K\lambda$$

dei valori di fondo scala: λ_{FS} , x_{FS} si può ricavare K con facilità:

$$K = \frac{x_{FS}}{\lambda_{FS}}$$

Per un voltmetro, se λ è espressa in mm, le dimensioni di K sono:

$$[K] = V/mm$$

In generale λ è espressa in divisioni (adimensionali), per cui risulta: $[K] = V$.

- SENSIBILITA' σ è una specificazione propria non degli indicatori, bensì dei rivelatori di zero; è espressa da:

$$\sigma = \Delta\lambda / \Delta x, \quad \lambda = f(x) \quad (\text{caso generale})$$

o anche:

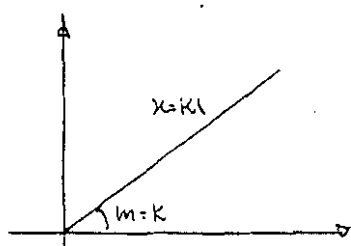
$$\sigma = d\lambda/dx \quad \text{www.ingonline.biz}$$

Per un rivelatore di ϕ di tensione, a seconda che λ sia espressa in mm o in divisioni, risulta:

$$[\sigma] = mm \cdot V^{-1}, \quad \text{oppure: } [\sigma] = V^{-1}$$

Se σ non è costante su tutta la scala dello strumento⁽¹⁾ - cioè se non risulta: $\lambda \approx x$ - il x valore va calcolato in un intorno dello zero

ex.: Consideriamo uno strumento a deviazione a scala lineare:



risulta:

$$\sigma = \frac{d\lambda}{dx} = \frac{d x/K}{dx} = \frac{1}{m} = \frac{1}{K}$$

⁽¹⁾ alcuni rivelatori di ϕ funzionano anche da misuratori; tutti hanno comunque una piccola scala per facilitare la ricerca dello zero

Si definisce classe di precisione di uno strumento, C :

$$C = \frac{\pm E^*}{X_2} 100 \quad , X_2 = F.S. = \text{fondo scala} : \text{quadrato di riferimento.}$$

Es.: Se, per un voltmetro, $\pm$: $C = 0.5$, $F.S. = 10V$, risulta: $E^* = \pm \frac{C \cdot X_2}{100} = \pm \frac{0.5}{100} \cdot 10 = \pm 0.05V$.

Per gli strumenti analogici esiste un numero di classi limitate:

$C = \pm 0.1\%$	} campioni commerciali (da laboratorio)
" 0.1	
" 0.5	} classe media da laboratorio
" 1	
" 1.5	} strumenti comuni da laboratorio
" 2.5	
" 5	
" 5	} strumenti da quadro.
" 5	

Es.: Se, calibrando uno strumento avente fondo scala pari a 100V si trova che $|E^*| \approx 0.6$, questo strumento appartiene alla classe $C = 1\%$.

L'errore assoluto ritratto, per gli strumenti numerici, è definito dalla formula binomica:

$$\pm E^* = \pm (a \cdot \text{lettura} + b \cdot F.S.)$$

Spesso espressa nella forma:

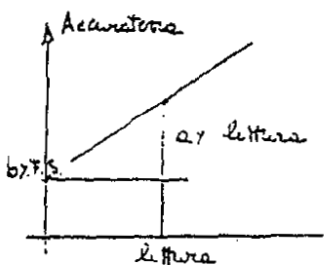
$$\pm E^* \cdot 100 = \pm (a\% \cdot \text{lettura} + b\% \cdot F.S.)$$

Esso è chiaramente un parametro che rappresenta numericamente l'accuratezza dello strumento; per questo è spesso chiamato proprio ACCURATEZZA.

L'incertezza relativa dello strumento risulta quindi:

$$\pm \gamma = \pm \frac{E^*}{\text{lettura}} 100 = \pm \left(a\% + b\% \cdot \frac{F.S.}{\text{lettura}} \right)$$

www.ingonline.biz



Di solito risulta $b < a$; tuttavia può risultare: $F.S. > \text{lettura}$ ed il ricambio Torinese può compromettere la qualità della misura, peggiorandola al di là dei valori accettabili.

Es.:

$F.S. = 10V$
 Lettura: $0.5V$
 $a\% = 0.1\%$
 $b\% = 0.05\%$

$$\approx a\% + b\% \cdot \frac{F.S.}{\text{lettura}} = (0.1 + 1)\% = 1.1\% \quad \text{la qualità della misura è peggiore di}$$

un ordine di grandezza rispetto alle migliori condizioni realizzabili.

In casi di questo genere conviene (così come accade per gli strumenti analogici) cambiare nella scelta una più opportuna - molti strumenti numerici esprimono questa questione automaticamente.

L'errore relativo di misura risulta, dunque:

$$e = \frac{E}{V} = - \frac{R_{AB}}{R_i + R_{AB}} \approx - \frac{R_{AB}}{R_i} \quad - \text{da questa si può vedere che si ha o meno trascurabile rispetto a quello commesso dallo strumento.}$$

Consideriamo ora il caso di corrente alternata; poniamo: $p = j\omega$; i valori efficaci di $V = V_{th}$ e V' sono legati dalla relazione:

$$V' = V_{th} \frac{|Z_i|}{|Z_{AB} + Z_i|}$$

per i voltmetri, nella banda di lavoro, risulta, praticamente: $Z_i = \text{costante} = R_i$; per cui si ha:

$$V' = V \frac{R_i}{(R_{AB} + R_i)^2 + X_{AB}^2} = V \frac{R_i}{R_{AB}^2 + R_i^2 + 2R_{AB}R_i + X_{AB}^2}$$

$$V' = V \frac{1}{1 + \left(\frac{R_{AB}}{R_i}\right)^2 + 2\frac{R_{AB}}{R_i} + \left(\frac{X_{AB}}{R_i}\right)^2}$$

Vogliamo a questo punto esprimere una stima dell'errore commesso; supponiamo:

$$\left(\frac{R_{AB}}{R_i}\right)^2 \ll 1$$

$$\left(\frac{X_{AB}}{R_i}\right)^2 \ll 1$$

- se così non fosse l'errore sistematico sarebbe non trascurabile e dovrebbe essere corretto sotto questa approssimazione si ha:

$$V' = V \frac{1}{1 + 2\frac{R_{AB}}{R_i}}$$

Ancora, supponendo: $2\frac{R_{AB}}{R_i} \ll 1$ è possibile sviluppare l'espressione al secondo membro in serie di Mac Laurin Troncata R_i al termine di primo grado; si ha:

$$V' \approx V \left(f(0) + f'(0) \cdot x \right) = V \left(f(0) + \frac{2R_{AB}}{R_i} f'(0) \right) = V \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2R_{AB}}{R_i} \right) = \left(1 - \frac{R_{AB}}{R_i} \right) V$$

L'errore sistematico può dunque essere stimato con:

$$E = V' - V = - \frac{R_{AB}}{R_i} V$$

e l'errore relativo con:

$$e = \frac{E}{V} = - \frac{R_{AB}}{R_i}$$

Queste stime sono quelle da utilizzare per le valutazioni già citate; si noti che sono le stesse ricavate per il caso di corrente continua.

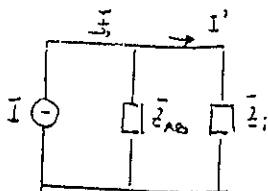
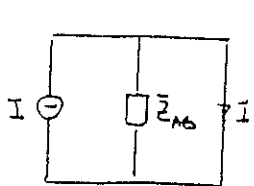
Riportiamo, a titolo esemplativo, un disegno già raccontato:



si vuol calcolare (e misurare):

$$E = I' - I \quad ; \quad C = -E \quad ; \quad e = \frac{E}{I} = \frac{I' - I}{I}$$

Consideriamo direttamente il caso di corrente alternata (di cui la d.c. è un caso particolare) si ha:



$$I' = I \frac{|Y_i|}{|Y_{AB} + Y_i|}$$

valori efficaci:

si prende $\Rightarrow Y_i = \frac{1}{Z_i}$ e viceversa

$$Y_{AB} = \frac{1}{Z_{AB}}$$

in cortocircuito

sotto un carico Z_i

L'errore sistematico è dato da:

$$E = I' - I = I \left(\frac{|Y_i|}{|Y_{AB} + Y_i|} - 1 \right)$$

errore relativo:

$$e = \frac{E}{I} = \frac{|Y_i|}{|Y_{AB} + Y_i|} - 1$$

www.ingonline.biz

In particolare, nel caso di $f=0$: d.c., si ha: $|Y_i| = G_i$, $Y_{AB} = 0$, $Z_i = 0$; risulta, pertanto:

$$e = \frac{G_i}{G_i + G_{AB}} - 1 = - \frac{G_{AB}}{G_i + G_{AB}}$$

Supponiamo $G_i \gg G_{AB}$ (e non è necessario mai altro effettuare una correzione della misura): si ha

$$e = - \frac{G_{AB}}{G_i} = - \frac{R_i}{R_{AB}}$$

Il caso di $\omega \neq 0$ è riportato negli appunti della lezione 11.

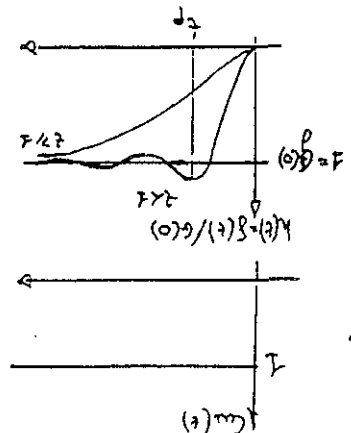
Lo strumento deve rispondere ad una coppia applicata
offerto al valore di equilibrio.

Se, ad esempio, $u(t)$ è un gradino: $u(t) = 1(t)$ applicato a $t = 0$, la risposta di
deriva, come sappiamo, da legge:

$$\delta(t) = G(s)h(t) = \frac{1}{s}h(t), \text{ con } h(t) = 1 - e^{-\lambda t} \left(\cos \frac{\omega}{\lambda} t + \mu \frac{\omega}{\lambda} t \right)$$

La risposta armonica. Tra le tante possibili, questa forma può
preferire che l'ordine superiore di derivata con un andamento a
superficie - in tal modo evitiamo di avere un periodo di
risposta che potrebbe essere per due risposte non oscillante - è preferito
costituiscono sempre strumenti con $\lambda \gg \omega$.

Il requisito dinamico: relazione ad uno strumento di misura con
dato:



$$) \quad \delta_n = 1 \cdot \frac{1}{100} \leq 30\%$$

$\delta_n = 1$: overshoot

$$2) \quad t_s \leq 4 \text{ ms} \quad : \quad \delta_p \text{ minimo} = 0.0075 \text{ G(s)}$$

Risultano le condizioni perché non verifichiamo la:

$$h'(t) = 0$$

$$\begin{aligned} & -\lambda t \left(\cos \frac{\omega}{\lambda} t + \mu \frac{\omega}{\lambda} t \right) e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} \mu \frac{\omega}{\lambda} t e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} \mu \frac{\omega}{\lambda} t e^{-\lambda t} = 0 \\ & \lambda^2 t^2 \left(\cos \frac{\omega}{\lambda} t + \frac{1}{\lambda} \mu \frac{\omega}{\lambda} t \right) = 0 \end{aligned}$$

Questa equazione ha come soluzioni:

$$t_p = 0 \quad \text{non accettabile}$$

$$\frac{t_p}{T} = \pi \quad : \quad t_p = \pi T - 1^\circ \text{ poco}$$

www.ingonline.biz

Il corrispondente valore di π è dato da:

$$\begin{aligned} h(t_p) &= 1 - e^{-\lambda t_p} \left(\cos \frac{\omega}{\lambda} t_p + \mu \frac{\omega}{\lambda} t_p \right) = 1 - e^{-\lambda t_p} (-1) = 0 \\ h(t_p) &= 1 + e^{-\lambda t_p} \end{aligned}$$

Valori tipici di f_0 sono: $f_0 = 1 \text{ Hz}$; ricordiamo che uno strumento indicatore con $f_0 = 1 \text{ Hz}$ non riproduce oscillazioni di frequenza superiore a $\sim 30 \text{ Hz}$.

2.4 STRUMENTI MAGNETOELETTRICI

Per gli strumenti magnetoelettrici abbiamo trovato⁽¹⁾ che risulta:

$$C_m = \Phi_0 i, \quad C_m = \text{coppia motrice};$$

pertanto, per un regime a regime: $i = I h(t)$, si ha:

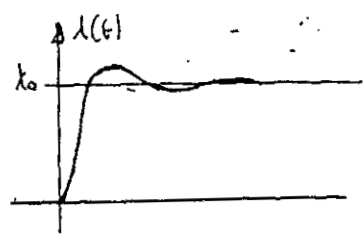
$$\delta(t) = G(0) C_m h(t) = \frac{1}{H} \Phi_0 I h(t), \quad G(0) = \frac{1}{H}$$

l'elaborazione dell'indice risulta, quindi:

$$\lambda(t) = L \delta(t) = \frac{L}{H} \Phi_0 I h(t)$$

per $t \gg t_s$ risulta:

$$\lambda = \lambda_0 = \frac{L}{H} \Phi_0 I$$



Quindi tra corrente e spostamento a regime dell'indice c'è un legame di proporzionalità:

$$I = K_A \lambda, \quad K_A = \frac{H}{L \Phi_0} \quad \text{www.ingonline.biz}$$

Perché risulta $C_m \propto I$; osservi fatti sull'una (misurabilità dell'indice alle oscillazioni) possono essere riportati pari pari all'altra; ad esempio, se lo strumento ha: $f_0 = 1 \text{ Hz}$ e la corrente ha un andamento del tipo:

$$i = I_0 + I_m \cos(\omega t + \alpha) = I_0 + I_m \cos(2\pi f t + \alpha), \quad f = 30 \text{ Hz}$$

lo strumento non riproduce le oscillazioni della corrente e risulta, a regime:

$$\lambda(t) = \lambda_0 = \frac{1}{K_A} I_0$$

(1) Delle oscillazioni dell'Ind. Maffei.

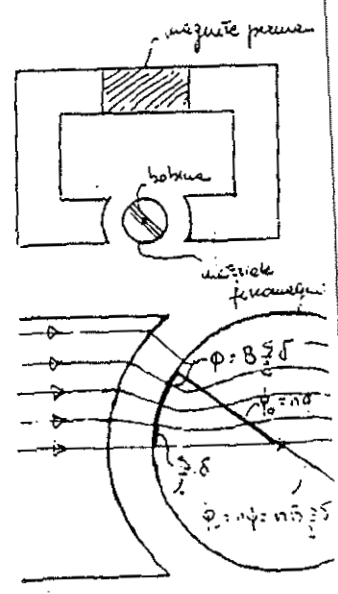
Nell'ipotesi di campo magnetico radiale il flusso concatenato con la bobina vale:

$$\Phi(s) = n B \cdot S \delta = \Phi_0 \delta, \quad \text{con } \Phi_0 = n B \cdot S - \text{costante di flusso}$$

La coppia motrice agente sulla bobina è la derivata dell'energia magnetica rispetto all'angolo di rotazione δ (eseguita, dunque, a i costante):

$$C_m = \left. \frac{\partial W_m}{\partial \delta} \right|_{i=\text{cost}} = \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{1}{2} L i^2 + \Phi(s) i \right) = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial \delta} + i \frac{\partial \Phi(s)}{\partial \delta}$$

$$C_m = i \frac{\partial \Phi_0 \delta}{\partial \delta} = \Phi_0 i$$



In genere, quindi, ogni spostamento dell'equipaggio mobile produce una coppia che si oppone al moto dello sterno, ed è data da (1):

$$C_{st}'' = \phi_0 \ddot{x} = - \frac{\phi_0^2}{R_T} \frac{dS}{dt} \equiv \frac{dS}{dt} \quad (2)$$

Esso introduce dunque uno smorzamento aggiuntivo nel sistema, il quale è quanto ad N $\times$ opposto un termine pari a $\frac{\phi_0^2}{R_T}$:

$$N = N_i + N_e = N_i + \frac{\phi_0^2}{R_T}$$

Lo smorzamento complessivo del sistema risulta, dunque:

$$Z = \frac{N_i}{2\gamma M} + \frac{N_e}{2\gamma M} = \frac{N_i}{2\gamma M} + \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma M} \frac{\phi_0^2}{R_T} = Z_i + Z_e$$

ed è quindi funzione della resistenza esterna nella quale viene immerso lo strumento. Lo smorzamento estrinseco Z_e risulta, quindi:

$$Z_e = \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma M} \frac{\phi_0^2}{R_T}$$

Definiamo ora SMORZAMENTO ESTRINSECO CRITICO il valore di Z_e che rende critico lo smorzamento complessivo del sistema, Z :

$$Z_c = 1 \quad ; \quad 1 = Z_i + Z_{ec}$$

$$Z_{ec} = 1 - Z_i$$

www.ingonline.biz

In corrispondenza R_T sarà detta: RESISTENZA TOTALE CRITICA: R_{Tc} e varrà:

$$R_{Tc} = (R_b + R_c) + R_{ec} \quad (3)$$

$\downarrow$
 componenti

(2) Il segno negativo indica che la coppia si oppone al moto dell'equipaggio mobile; nella formula (2) ϕ_0 va dunque sostituito a $C_i(t)$; è dunque evidente come C_{st}'' è correlata alla coppia a. - I.T.

(3) In definitiva, si ha:

$$R_e < R_{ec} \quad \text{risultare} \quad Z < 1$$

$$R_e > R_{ec} \quad \text{risultare} \quad Z > 1$$

2.4.2 REGISTRATORI SU CARTA

Registriamo, in funzione del tempo, l'andamento del valore istantaneo della grandezza conosciuta.

Si riferiscono a particolare di caso che sono collegati ad equipaggi poliarometrici. Se, ad esempio, risulta:

$$C = I_H \sin(\omega t + \alpha) \quad - \text{Mursolde}$$

e:

$$C_H = \Phi_0 i = \Phi_0 I_H \sin(\omega t + \alpha)$$

e lo spostamento del pennino è descritto nel tempo dalla legge:

$$\lambda = L \delta = L G(0) g(\omega) \Phi_0 I_H \sin(\omega t + \alpha) = L G(0) g(\omega) C_H \sin(\omega t + \alpha + \varphi(\omega)) \quad \Phi_0:$$

$C_H:$

$$\lambda = \left(\frac{L \Phi_0}{H} I_H g(\omega) \right) (\sin \omega t + \alpha + \varphi(\omega))$$

L'ampiezza delle oscillazioni non dipende da ω e $\varepsilon = g(\omega) = 1 = \text{costante}^{(1)}$.

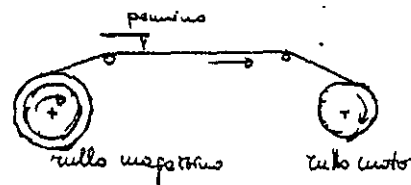
Se la velocità della carta è costante⁽¹⁾ il pennino traccerà una funzione anch'essa Mursolde, la cui lunghezza d'onda λ_c dipende da:

$$\lambda_c = f(v, v)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

v = velocità di scorrimento della carta.

La carta viene rotolata da un rullo detto rullo motore, e avrotolata su un rullo detto rullo uscente. A seconda della velocità di scorrimento si distinguono 3 principali categorie di strumenti:



$$1) v \sim \text{cm/h}$$

www.ingonline.biz

$$2) v \sim \text{cm/min}$$

$$3) v \sim \text{cm/sec}$$

Nei casi 1) e 2) lo strumento registra di grandezze lentamente variabili; nel caso 3) registra invece grandezze variabili rapidamente ed è detto oscillografo.

Gli strumenti di tipo 1) hanno l'indice che scorre sul foglio ad intervalli di tempo regolari e scrive meccanicamente l'andamento; quelli di tipo 2) hanno il pennino unito di un microscopio di velocità che invece riproduce una volta 10^3 per quelli di tipo 3) la scrittura avviene sulla carta con un fascio luminoso che viene fatto muovere da una striscia di carta fotografica: la traccia verrà poi evidenziata con una opportuna, meccanica, nuova esposizione alla luce.

(1) In questi strumenti si cerca di fare in modo che questa condizione sia verificata entro un range di pulsazioni il più ampio possibile; il valore ideale di ε è allora $\varepsilon = 0.7$, in quanto non risulta condizioni di risonanza né di rapida attenuazione al crescere di ω .

(2) I pennini arrivano a regimare frequenze da 100 a 200 Hz

(1) Attenuata meccanica: 1 - motore Mursolde

(cambio meccanico)

2 - controllo elettronico

(cambio elettronico)

Vedremo di quanto R_V deve essere maggiore di R_i : poiché il coefficiente termico complessivo d_V ha dello stesso ordine di grandezza di d_i .
La variazione termica di R_V è data da:

$$\Delta R_V = \Delta R_i + \Delta R_a = \alpha_{R_i} R_i \Delta T_i + \alpha_{R_{avg}} R_a \Delta T_a$$

Supponiamo che sia: $\Delta T_i = \Delta T_a = \Delta T$ - approssimazione molto valida: risulta, allora:

$$\Delta R_V = (\alpha_{R_i} R_i + \alpha_{R_{avg}} R_a) \Delta T$$

da cui:

$$d_V = \frac{1}{R_V} \frac{\Delta R_V}{\Delta T} = \alpha_{R_i} \frac{R_i}{R_V} + \alpha_{R_{avg}} \frac{R_a}{R_V}$$

In prima approssimazione possiamo ritenere $R_a \gg R_i$, quindi $R_a/R_V \sim 1$; $R_i/R_V \sim R_i/R_a$; si ha:

$$d_V = \alpha_{R_i} \frac{R_i}{R_V} + \alpha_{R_{avg}}$$

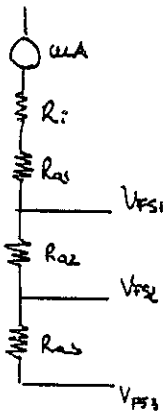
Perché sia: $d_V \sim \alpha_{R_{avg}}$ occorre che risulti:

$$\alpha_{R_i} \frac{R_i}{R_a} \approx \alpha_{R_{avg}} ;$$

www.ingonline.biz

$$\frac{R_a}{R_i} \approx \frac{\alpha_{R_i}}{\alpha_{R_{avg}}} \approx \frac{4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 200$$

Consideriamo il caso che il resistore abbia fondo scala selezionabile; determiniamo le resistenze da aggiungere a R_i per ottenere il fondoscala voluto (a I_{FS} volti).



Risulta:

$$R_{a1} = \frac{V_{FS1}}{I_{FS}} - R_i ;$$

e, in generale:

$$\sum_{j=1}^n R_{aj} = \frac{V_{FSn}}{I_{FS}} - R_i$$

shunt, aventi cioè una schema elettrico del tipo:

Risulta:

$$I_v = \frac{V}{R_v}$$

e tra I_v ed I intercorre la relazione di proporzionalità:

$$I = m I_v, \quad m = \frac{R_s + R_v}{R_s}$$

La cui m è detto potere moltiplicatore del derivatore resistivo, o shunt, R_s . Da queste due relazioni si ricava che:

$$I = \frac{m}{R_v} V$$

dunque $i = I \equiv V$, dunque la scala dello strumento può essere tarata direttamente in Amperes.

Per esasperare più range ad un amperometro si può adottare uno shunt variabile:

Risulterà ancora:

$$I_{fsi} = m_i \frac{V_{fs}}{R_v}$$

$$\text{con cui dato da: } m_1 = \frac{R_{s1} + R_{s2} + R_{s3} + R_v}{R_{s1}} = \frac{R_t}{R_{s1}}$$

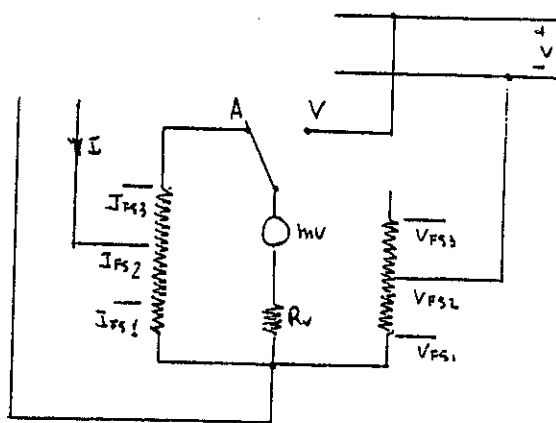
$$m_2 = \frac{R_t}{R_{s1} + R_{s2}}$$

$$m_3 = \frac{R_t}{R_{s1} + R_{s2} + R_{s3}} = \frac{R_t}{R_t - R_v}$$

$$R_t = R_{s1} + R_{s2} + R_{s3} (+ \dots) + R_v$$

Sono molto usati degli strumenti detti 'strumenti universali', in grado, cioè, di misurare le tensioni che corrente:

www.ingonline.biz



1) Valori tipici di V_{fs} per il millivoltmetro sono: 45-50-60-100 mV

Le bobine degli strumenti elettrodinamici non contengono nuclei ferromagnetici; essendo il flusso di B indotto al numero di ampere-spira della bobina fissa (il costante della bobina motore è piccolo):

$$AS_{\text{mot}} N_F I_F$$

ed essendo I_F un dato di progetto del sistema, allora, per ottenere un flusso abbastanza elevato da consentire il funzionamento dello strumento, occorre che il numero di spire N_F sia opportunamente elevato.

Osserviamo poi che risulta:

$$R_F \approx N_F^2$$

- resistenza proporzionale alla lunghezza del filo

$$L_F \approx N_F^2$$

$$L_F = \frac{N_F^2}{R}$$

Si ha dunque che le bobine fisse rappresentano un'impedenza pari a:

$$Z_F = \sqrt{R_F^2 + (\omega L_F)^2}$$

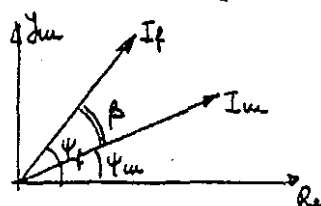
essendo con la frequenza e con il numero di spire che costituiscono l'avvolgimento.

2.5.1 FUNZIONAMENTO STATICO NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA.

Sia:

$$i_F = I_F \sin(\omega t + \varphi_F)$$

$$i_m = I_m \sin(\omega t + \varphi_m)$$



la coppia motrice risulta, allora:

$$C_m(t) = K i_F i_m = K I_F I_m \cos \beta - K I_F I_m \cos(2\omega t + \varphi_F + \varphi_m) \quad (1) \quad \beta = \varphi_F - \varphi_m$$

con:

$$I_F = \frac{I_{F0}}{\sqrt{2}} \quad I_m = \frac{I_{m0}}{\sqrt{2}}$$

www.ingonline.biz

Ponendo:

$$C_0 = K I_F I_m \cos \beta$$

$C_m(t)$ risulta dunque espressa da:

$$C_m(t) = C_0 - K I_F I_m \cos(2\omega t + \varphi_F + \varphi_m)$$

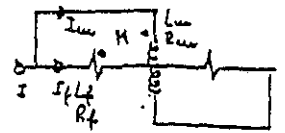
Si risulta: $\frac{2\omega}{\mu} \gg 30$, ovvero $f \gg 15 f_0$, a regime l'indice sarà praticamente fermo nella posizione:

$$\lambda(t) = \lambda_0 = L G(0) C_0 = \frac{L}{H} K I_F I_m$$

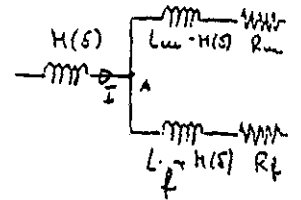
Un valore tipico di f_0 è: $f_0 = 1 \text{ Hz}$; in tal caso perché l'oscillazione dell'indice sia rappresentabile, è necessario che risulti: $f \gg 15 \text{ Hz}$.

(1) formula di Womersley

- Se lo strumento può misurare correnti superiori a 100 mA non si può misurare nella bobina mobile l'intera corrente da misurare; occorre adottare una configurazione del tipo riportato in figura:



Per la quale si può dimostrare la validità del circuito equivalente:



Dall'unicità della tensione esistente tra i punti A e B si ricava che:

$$(3) \quad R_m \left(1 + j\omega \frac{L_m - H}{R_m} \right) I_m = R_L \left(1 + j\omega \frac{L - H}{R_L} \right) I_f$$

Vogliamo fare in modo che la corrente si suddivida nei due rami in modo non dipendente dalla frequenza; per far ciò occorre che risulti:

$$\frac{L_m - H}{R_m} = \frac{L - H}{R_L} \cdot \gamma$$

Una equazione sappiamo, H è variabile, per cui non esiste una soluzione rigorosa in cui i valori delle L e delle R siano costanti. Se, però, ricordiamo che lo strumento lavora in prossimità dell'angolo $\delta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow H = 0$, possiamo ritenere che vale:

$$H(\delta) \ll L_f$$

$$\Rightarrow H \approx 0$$

$$H(\delta) \ll L_m$$

la condizione di indipendenza dalla ripartizione dalla frequenza diviene, allora:

$$(4) \quad \frac{L_m}{R_m} = \frac{L_f}{R_L}$$

In tal caso nella (3) si possono eliminare le espressioni tra parentesi, ottenendo che:

$$\frac{I_f}{I_m} = \frac{R_m}{R_L} = \alpha > 1$$

- la disuguaglianza deriva dalla realizzazione pratica dello strumento

www.ingonline.biz

Da questa relazione si deduce (per una proprietà delle proporzioni) che:

$$I_f \cdot \frac{R_m}{R_L + R_m} I = \frac{\alpha}{1 + \alpha} I$$

$$I_m = \frac{R_L}{R_L + R_m} I = \frac{1}{1 + \alpha} I$$

Se la (4) è soddisfatta otteniamo allora che la componente continua della coppia motrice risulta:

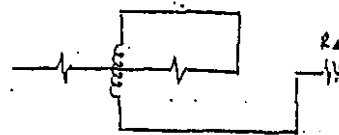
$$C_0 = k I_f I_m \cos \phi = k \frac{\alpha}{(1 + \alpha)^2} I^2 \cdot 1$$

2.5. VOLTMETRI ELETTRONICI

Sono realizzati con un amplificatore a basso rumore. In serie allo strumento è posta una opportuna resistenza R_a (vedi figura), per cui le caratteristiche essenziali dello strumento sono:

$$R_v = R_f + R_{in} + R_a, \quad R_a \gg R_f + R_{in}$$

$$L_v = L_f + L_{in} + 2H \approx L_f + L_{in}$$



Consideriamo una misura statica effettuata in condizioni di regime sinusoidale; si ha:

$$\dot{V} = \dot{Z}_v \dot{I}_v, \quad \dot{Z}_v = R + j\omega L;$$

$$V = Z I_v,$$

da cui:

$$I_v = \frac{V}{Z} = \frac{V}{R_v \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L_v}{R_v}\right)^2}}$$

la componente costante della coppia motrice risulta:

$$C_0 = K I^2 = \frac{K}{R_v^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega L_v}{R_v}\right)^2} V^2;$$

nella banda di frequenze in cui risulta: $\left(\frac{\omega L_v}{R_v}\right)^2 \ll 1$ C_0 non dipende da ω e si ha:

$$C_0 = \frac{K}{R_v^2} V^2;$$

se ω è tale che la deviazione dell'indice possa essere ritenuta costante, si ha:

$$\lambda(t) = \lambda_0 = L G(0) C_0 = \frac{L}{H} \frac{K}{R_v^2} V^2 \quad (1)$$

Valori tipici della tensione di fondoscala sono:

$$V_{FS} = 75, 150, 300 \text{ V}$$

www.ingonline.biz

Il valore V_{FS} non è mai inferiore a 75V, perché altrimenti R_v diventerebbe troppo piccola e la banda troppo stretta: $V_{FS} = R_v I_{FS} = R_v$; $\left(\frac{\omega L_v}{R_v}\right)^2 \ll 1 \Rightarrow \omega^2 \ll \frac{R_v^2}{L_v^2}$ (2)

(1) Valori tipici di L_v sono: $L_v = 100 \pm 300 \text{ mH}$.

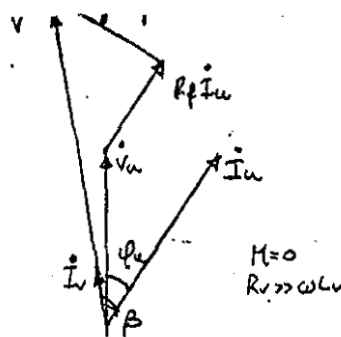
(2) Sempre a patto che risulti: $f < f_c$, come al solito.

63.

con l'aiuto del grafico riportato a lato; si ha:

$$G = K I_u \frac{V}{R_v} \cos \beta =$$

$$= \frac{K}{R_v} I_u V \cos \beta \quad (1)$$



ma è:

$$V \cos \beta = R_f I_u + V_u \cos \phi_u$$

da cui:

$$G = \frac{K}{R_v} I_u (V_u \cos \phi_u + R_f I_u) =$$

$$= \frac{K}{R_v} (P_u + R_f I_u^2)$$

ne cui:

$$P_u = V_u I_u \cos \phi_u \quad - \text{potenza attiva assorbita dal carico u}$$

$$I_u^2 R_f \quad - \text{potenza dissipata per effetto Joule nel circuito supplementare}$$

In definitiva risulta:

$$G = \frac{K}{R_v} P_i$$

$$P_i = P_u + R_f I_u^2$$

Sotto le solite condizioni l'indicazione dello strumento è pressoché costante e proporzionale alla potenza misurata P_i :

$$\lambda = L G(0) G = \frac{L}{H} \frac{K}{R_v} P_i \quad \lambda \approx P_i$$

La costante strumentale per un wattmetro inserito nel modo (2) risulta, dunque:

$$K_w = \frac{H}{L} \frac{R_v}{K} = \frac{P_i}{\lambda} \quad ; \quad [K_w] = \frac{W}{\text{divisione}}$$

Si ha, erci:

$$P_i = K_w \lambda$$

www.ingonline.biz

Possendo: $P_u \neq P_i$ abbiamo in realtà commesso un errore di calcolo, sistematico calcolabile, di valore pari a:

$$e_c = \frac{P_i - P_u}{P_u} = \frac{R_f I_u^2}{R_u I_u^2} = \frac{R_f}{R_u}$$

si vede quindi che e_c è piccolo se il carico presenta una elevata resistenza, dunque un basso assorbimento. Volendo correggere la misura occorre aggiungere:

$$C = -E = -R_f I_u^2$$

Tuttavia questa correzione è difficile da eseguire poiché R_f non è una specifica dello strumento e ne richiesta, varia con la temperatura.

(1) La sua espressione è la stessa anche nel caso continuo: d.c.

63. ERRORI DOVUTI ALLA PRESENZA DI ωL

Valutiamo ora gli errori nel modello matematico del nostro wattmetro derivanti dall'aver posto $\bar{z}_v = R_v$. Questa relazione è vera solo per $f=0$; per $f \neq 0$, in realtà, è:

$$\bar{z}_v = R_v \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L_v}{R_v}\right)^2} = R_v T_a \quad \text{(modulo di } \bar{z}_v \text{)}$$

dove a è una grandezza il cui valore nullo (vero) è:

$$a.v = 1$$

mentre il valore reale ('misurato') risulta:

$$a_m = 1 + \left(\frac{\omega L_v}{R_v}\right)^2$$

Nella misura di a si commette dunque un errore pari a:

$$e = \frac{E}{a_v} = \frac{a_m - a_v}{a_v} = a_m - a_v = \left(\frac{\omega L_v}{R_v}\right)^2$$

Ne consegue che l'approssimazione di $\bar{z}_v$ con R_v comporta un errore di modulo pari a:

$$e = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega L_v}{R_v}\right)^2$$

tal errore si riflette con la stessa entità sulla costante strumentale del wattmetro:

$$T_i = K_w \lambda, \text{ con } K_w = \frac{1}{L_k} \bar{z}_v$$

e, di conseguenza, sulla potenza indicata P_i che, pertanto, risulta affetta da un errore $e = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega L_v}{R_v}\right)^2$.

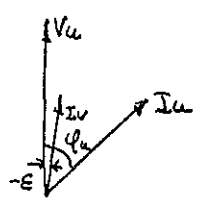
La nostra approssimazione comporta anche un errore d'angolo; risulta, infatti:

$$\bar{z}_v = R_v + j\omega L_v = R_v \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L_v}{R_v}\right)^2} e^{j\epsilon} \quad \epsilon < 0^{(1)}$$

L'aver posto: $\bar{z}_v = R_v$ comporta, dunque, anche un errore di angolo pari a $\epsilon = \epsilon^-$. Vediamo come questa approssimazione influenzi la misura della potenza, prescindendo da ogni altro errore dello strumento (quali gli errori di consumo).

La potenza erogata dal carico risulta:

$$P_u = V_u I_u \cos \varphi_u$$



a causa dell'angolo non nullo di $\bar{z}_v$, quella indicata dallo strumento risulta, invece

$$P_i = V_u I_u \cos(\varphi_u + \epsilon), \text{ in quanto: } G_0 = K I_u I_v \cos(\varphi_u + \epsilon)$$

L'errore introdotto dall'angolo ϵ risulta dunque, in prima approssimazione (trascurando cioè termini d'ordine superiore al primo):

$$E_p = \frac{\partial P}{\partial \varphi} d\varphi \quad , d\varphi = -\varphi_u + (\varphi_u + \epsilon) = \epsilon$$

$$E_p = -V_u I_u \sin \varphi d\varphi = -Q d\varphi$$

$$E_p = -Q \epsilon$$

(1) Conveniamo che $\epsilon > 0$ quando I_v è in anticipo su V_u
 (2) Della definizione di errore: $\epsilon = H - V$ si vede che, essendo, l'angolo 'misurato': $\varphi_u + \epsilon$ (angolo tra I_u e I_v) minore di quello vero: φ_u (angolo tra V_u e I_u), l'errore d'angolo è negativo: $\epsilon = \varphi_u + \epsilon - \varphi_u = \epsilon < 0$

In tal caso risulta, infatti:

$$\bar{Z} = R \quad 0 < f < f_r$$

Uno strumento rifatto è detto **WATTMETRO COMPENSATO**, o wattmetro a bobina voltmetrica compensata.

SPECIFICHE DI UN WATTMETRO

Soltamente di un wattmetro sono fornite le seguenti specifiche:

I_n

www.ingonline.biz

V_n

$\cos \varphi_n$ (anche detto $\cos \varphi_m$).

$\cos \varphi_n$ è tale che, se $V = V_n$, $I = I_n$, $\cos \varphi = \cos \varphi_n$, allora l'indicazione dello strumento è:

$$A = A_{FS}$$

La potenza nominale dello strumento ^{dunque} è data da:

$$P_n = V_n I_n \cos \varphi_n$$

e coincide con la potenza di fondo scala:

$$P_{FS} = K_w A_{FS} = P_n$$

EX. =

Se fosse: $V_n = 300 \text{ V}$, $I_n = 5 \text{ A}$, $\cos \varphi_n = 1$, allora si avrebbe: $P_n = V_n I_n \cos \varphi_n = 1500 \text{ W} = P_{FS}$; la costante strumentale risulterebbe, allora, nell'ipotesi di $A_{FS} = 150$ divisioni:

$$K_w = \frac{P_{FS}}{A_{FS}} = \frac{1500}{150} = 10 \text{ W/divisione}$$

Le correnti e tensioni maxime ammissibili sono di solito maggiori di quelle nominali: $V_n > V_n$, $I_n > I_n$, anche del 100%. ; questo perché difficilmente occorrerà contemporaneamente che $V = V_n$, $I = I_n$, $\cos \varphi = \cos \varphi_n$; pertanto, se le correnti e tensioni maxime fossero uguali a quelle nominali difficilmente si riuscirebbe a raggiungere il fondo scala. Questo "overrange" ha pertanto lo scopo di aumentare la probabilità che lo strumento lavori in prossimità del fondo scala, laddove la lettura è più precisa.

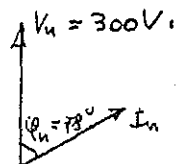
WATTMETRI A BASSO $\cos \varphi$

Sono wattmetri destinati a misurare potenze con carichi piuttosto reattivi; hanno pertanto $\cos \varphi_n < 1$.
valori tipici di $\cos \varphi_n$ sono 0.5, 0.2, 0.1.

EX. = Sia: $V_n = 300 \text{ V}$, $I_n = 5 \text{ A}$, $\cos \varphi_n = 0.2$ (dati di targa uguali a quelli del caso precedente, a meno di quelli relativi al $\cos \varphi_n$). Si ha:

$$P_n = P_{FS} = V_n I_n \cos \varphi_n = 300 \text{ W}$$

è il 20% di quella che era la potenza di fondo scala nel caso precedente



te risulta:

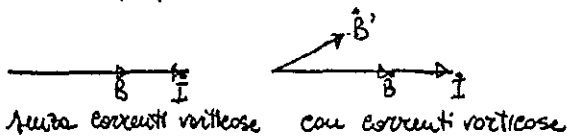
$$C_{II} = k I I' \cos \hat{I I'} = k I I' \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Dunque, nel campo di frequenza in cui è lecito affermare che risulta $\hat{E}_V = R_V$ la presenza di unitari accoppiamenti tra circuito ampereometrico e circuito voltmetrico non modifica la coppia motrice dello strumento, ovvero non produce errori.

BANDA DI FREQUENZA

Nel funzionamento in a.c. il wattmetro, così come tutti gli strumenti elettrodinamici, è caratterizzato da una banda in frequenza; il suo estremo superiore è determinato da:

- 1) l'errore: $\frac{1}{2} \left(\frac{\omega L_V}{R_V} \right)^2$ commesso nell'affermare che risulta: $\hat{E}_V = R_V$, ovvero: $\hat{E}_V = R_V e^{\frac{1}{2}} \approx 0$
- 2) l'errore dovuto alla presenza di R - trascurabile, come abbiamo visto, purché risulta $E \approx 0$
- 3) le correnti vorticosi indotte nelle parti metalliche sottoposte al campo magnetico generato dalle bobine in assenza di correnti vorticosi; campo magnetico indotto e correnti rubicente sono in fase; in presenza di queste B si modifica in modulo e fase, tanto più sensibilmente quanto più elevata è la frequenza della corrente induttrice



L'estremo superiore della banda in frequenza è, come di solito, determinato dal fatto che l'indice non deve oscillare visibilmente. Chiaramente lo strumento funzionerà in corrente continua.

La banda di frequenza di un wattmetro coincide di solito con la frequenza sino ad 1 kHz - frequenza industriale. Con particolari realizzazioni, che minimizzano gli errori a frequenze elevate - ad esempio, parti metalliche realizzate in sottopressi ceramiche, si può da minimizzare le correnti vorticosi - si arriva a valori di f dell'ordine di 10 kHz.

La classe di precisione di un wattmetro è sempre riferita a $\cos \varphi = 1$:

$$C = \pm \frac{E^*}{P_{FS}} \cdot 100, \quad \cos \varphi = 1$$

portanto l'incertezza percentuale effettiva dello strumento risulta:

$$(\rho\%) = \pm C \frac{P_{FS}}{P_i} \pm E\% \tan \varphi \quad \text{www.ingonline.biz}$$

La calibrazione del wattmetro avviene in corrente continua; l'errore verrà poi trasferito alla banda di utilizzo dello strumento.

(1) Ritene come di oscillazioni sinusoidali pure, o, al più, con una distorsione totale massima compresa entro un certo limite.

(2) C ed E% risultano all'incirca dello stesso ordine di grandezza (E% espresso in radianti!).

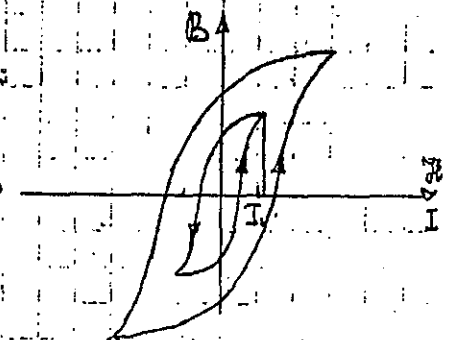
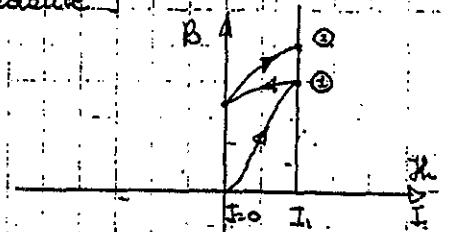
In questo genere di strumenti la coppia motrice corrente i_m che proporzionalmente alla corrente da misurare; si tratta dunque di strumenti in cui la scala dell'indice è espansa nella sua parte iniziale, rispetto alla parte finale.

Gli strumenti realizzati con questo criterio si rivelano robusti (rifatti le correnti non esercita nella parte mobile) e precisi; le classi di precisione tipiche sono: $C = \pm 0.5, \pm 1, \pm 1.5$. Il più raro è il caso in cui risulta: $C = \pm 0.2$. Tuttavia, nella maggior parte dei casi si tratta di strumenti adatti a funzionare solamente in a.c.; questa caratteristica è dovuta essenzialmente ai due motivi seguenti:

— Nel funzionamento in a.c. le lamine ^{non} vedono di correnti vorticosi che tendono di sommare l'isteresi magnetica al loro interno, con conseguenze nell'incertezza di misurazione delle due lamine; se da queste correnti vorticosi non si generano; di conseguenza la coppia motrice, e quindi l'indicazione dello strumento risulterebbe diversa, a parità di valore efficace della corrente circolante.

— Nel funzionamento in d.c., a causa del fenomeno di isteresi magnetica relativo al materiale di cui sono costituite le lamine, lo strumento non ripete le misure; in altri termini, facendo circolare due volte la stessa corrente continua I_1 , con un intervallo in cui è I_2 , lo strumento fornisce due indicazioni differenti (vedi figura).

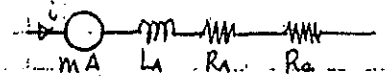
Questo fenomeno non si verifica nel funzionamento in a.c. in cui far circolare una corrente di valore efficace I_1 , vuol dire sottoporre il materiale ad una serie di cicli di isteresi sufficientemente lunga da farne dimenticare la storia precedente; esso implica che il valore efficace della corrente circolante identifica univocamente il ciclo cui è sottoposto il materiale ferromagnetico e, quindi, l'indicazione dello strumento.



Minimizzando questi due effetti si possono realizzare anche strumenti in grado di funzionare in d.c.: occorre realizzare le lamine con materiali ferromagnetici ad elevata permeabilità in modo da ridurre le correnti vorticosi e con ciclo di isteresi molto stretto in modo da minimizzare gli effetti. Si ottengono comunque strumenti aventi in d.c. una classe di precisione migliore di quella in a.c.; ad esempio strumenti aventi $C = \pm 0.5$ in a.c. e $C = \pm 1$ in d.c.

Per utilizzare questi strumenti come voltmetri si possono porre in serie ad essi una resistenza molto superiore (alle frequenze di lavoro) alla resistenza intrinseca dello strumento.

www.ingonline.biz



La banda di lavoro di questi strumenti è piuttosto stretta: tipicamente non supera $100 \div 200$ Hz.

Si ha, dunque, che:

$$V_m = V_x \cdot \frac{R_v}{R_x + R'_{cv} + R''_{cv} + R_v}$$

L'influenza delle resistenze di contatto nella misura è trascurabile se risulta: $R_v \gg R'_{cv} + R''_{cv}$; sotto tale ipotesi si ha:

$$V_m = V_x \cdot \frac{R_v}{R_x + R_v}$$

Se poi è anche: $R_v \gg R_x$ la precisione della misura non è influenzata nemmeno da R_x e si ritorna alla condizione in cui si può ritenere $R_v \rightarrow \infty$:

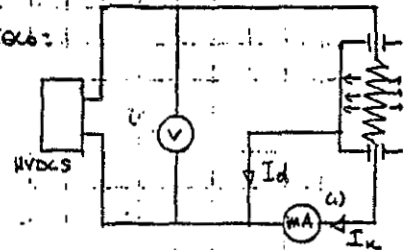
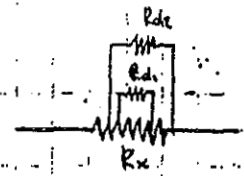
$$V_m = V_x$$

3.1.1 MISURA DI GRANDI RESISTENZE

Se la resistenza da misurare è molto grande, vi saranno delle correnti di dispersione sensibili che possono essere compensate come correnti equivalenti in resistori posti in parallelo all'intera R_x o ad una sua parte:

In linea di principio si può quindi ritenere che, misurando R_x in un'unica il parallelo di questa con le resistenze di dispersione:

$$R_m = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_{di}}} \approx \frac{1}{R_x}$$



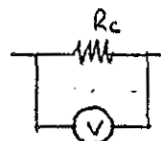
Per ridurre gli errori di misura conviene schermare la resistenza di alto valore con una sorta di gabbia metallica che funge da collettore delle correnti di dispersione facendo bypassare a queste ultime l'amperometro - gli effetti sul voltmetro sono trascurabili -. Contemporaneamente lo schermo deve essere isolato dalla resistenza di alto valore.

In tal modo gli errori derivati alle correnti di dispersione sono stati ridotti al minimo possibile e si può ritenere che risulti:

$$R_m = \frac{V}{I_x} = R_x + R_{sch}$$

www.ingonline.biz

- c) Un miliamperometro può essere ottenuto dal parallelo di una resistenza campione (di basso valore) con un voltmetro:



$$I_m \approx I_v + I_c$$

$$I_m \approx \sqrt{I_v^2 + I_c^2} = I_v \sqrt{1 + \left(\frac{I_c}{I_v}\right)^2} \approx I_v$$

dunque, I_c non modifica quasi per nulla il modulo di I_m , alterandone solo la fase. Il fatto che vari la fase della corrente nella bobina mobile comporta una variazione di ϕ ; questa cupola, se il carico è induttivo, aumenterà, facendo di conseguenza diminuire l'angolo carico del wattmetro.

CORREZIONI PER I CONSUMI STRUMENTALI

Consideriamo il collegamento con circuiti voltmetrici a valle, illustrato nella figura alla pagina precedente. Si ha:

$$V = V_u \quad I = I_u + I_d$$

con I_d corrente creata nei circuiti voltmetrici:

$$I_d = G_c V \quad G_c = G_v + G_{wv} = \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R_{wv}} \quad \text{essendo: } B_c = B_v + B_{wv} \approx 0$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 voltmetro wattmetro

Si vuole ottenere una relazione che legni I_u ad I in modo da volutare l'errore di consumo appunto; risulta che la potenza attiva e reattiva, anziché dal complesso voltmetrico + carico, valga:

$$P = P_u + G_c V_u^2$$

$$Q = Q_u + B_c V_u^2 \approx Q_u$$

Ma Q_u e Q non date, come sappiamo, da:

$$Q_u^2 = (V_u I_u)^2 - P_u^2 \quad Q^2 = (VI)^2 - P^2$$

da cui si ricava $(V_u = V)$

$$(VI_u)^2 = (VI)^2 - P^2 + P_u^2$$

$$I_u^2 = I^2 + \frac{P_u^2 - P^2}{V^2}$$

www.ingonline.biz

ed infine:

$$I_u = I \sqrt{1 + \frac{P_u^2 - P^2}{I^2 V^2}}$$

1) Il più grave errore coldata si ha nel teorema di Thevenin: se l'impedenza del circuito superamento e la resistenza del voltmetro sono trascurabili rispetto al R_v e l'impedenza del circuito superamento è trascurabile rispetto al carico, allora il circuito equivalente di Thevenin diventa:

e risulta:

$$V_r = V \frac{R_{12}}{R_v}$$

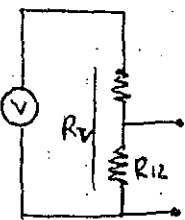
$$Z_T = \frac{R_{12}(R_v - R_{12})}{R_{12}(R_v - R_{12})}$$

da cui:

$$I_c = \frac{V_r}{Z_T + \frac{1}{j\omega C}} \approx V_r j\omega C$$

$$1/j\omega C \gg Z_T$$

dunque I_c è sfasata di $\frac{\pi}{2}$ rispetto a V , quindi a I_v



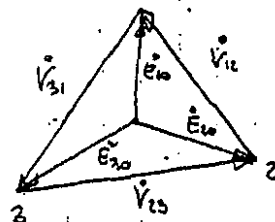
Proseguendo nei calcoli di elettrotecnica termostatica che risulta: nel corso è equibrio

$$\begin{aligned} P_{12} + P_{13} &= 3P_{10} \quad \text{+ potenza immessa rispetto al neutro} \\ P_{23} + P_{21} &= 3P_{20} \\ P_{31} + P_{32} &= 3P_{30} \end{aligned}$$

Dimostriamo la prima relazione; si ha:

$$P_{12} = \dot{I}_1 \times \dot{V}_{12} = \dot{I}_1 \times (\dot{E}_{10} - \dot{E}_{20})$$

$$P_{13} = \dot{I}_1 \times \dot{V}_{13} = \dot{I}_1 \times (\dot{E}_{10} - \dot{E}_{30})$$



e, quindi:

$$P_{12} + P_{13} = \dot{I}_1 \times (2\dot{E}_{10} - \dot{E}_{20} - \dot{E}_{30}) = \dot{I}_1 \times (3\dot{E}_{10} - \dot{E}_{10} - \dot{E}_{10} - \dot{E}_{10}) = 3P_{10}$$

Analoghe relazioni si trovano per la potenza reattiva; più precisamente, si ha:

$$Q_{123} = -Q_{12} + Q_{13}$$

$$Q_{12} + Q_{13} = 3Q_{10}$$

$$Q_{10} = E_{10} I_1 \sin \varphi_{10}$$

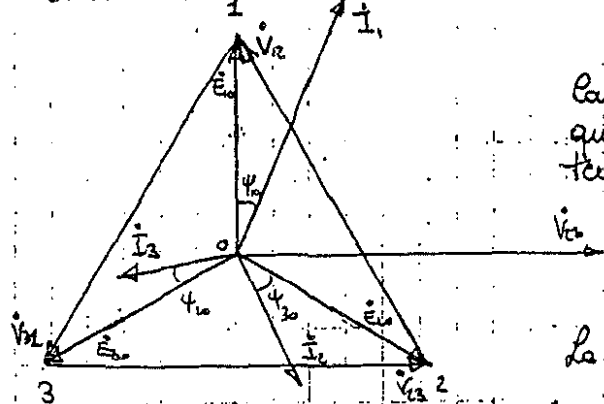
$$Q_{231} = -Q_{23} + Q_{21}$$

$$Q_{21} + Q_{23} = 3Q_{20}$$

$$Q_{312} = -Q_{31} + Q_{32}$$

$$Q_{31} + Q_{32} = 3Q_{30}$$

4 MISURA DELLA POTENZA REATTIVA IN UN SISTEMA TRIFASE SIMMETRICO



Consideriamo ora un sistema trifase simmetrico a sequenza diretta: tra la tensione di linea V_{12} e la tensione di fase E_{10} si verifica facilmente l'esistenza della relazione:

$$V_{12} = \sqrt{3} E_{10} e^{j\frac{\pi}{6}}$$

La potenza P_{12} risulta pertanto data da:

$$\dot{I}_1 \times \dot{V}_{12} = \dot{I}_1 \times (\sqrt{3} \dot{E}_{10} e^{j\frac{\pi}{6}}) = \sqrt{3} I_1 E_{10} \sin \varphi_{10} = \sqrt{3} Q_{10}$$

In questo caso, per definizione: $Q_{10} = I_1 E_{10} \sin \varphi_{10}$

Ripetendo questo calcolo per le 3 fasi si ottiene:

$$\sqrt{3} Q_{10} = P_{123} = -P_{12} + P_{13}$$

$$\sqrt{3} Q_{20} = P_{231} = -P_{23} + P_{21}$$

$$\sqrt{3} Q_{30} = P_{312} = -P_{31} + P_{32}$$

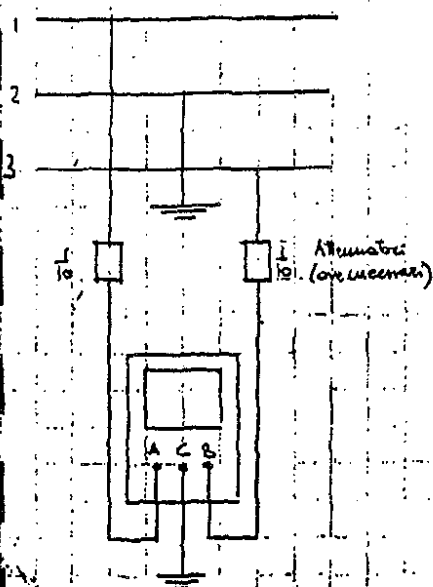
www.ingonline.biz

La potenza reattiva relativa ad una fase può dunque essere espressa come differenza di due misure wattmetriche aventi l'emfasistica ruotata nella fase considerata.

Si tenga presente che le (1) sono ricavate nell'ipotesi di sequenza diretta delle tensioni; se la sequenza fosse inversa si otterrebbero risultati di segno opposto a quelli reali; per far vedere anche le (1) occorrerebbe cambiare di segno i secondi membri.

(1) per i moduli si vede facilmente che, per le proprietà dei triangoli equilateri, la tensione di linea sarà $\sqrt{3}$ volte quella di fase.

2) Un oscilloscopio collegato secondo lo schema riportato in figura



Se la sequenza delle tensioni è diretta, allora V_{32} (canale B) anticipa V_{12} (canale A) di $\frac{\pi}{3}$

$$\frac{V_{32}}{V_{12}} = e^{j\frac{\pi}{3}}$$

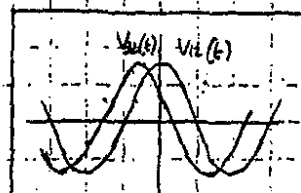
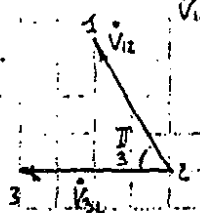
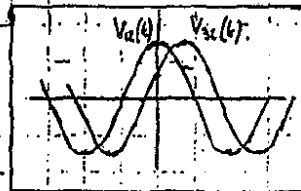
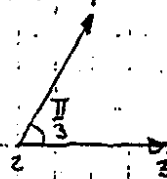
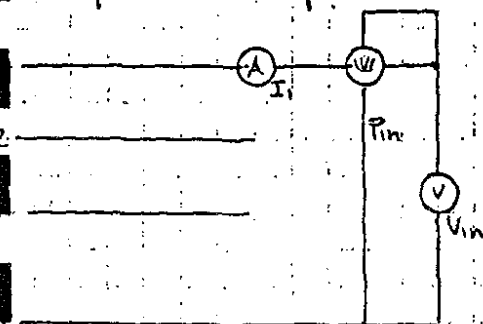


IMMAGINE ALL' OSCILLOSCOPIO

Se la sequenza è inversa, allora V_{32} ritarda V_{12} di $\frac{\pi}{3}$



Per studiare un sistema a 4 fili in cui non vi siano correnti nel neutro si può adottare questo come riferimento e studiare 3 circuiti monofase, ciascuno definito da 3 misure indipendenti, di cui due di valore efficace - tensione e corrente - ed una di fase, realizzabile mediante un fasometro od uno strumento moltiplicatore - wattmetro o varmetro -



www.ingonline.biz

MISURE DI POTENZA IN SISTEMI TRIFASE A 3 FILI SIMMETRICI ED EQUILIBRATI (SEQUENZA DESTRA)

Consideriamo un sistema trifase a 3 fili, simmetrico ed equilibrato, a sequenza DIRETTA. Il sistema risulta determinato una volta che siano noti: V_L, I_L, φ . Al pari di un sistema monofase può dunque essere caratterizzato con 3 soli strumenti.

La misura migliore si ottiene con due wattmetri in suoneria. Anche ed i due wattmetri, che permette infatti di eseguire misure esatte di potenze attive anche se il sistema non risponde alle caratteristiche di simmetria ed equilibrio richieste: risulta sempre, infatti:

$$P = P_{12} + P_{32}$$

Solo se il sistema è effettivamente simmetrico ed equilibrato, si avranno vere le relazioni:

$$Q = 3Q_{10} = 3 \frac{P_{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} (-P_{12} + P_{32})$$

Ma le due misure di potenza da noi eseguite hanno il circuito wattmetrico riferito alla fase 2; pertanto, osservato che risulta: $P_{13} = P_{32}$, possiamo scrivere:

$$Q = \sqrt{3} (P_{32} - P_{12})$$

La potenza apparente vorrà come sappiamo:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3} VI$$

Da questi dati si possono ricavare le correnti di linea ed il $\cos \varphi$; risulta, infatti:

$$I_L = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{\sqrt{3} V}$$

www.ingonline.biz

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{3} VI}$$

inquadri noto anche il coseno; risulta, infatti:

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L} = \frac{V_L / \sqrt{3}}{I_L}$$

$$R_L = Z_L \cos \varphi ; X_L = Z_L \sin \varphi$$

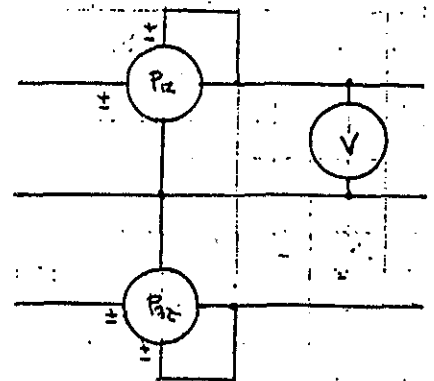
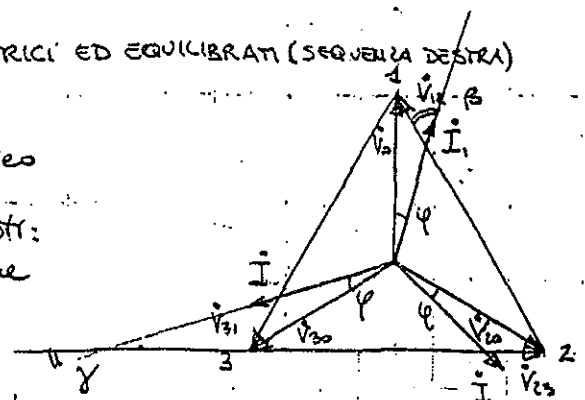
oppure, nella configurazione a triangolo:

$$Z_A = \frac{V_L}{I_f} = \frac{V_L}{I_L / \sqrt{3}}$$

$$R_A = Z_A \cos \varphi ; X_A = Z_A \sin \varphi$$

(1) Per sequenze inverse alcune relazioni risultano sbagliate nel segno

(2) $S = 3V_L I_f = 3 \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L = \sqrt{3} V_L I_L$



$$P_{12} = P_{23} = P_{31}$$

$$P_{12} = P_{13} = P_{21}$$

Il metodo descritto sopra è il più corretto per studiare un sistema trifase simmetrico ed equilibrato; si potrebbe pensare di eseguire misure di potenza attiva anche con un solo wattmetro, riferendoli al centro stella (che realizzare se non accessibile), e sfruttando la relazione:

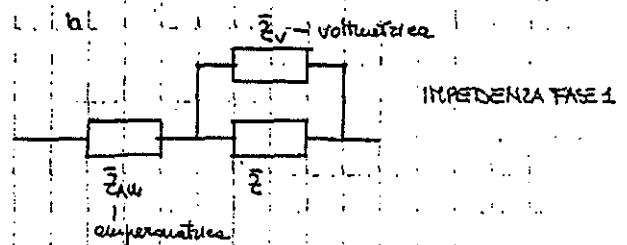
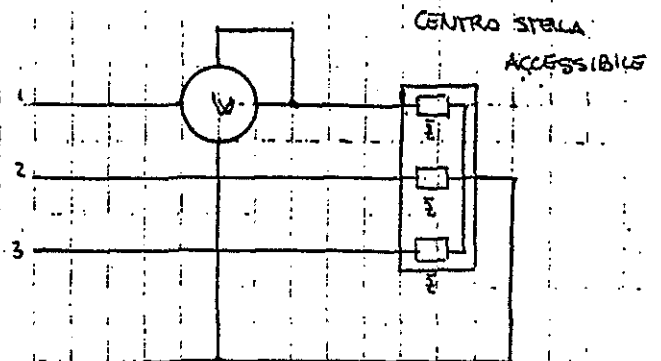
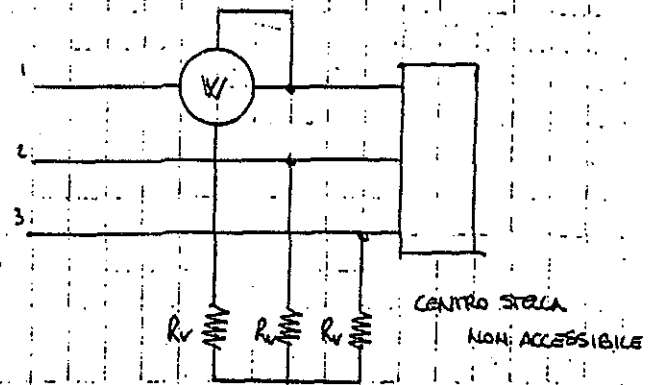
$$P = 3P_0$$

Tale relazione è però valida solo per sistemi simmetrici ed equilibrati e sono pochi i sistemi che rispondono perfettamente a queste caratteristiche: la stessa presenza del wattmetro, per la presenza di un'impedenza nel circuito amperometrico e di un ammettente in quello voltmetrico, rende il sistema decisamente dissimmetrico e squilibrato.

Anche in realtà, un centro stella esterno al cores si può avviare alla presenza della R_v realizzando una stella con 3 impedenze di valore $R_v^{(1)}$; se, invece, il centro stella è accessibile, l'inserzione di un wattmetro su una fase ne modifica l'impedenza da $\bar{Z}_\lambda$ a:

$$\bar{Z}'_\lambda = \bar{Z}_{\lambda w} + \bar{Z}_v // \bar{Z}_\lambda \neq \bar{Z}_\lambda$$

www.ingonline.biz



⁽¹⁾ In realtà R_v non è facilmente determinabile ed in più ha un piccolo argomento (la reattanza della bobina mobile)

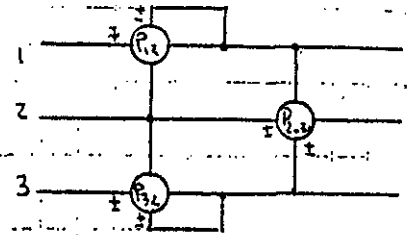
3.1.2 METODO RIGHI

Si ottiene direttamente dal metodo Barbapelta sostituendo, nella (2) la relazione $P_{13} = P_{31} = P_1 - P_3$ e ricordando che:

$$P_{23} = -P_3 + P_2 \quad (p. 76)$$

Si ha, pertanto:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} [(P_{32} - P_{12}) + 2 P_{23}]$$



Questa relazione suggerisce il seguente circuito di misura:

Del punto di vista teorico i due metodi sono equivalenti; in pratica la misura eseguita con i due metodi illustrati presentano, a parità di circuito, lievi differenze anche quando siano state depurate degli errori sistematici di consumo. Si osserva che queste differenze diminuiscono impiegando wattmetri a basso cos ϕ ; da questa osservazione si deduce che è fatto che nei due casi i wattmetri moltiplichino tra loro vettori diversi: implica che gli errori di angolo influenzano in maniera diversa i risultati.

www.ingonline.biz

3.1.3 CALCOLO DELLE ALTRE GRANDEZZE CARATTERISTICHE DEL CIRCUITO

Supponiamo di disporre di 4 wattmetri a connessione Barbapelta; in tal caso basta l'assunzione di un solo wattmetro supplementare per definire tutte le altre grandezze del circuito (si ricordi che la Terza delle Tensioni è misurabile; pertanto il wattmetro, inserito tra 2 fasi, misurerà la tensione di linea della Terza).

Dalla conoscenza di P, Q si può ricavare la potenza apparente:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3} V I_d \quad (*)$$

e ne ricavo:

$$I_d = \frac{S}{\sqrt{3} V}$$

Dalla relazione:

$$P = \sqrt{3} V I_d \cos \varphi_d$$

si può poi ricavare l'angolo φ_d compreso tra la terza ^{DIRETTA} delle correnti e quella della Tensione.

con la modulo della Terza diretta nella scomposizione del Fortexen - relazione dimostrabile. Si ricordi che in questo caso (sistemi a 3 fili) la Terza delle correnti è pura, per cui risulta: $I_0 = 0$. Vedi appendice 1.

Se, nella formula, si vede che:

$$|e_c| \leq \frac{1 \div 2}{10} \frac{P_n - P_c}{P_c}$$

allora si ottiene:

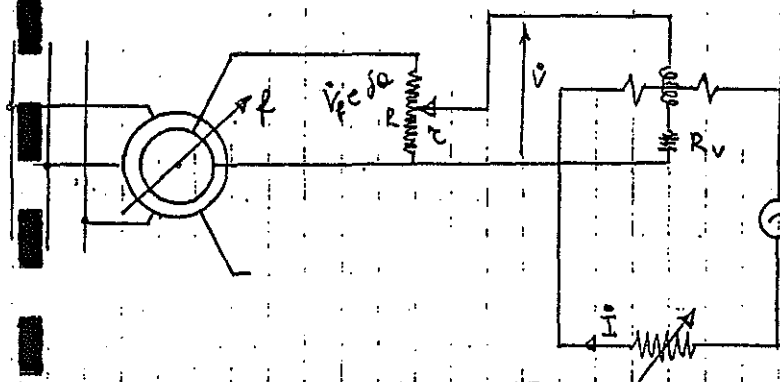
$$e_x \approx \frac{P_n - P_c}{P_c}$$

In realtà per calibrare un wattmetro occorre fornirgli valori di tensione, corrente, $\cos \varphi$ variabili in tutto il range misurabile; occorre cioè verificare la precisione della misura quali che siano i valori di $V, I, \cos \varphi$, purché tollerabili dallo strumento e purché misurabili.

$$0 \leq P_c \leq P_n = P_{FS}$$

In alcuni casi è anche necessario effettuare la calibrazione dello strumento a frequenze diverse.

Da quanto detto sopra si potrebbe dedurre la necessità di realizzare un carico variabile, la cui cosa comporta però notevoli problemi pratici, non ultimi quelli concernenti la fornitura ed alla dissipazione di elevate potenze. Per questo motivo si è escogitato un metodo detto METODO DEL CARICO FINTO (phantom load): consistente nel reperire i circuiti wattmetrici ed amperometrici (e, meno, al più, di un collegamento equipotenziale) fornendo, ad essi, rispettivamente, una tensione ed una corrente modificabili a piacere dall'esterno; un variatore di fase su uno dei due circuiti permetterà di modificare ad arbitrio anche il $\cos \varphi$.



$$V = V_f e^{j\omega t} \frac{R}{R + jX} = V_f e^{j\omega t} \frac{R}{R} \quad R_v \gg X$$

Il wattmetro misurerà una potenza pari a:

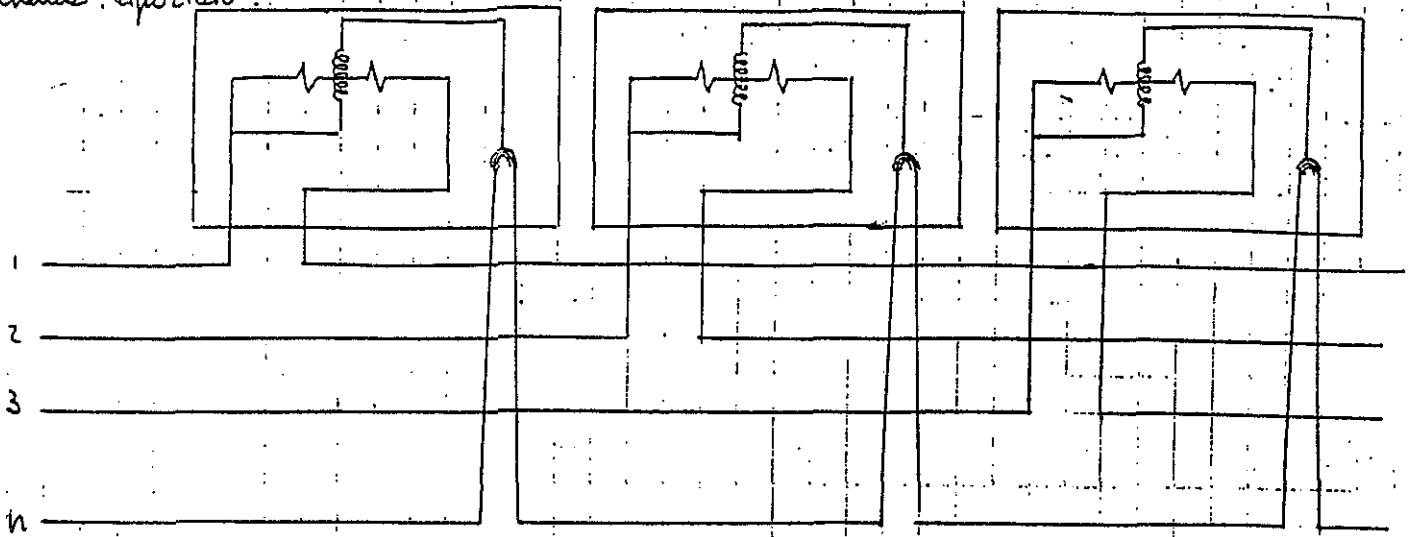
$$P_m = VI \cos \theta \quad \text{www.ingonline.biz}$$

e, ad esempio, se: $V=100 \text{ V}$, $I=5 \text{ A}$, $\cos \theta=1$, risulterà: $P_m=500 \text{ W}$ senza che questa potenza sia, in realtà, erogata dal sistema: la potenza dissipata nei due circuiti di alimentazione separati sono invece assai modeste.

Questo metodo ha anche il pregio di eliminare gli errori di consumo che risulterebbero in più in quanto nell'amperometro non viene la corrente derivata dal wattmetro (e questo è a valle), ovvero il wattmetro (e a monte) non misura la caduta di tensione nell'amperometro.

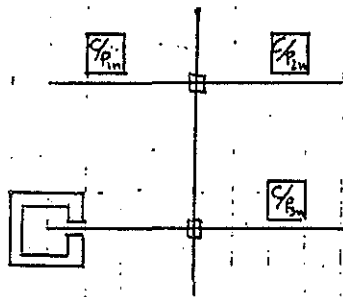
Prelevata dalle Stern due fasi che forniscono $\vec{V}$

Per le misure su sistemi trifase con neutro occorre ricorrere a 3 strumenti, secondo lo schema riportato:



Insodo: $WH = (WH)_{1n} + (WH)_{2n} + (WH)_{3n}$

oppure con un apposito contatore a 2 dischi:

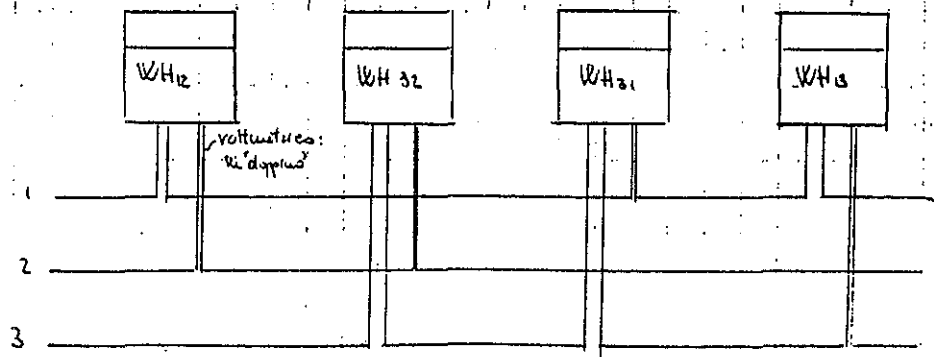


www.ingonline.biz

Misure di energia reattiva su sistemi a 3 fili generici:

Per misure di energia reattiva su questi sistemi si può adottare il metodo delle 4 letture o il metodo delle 3 letture.

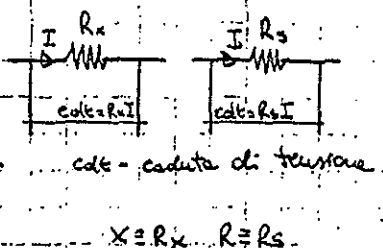
Il metodo delle 4 letture vengono impiegati 4 contatori monofasi, secondo lo schema:



A-METODI DI MISURA PER CONFRONTO

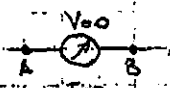
1. METODI DI ZERO

Nei metodi di zero si realizza la misura della grandezza incognita X confrontandola con una nota R , ad esse omogenea, attraverso un effetto fisico prodotto da entrambe. Se, ad esempio, $X \equiv R_x$ ed $R \equiv R_s$ sono resistenze, allora l'effetto fisico di confronto può essere la tensione ai loro capi quando sono attraversate da una stessa corrente.

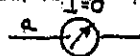


Il confronto è volto a determinare la condizione di equilibrio (o di bilancia) nel rivelatore di zero; da questa condizione di equilibrio scaturisce una equazione che permette di determinare la grandezza incognita in funzione di parametri noti. La condizione di equilibrio è, in genere, l'annullamento della tensione. Fra due punti di un circuito elettrico, o della corrente in un ramo (da qui deriva, per questi metodi, il nome di metodi di zero).

1) $V_{AB} = 0$



2) $I_a = 0$



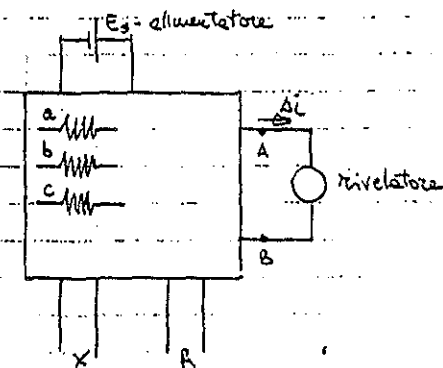
Per eseguire una misura tramite un metodo di zero si necessita di:

- RIVELATORE DI ZERO (o null detector, se analogico, oppure zero detector, se digitale)
- GRANDEZZA DI RIFERIMENTO, o CAMPIONE (o reference, o standard)
- ORGANI DI REGOLAZIONE: $a, b, c, \dots, n$ = n tratti, in genere, di elementi passivi, variabili al fine di realizzare fisicamente la condizione 1) o la 2).

In teoria, variando gli organi di regolazione, è possibile raggiungere la condizione di equilibrio in maniera esatta; in pratica, invece, il rivelatore di zero ha un livello di soglia al di sotto del quale la sua indicazione (partendo da una condizione di equilibrio) è nulla. Tale livello di soglia prende il nome di ^{ERRORE DI} SENSIBILITA' DEL RIVELATORE, e, dunque, il rivelatore di zero misura una tensione, la sua indicazione però è nulla per $V_{AB} < \Delta$.

L'errore dunque, in realtà: $\Delta \neq 0$ implica che nei metodi di zero la condizione di equilibrio viene raggiunta a meno della sensibilità del rivelatore di zero.

Ricaviamo ora una relazione che permette di ricavare Δ per via sperimentale. Supponiamo di trovare nella condizione di equilibrio: I_0 (oppure $V_0 = 0$). Attribuiamo un incremento Δx alla grandezza da misurare; questo incremento determina una corrente i_s nel rivelatore di zero, la quale produce a sua volta uno spostamento Δi dell'indice di questo:



$$\frac{\Delta x}{x} \rightarrow \Delta i_s \approx \Delta i$$

www.ingonline.biz

1) Quasi sempre sono condensatori o resistori; quasi mai resistori. Ovviamente, se la misura viene eseguita a d.c. i condensatori risultano vani.

$$\Delta i = \frac{\Delta E_T}{R_T + R_d} \quad , \quad \text{con} \quad \Delta E = f(E_s, a, b, e, \dots, n, \Delta x/x) \quad ;$$

$$R_T = f(a, b, e, \dots, n, \Delta x/x)$$

Al variare della grandezza misurata da x ad $x' = x + \Delta x$ l'unico parametro che varia risulta, appunto: $\Delta x/x$; possiamo allora scrivere che:

$$\Delta E_T = \Delta E_T (\Delta x/x)$$

$$R_T = R_T (\Delta x/x)$$

da cui:
$$\Delta i = \frac{\Delta E_T (\Delta x/x)}{R_T (\Delta x/x) + R_d}$$

Se il minimo valore di corrente rivelabile è Δi_{min} , noto, da questa relazione si può risolvere, noti $f, f, a, b, e, \dots, n, E_s$, alla sensibilità della misura: $\frac{\Delta x_{min}}{x}$?

$$\Delta i_{min} = \frac{\Delta E_T (\Delta x_{min}/x)}{R_T (\Delta x_{min}/x) + R_d}$$

4. METODI DI SOSTITUZIONE

4.1. CONFRONTO TRA DUE GRANDEZZE UGUALI

Sono metodi di misura esistenti nella doppia applicazione del metodo di zero. Non realizzano il confronto diretto con la grandezza di riferimento R , che quindi supponiamo ritorne al circuito di misura.

Supponiamo di aver realizzato per la nostra grandezza misurata una condizione di equilibrio del tipo: $V_{AB} = 0$. In tale condizione x è ricavabile da una equazione del tipo:

$$(1) \quad x = f(a, b, e, \dots, n)$$

Sostituiamo ora nel circuito una grandezza campione Y , variabile, e di farla variare fino a che non risulti: $\Delta i = 0$. Il valore Y_0 che realizza questa condizione è, naturalmente, noto, e, d'altra parte, è ricavabile dalla stessa (1):

$$Y_0 = f(a, b, e, \dots, n)$$

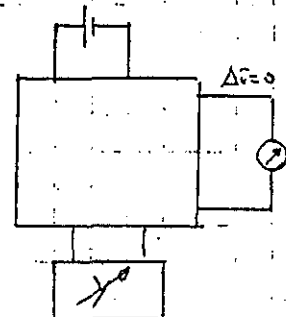
Possiamo pertanto eguagliare queste due relazioni, ricavandone direttamente la misura di x :

$$x = Y_0$$

www.ingonline.biz

Se la sensibilità del rivelatore fosse nulla si avrebbe che x è noto con lo stesso errore con cui si conosce il campione Y :

$$e_x = e_Y$$



(1) Si osservi che non vi interviene E_s . La condizione di equilibrio è indipendente dalla tensione di alimentazione.

Se risulta, ad esempio: $z = \frac{y}{10}$, allora è anche:

$$e_x = e_y \frac{1}{0.9} - e_z \frac{0.1}{0.9} = e_y \frac{10}{9} - e_z \frac{1}{9}$$

e, invece, risulta: $z = \frac{y}{100}$, allora si ha:

$$e_x = e_y \frac{1}{0.99} - e_z \frac{0.1}{0.99} = e_y \frac{100}{99} - e_z \frac{1}{99}$$

Supponiamo che risulti, dopo i debiti calcoli: $e_z = 0.04$ e che si sappia che: $e_y = 0.001$; se è 0.1% allora si ha:

$$e_x = 0.001 \frac{1}{0.9} - 0.04 \frac{0.1}{0.9} = 0.0033$$

Quindi e_x è dello stesso ordine di grandezza di e_y .

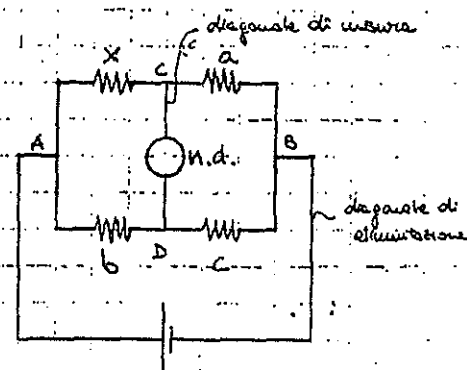
In molti casi, per la presenza di elementi parassiti nel circuito di misura, il metodo di sostituzione introduce ^{per y an} gli errori dovuti alla presenza di suddetti elementi parassiti, annullandoli addirittura nel caso risulti proprio $y = x$.

3 PONTE DI WHEATSTONE

È un metodo di zero da applicarsi a d.c.; consiste in un circuito del tipo:

All'equilibrio risulta:

www.ingonline.biz



con:

$$V_{CA} = V_{AB} \frac{x}{x+a}$$

$$V_{DA} = V_{AB} \frac{b}{b+c}$$

a, b, c componenti noti.

L'equazione di equilibrio è espressa da:

$$\frac{x}{x+a} = \frac{b}{b+c}$$

ovvero:

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{c} \quad (1)$$

(1) da: $\frac{a+x}{x} = \frac{b+c}{c}$; $\frac{a}{x} + 1 = \frac{b}{c} + 1$; $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$ - è una proprietà delle proporzioni.

vero, l'invertita vale:

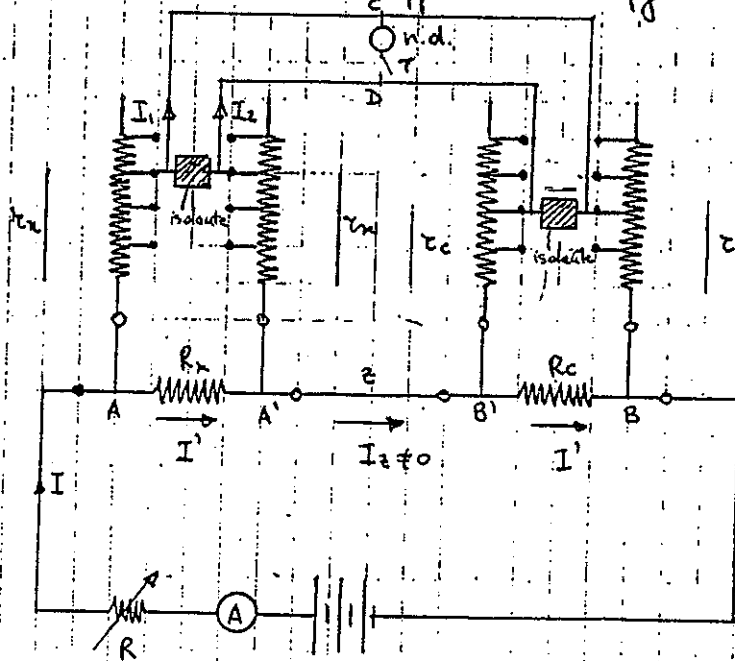
$$i_x = \pm (i_a + i_b + i_c + \sigma)$$

e i_a, i_b, i_c sono grandi, ^{allora} conviene il metodo di sostituzione, che dà:

$$e_x = e_y \frac{Y}{Y-Z} - e_z \frac{Z}{Y-Z} \quad \text{con} \quad e_z = e_a + e_c + e_b = e_a - e_b + \frac{E_{ab}}{\Delta b}$$

PONTE DOPPIO DI THOMSON

È costituito dal circuito rappresentato in figura:



in cui R_x è la resistenza da misurare ed R_c è il campione; entrambi sono attraversati, all'equilibrio, dalla stessa corrente (quella del rivelatore è nulla). R_x ed R_c sono resistenze variabili per mezzo di due cursori.

www.ingonline.biz

È evidente che la condizione di equilibrio viene raggiunta quando la tensione di Thevenin del rivelatore di zero è nulla, cioè quando risulta, a testo T aperto:

$$V_{AC} = V_{AB}$$

Le V_{AC} e V_{AB} esprimibili in base alle relazioni:

$$(1) \quad V_{AC} = V_{AB} \frac{R_x}{R_x + R_c}$$

(1) Le incertezze sugli elementi passivi sono dette tolleranze.

Dal fatto che l'errore di misibilità ϵ_r non è direttamente proporzionale ad I si deduce l'utilità di lavorare con correnti elevate. Occorre tuttavia osservare che R_c , e spesso anche R_x , sono resistori di manganeso, mentre il resto del circuito è costituito da rame. Ora, nelle grandezze $R_{cu}/manganeso$, usano delle leggi a carattere termico, cioè dipendenti dalla differenza di temperatura tra rame e manganeso secondo la legge:

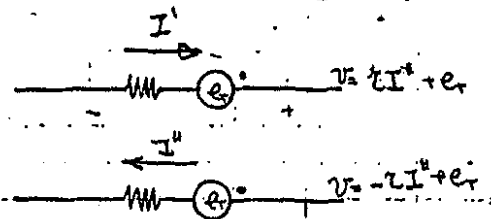
$$\epsilon_r = 1.7 \Delta T \mu V$$

ΔT è a sua volta legata alla produzione di calore per effetto Joule, ovvero dipende da I^2 . Dunque, per correnti elevate la nostra misura è sensibilmente influenzata dalla tensione termica ϵ_r che, dipendendo da I^2 , ha la proprietà di avere verso non dipendente dal verso di I .

Se, dunque, per una corrente I' diretta in un certo verso la condizione di equilibrio è espressa dalle relazioni:

$$(4) \quad R_{x1} = R_c \frac{\epsilon_{x1}}{\epsilon_c} = R_c \frac{\epsilon_x + \Delta \epsilon_x}{\epsilon_c}, \quad \text{caso ideale: } \epsilon_r = 0 \quad R_x = R_c \frac{\epsilon_x}{\epsilon_c}$$

in cui, cioè, ϵ_x subisce una variazione positiva $\Delta \epsilon_x$ rispetto al valore corretto, che annulterebbe la caduta di ϵ_r , allora, per una corrente uguale e opposta: $I'' = -I'$, la condizione di equilibrio è espressa da:



$$(5) \quad R_{x2} = R_c \frac{\epsilon_{x2}}{\epsilon_c} = R_c \frac{\epsilon_x - \Delta \epsilon_x}{\epsilon_c}$$

relazione da cui si vede che ϵ_x deve subire una variazione uguale e contraria a quella del caso precedente. Sommando la (4) e (5) si ottiene che:

$$R_{x1} + R_{x2} = R_c \frac{\epsilon_{x1} + \epsilon_{x2}}{\epsilon_c} = 2 R_x$$

dunque il vero valore di R_x resta determinabile con esattezza anche per correnti elevate, a patto di eseguire due misure invece che una; risulta infatti:

$$R_x = \frac{R_{x1} + R_{x2}}{2}$$

www.ingonline.biz

5.21 VALUTAZIONE DELL'ERRORE DI SENSIBILITÀ

Sia r il valore di resistenza che determina la condizione di equilibrio; modificando lievemente r in $r' = r + \Delta r$ il rivelatore di zero sarà attraversato da una corrente non nulla Δi . Definiamo la SENSIBILITÀ DEL POTENZIOMETRO mediante le 2 formule seguenti:

$$\sigma_{r1} = \frac{\Delta i_{\text{min}}}{\Delta r_{\text{min}}/r} \quad \text{rispetto ad } r$$

$$\sigma_{r2} = \frac{\Delta i_{\text{min}}}{\Delta V_{\text{min}}/\Delta r} \quad \text{rispetto alla f.e.m. del bipolo}$$

Si può dimostrare che, se $\Delta r/r \ll 1$ e $\Delta V_{\text{min}}/V \ll 1$, le due definizioni coincidono e risulta: $\sigma_{r1} = \sigma_{r2} = \sigma_p$. Facciamo vedere che la sensibilità del potenziometro è determinabile, a

preziosare da quella del rivelatore, nei vari punti della scala.

Applicando il teorema di Thévenin agli estremi del rivelatore di zero otteniamo che se $\pm \Delta r$ a valore, si ha:

$$\Delta i = \frac{\Delta E_T}{R_T + R_0} \quad , \quad R_0 = \text{resistenza del rivelatore}$$

con:

$$\Delta E_T = r'I - V_R = (r + \Delta r)I - V_R = r'I - V_R + \Delta r I ; \quad r'I - V_R = 0$$

$$\Delta E_T = I \Delta r$$

e:

$$R_T = r \frac{R-r}{R-r+r} + R_x = r \frac{R-r}{R} + R_x \quad , \quad r \approx r$$

Sostituendo si ottiene:

$$\Delta i = \frac{I \Delta r}{r \frac{R-r}{R} + R_x + R_0} \quad (1) \quad \text{www.ingonline.biz}$$

vero, ponendo:

$$R_p = R_x + R_0 \quad \text{resistenza del circuito in derivazione,}$$

$$\Delta i = \frac{I \Delta r}{r \frac{R-r}{R} + R_p} = I \frac{\Delta r/r}{\frac{R-r}{R} + \frac{R_p}{r}} \quad , \quad 0 < r \leq R$$

La sensibilità del potenziometro risulta quindi espressa da:

$$\sigma_p = \frac{\Delta i}{\Delta r/r} = I \frac{1}{\frac{R-r}{R} + \frac{R_p}{r}} \quad 0 < r \leq R$$

Per le limitazioni cui è sottoposta r abbiamo che σ_p è sempre positiva; inoltre al variare di r decrescono entrambi i termini al denominatore: σ_p è pertanto monotona crescente con r . Per $r=0$ si ha: $R_p/r \rightarrow \infty \Rightarrow \sigma_p = 0$; l'estremo opposto si ottiene per $r=R$; in corrispondenza si ottiene:

(1) I non varia; infatti il circuito derivato è aperto in corrispondenza del n.d.

100

Sostituendo su C si ottiene, all'equilibrio:

$$r_c I_c = E_c \quad ; \quad I_c = \frac{E_c}{r_c}$$

www.ingonline.biz

Sostituendo poi su X si ottiene, al nuovo raggiungimento dell'equilibrio:

$$r_x I_c = E_x$$

Sostituendo I_c della prima relazione alla seconda si ottiene:

$$E_x = \frac{r_x}{r_c} E_c$$

Abbiamo dunque ricavato E_x con un errore porta:

$$e_{E_x} = e_{E_c} + e_{r_x} - e_{r_c} \approx 0$$

E_c è la f.e.m. di una pila campione; pertanto il suo valore è dell'ordine di 1V; può essere, ad esempio: $E_c = 1.0186$, ed è noto con notevole precisione: nel nostro caso l'errore è sulla 6^a cifra; è dunque: $e_{E_c} \sim 10\text{ppm}$.

Se risulta: $E_x \approx 1V$, la misura rientra nei voti e propri metodi di sostituzione; è, questa, la migliore condizione di funzionamento di un potenziometro. In questo risultato minimizziamo gli effetti degli errori su r_x ed r_c . Per poter realizzare con il potenziometro misure di sostituzione con buoni errori di sensibilità si fa di solito in modo da rendere $E_{\text{orig}} = 1 \div 1.5V$.

Il potenziometro è lo strumento principe per effettuare calibrizioni in d.c.; tuttavia come strumento di misura comporta misure molto laboriose, per cui viene usato solo quando è necessario. Tipicamente, per misurare una tensione si calibra, con il potenziometro, un voltmetro, e con questo si effettuano le misure, da correggersi poi con la curva di calibratura.

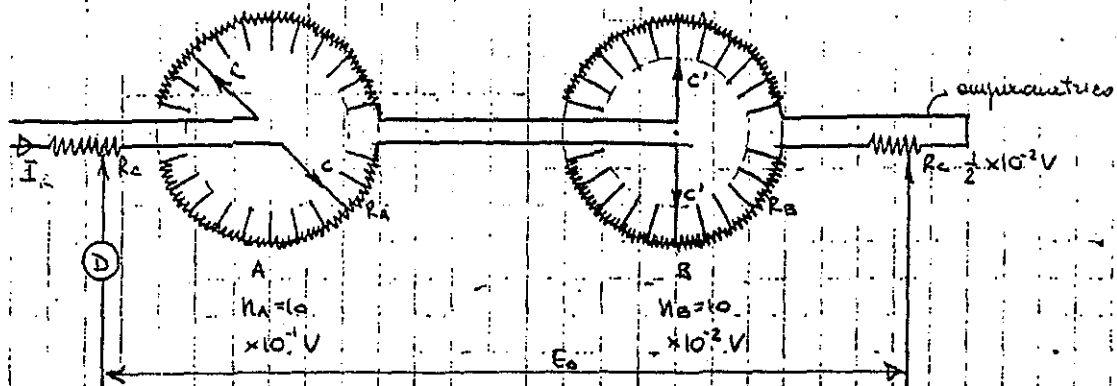
5. PRINCIPALI CAUSE DI ERRORE NEI POTENZIOMETRI

- 1) Derive termiche nei resistori R_1, R_2 . Per minimizzarle si realizzano: resistori indotti in invarpauze.
- 2) Correnti di dispersione. Si minimizzano mantenendo il potenziometro pulito e proteggendolo dall'umidità.
- 3) F.e.m. di origine termica. Risulta, in realtà: $E_s = \mathcal{E}I \pm \mathcal{E}_t$; tuttavia $\mathcal{E}_t$ acquista importanza solo per correnti elevate e piccoli valori della tensione $\mathcal{E}I$.

Esistono anche potenziometri utilizzabili come campioni secondari (molto costosi)

1.2 POTENZIOMETRO A DECADI COMPLEMENTARI.

È un potenziometro in cui ciascuna decade è costituita da resistenze doppie, in genere array in numero dispari, secondo lo schema (semplificato):



È costituito da un certo numero di decadi complementari, la cui caratteristica peculiare è il manovrando l'cursor, resta sempre iscritto un egual numero di resistenze nel circuito amperometrico, mentre varia il numero di quelle che contribuiscono alla E_o , in maniera discreta. Di solito potenziometri di questo tipo sono costituiti da 3 o più decadi complementari; nello schema semplificato che si è riportato sopra ne ho solo 2 portate solo 2. La tensione E_o viene prelevata da 2 resistenze supplementari di valore R_c mediante cursori regolabili in maniera continua in modo da ottenere una regolazione fine della E_o che pertanto risulta espressa da:

$$E_o = E_A + E_B + E_c$$

www.ingonline.biz

È chiaro che deve risultare che ciascuna resistenza della decade A: R_A vale 10 volte la singola resistenza della decade B: dove infatti risultare:

$$1 \cdot \Delta V_A = 1 \cdot R_A I_z = 10^{-1} V$$

$$1 \cdot \Delta V_B = 1 \cdot R_B I_z = 10^{-2} V$$

da cui si ricava:

$$R_B = \frac{1}{10} R_A$$

Se, ad esempio: $I_z = 2 \text{ mA}$, dovremo avere: $R_A = \frac{10^{-1}}{2 \cdot 10^{-3}} = 50 \Omega$; $R_B = \frac{10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3}} = 5 \Omega$ ed R_c complementare (le due resistenze) pari a 5Ω .

Le limitazioni pratiche della precisione di questi strumenti sono dovute al fatto che ogni decade è attraversata dalla stessa corrente I_z ; per avere, pertanto, cadute sulla singola resistenza di ogni decade variabili di un fattore 10 di decade in decade occorre adoperare resistenze anch'esse decrescenti di un fattore 10 tra una decade e la successiva. Ciò comporta, dopo poche decadi, che si debbano realizzare piccole resistenze, di valore, cioè, pari o inferiore ad 1Ω . E questi livelli gli errori dovuti a resistenze di contatto e alle tolleranze

(1) Se dunque tutte le resistenze sono percorse dalla stessa corrente I_z : $I_A = I_B = I_c = I_z$, il valore della singola resistenza è definito dalla caduta di tensione su di essa; risulta, cioè: $R \approx V$.

2) entro $10^{-6} V$

Per far sì che risulti: $I_c = I_a/2$ occorre dimensionare R_B in modo che la resistenza R_a comprese tra i cursori C' e C non sia pari ad R_{ic} ; ne viene che:

$$2R_B = R_{ic} ; \quad R_B = \frac{R_{ic}}{2} = 10 \Omega ; \quad \text{risulta, dunque: } R_B = R_c = 10 \Omega^{(1)}$$

Risalemo a monte, calcoliamo la resistenza di ingresso della decade B; essa è pari a:

$$R_{iB} = 3R_B + 2R_B \parallel R_{ic} = 30 + 20 \parallel 20 = 100 \Omega$$

Ripetendo un ragionamento già fatto otteniamo che, affinché risulti: $I_B = I_a/2$ deve risultare:

$$2R_A = R_{iB} ; \quad R_A = \frac{R_{iB}}{2} = \frac{100}{2} = 50 \Omega = 5R_B, \quad \text{come anticipato.}$$

Si ottiene, infine, che la resistenza di ingresso di A vale:

$$R_{iA} = 3R_A + 2R_A \parallel R_{iB} = 150 + 100 \parallel 100 = 500 \Omega$$

indipendentemente dalle posizioni dei cursori C' e C .

Il potenziometro a divisione di corrente è particolarmente adatto per i seguenti motivi:

- le resistenze decrescono lentamente: abbiamo visto come in 3 stadi il valore minimo: R_c ma: $R_c = 10 \Omega$.
- le resistenze di contatto di C e C' sono di scarso rilievo in quanto in serie a resistenze elevate. (quella di C' non ha importanza perché, all'equilibrio, risulta: $\Delta I = 0$).
- le fusi termiche hanno importanza limitata anche nelle decade più piccole, in quanto sono in serie a cadute di tensione molto più elevate.
- resistenze di una stessa decade tutte uguali.

Il potenziometro a divisione di corrente è usato, in realtà, come divisore di tensione; se consideriamo come grandezza di ingresso la tensione invece che la corrente si vede che ogni stadio realizza, rispetto al precedente, una divisione per 10 della tensione in ingresso; risulta, infatti:

$$V_A = I_A R_{iA} ;$$

$$\text{www.ingonline.biz}$$

$$V_B = I_B R_{iB} = \frac{I_A}{2} \frac{R_{iA}}{5} = \frac{V_A}{10}$$

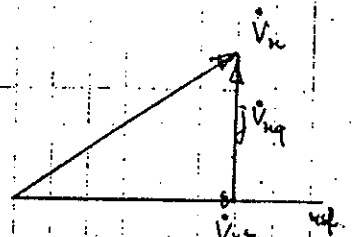
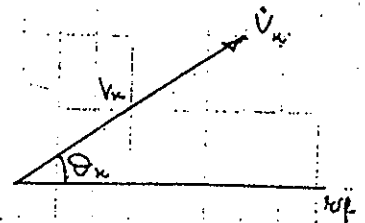
⁽¹⁾ Dunque questo schema costruttivo è tale da far sì che le resistenze di base degli ultimi due stadi siano identiche.

36 POTENZIOMETRI IN C.C. (REGIME SINUSOIDALE)

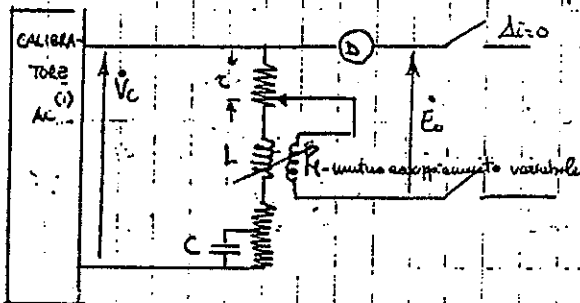
potenziometri di questo tipo si distinguono in:

POTENZIOMETRI A COORDINATE POLARI: determinano la fase del bipolo su cui vengono collegati misurandone il modulo V_x e la fase rispetto ad un riferimento: Φ_x .

POTENZIOMETRI A COORDINATE RETTANGOLARI: di V_x determinano la componente in fase rispetto al riferimento e quella in quadratura con esso.



Un esempio di potenziometro a coordinate rettangolari è quello realizzato secondo lo schema seguente:



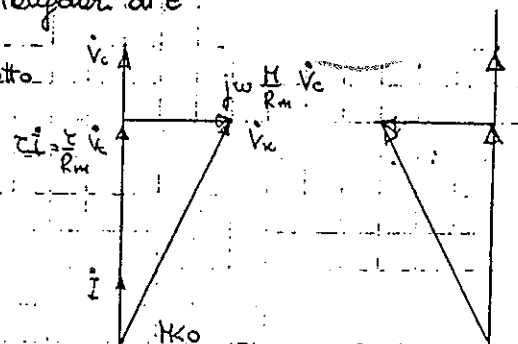
La capacità C è dimensionata in modo da compensare l'effetto dell'induttanza L , come è stato fatto per compensare i reattori. Dunque all'equilibrio, l'effetto di M è nullo ed I_r risulta in fase con la tensione del calibratore, V_c ; M ha, cioè: $I = V_c / R_m$.

Spostando opportunamente il cursore e modificando l'uscita del nucleo opportunamente V_c è possibile variare modulo e fase di E_0 in modo da raggiungere la condizione di equilibrio, alla quale risulta:

$$E_0 = r I_r + j\omega L I_r = V_c \left(\frac{r}{R_m} + j\omega \frac{L}{R_m} \right) = V_x$$

Noti r, L, R_m, ω sono determinate anche le componenti rettangolari di E .

Si osserva che V_c deve variare in modo da poter assumere anche valori negativi (quello in cui V_x sia in ritardo rispetto a V_c):



Il potenziometro in c.c. presenta seguenti vantaggi rispetto a quello in d.c., che lo rendono meno accurato di quest'ultimo:

- La V_c non è determinabile con la stessa accuratezza della pila Weston.
- M è determinabile con accuratezza minore di quella dei resistori.
- Vi sono effetti parassitari dovuti ad f , che interviene come parametro di influenza.

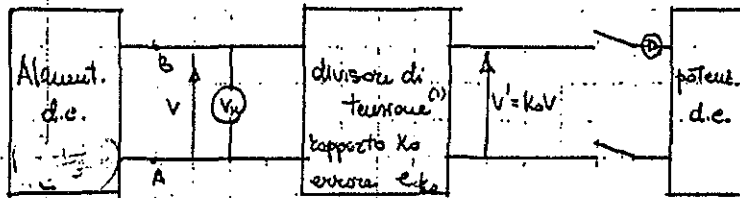
www.ingonline.biz

È una sorgente di tensione, che fornisce livelli di tensione (ed eventualmente frequenza) discreti e selezionabili. Garantisce la forma d'onda, la stabilità della frequenza e del valore delle tensioni e meno di una decina di proprietà.

Ma V è una grandezza reale misurata, si può però scrivere, in base alle ipotesi fatte:

$$e_{V_x} \approx \frac{V_x - V_p}{V_p} \cdot 100 + \frac{V_p - V}{V_p} \cdot 100 \approx \frac{V_x - V_p}{V_p} \cdot 100 + e_{p\%} \approx \frac{V_x - V_p}{V_p} \cdot 100 \quad (2)$$

Vediamo ora come si possa calibrare un voltmetro avente una tensione V_n più elevata; ad esempio, supponiamo che sia $V_n = 100 \text{ V}$. Lo schema elettrico del circuito di misura è il seguente:



$K_0 < 1$; ad es: $K_0 = 0.01$ nel nostro caso

Sia V la vera tensione erogata dall'alimentatore; V_x la lettura dell'UTV, e V_p la misura voltmetrica tramite il potenziometro; la quale misura V' ; l'errore nella misura di V_x risulta per cui:

$$e_{V_x} = \frac{V_x - V}{V'} \approx \frac{V_x - V_p}{V_p} \quad , \quad V' = K_0 V_x =$$

Analogamente al caso precedente si può scrivere:

$$e_{V'} = \frac{V_x - V_p}{V_p} + \frac{V_p - V}{V_p} \approx \frac{V_x - V_p}{V_p} + e_p \quad , \quad e_p = \text{errore del potenziometro nella misura di tensione}$$

per riportare questo errore all'effettivo errore commesso dal voltmetro nella misura di V basta tenere in conto la relazione:

$$V' = K_0 V_x \quad \text{da cui:} \quad e_{V'} = e_{K_0} + e_V$$

e, infine:

$$e_{V_x} = e_{V'} - e_{K_0} \quad (3)$$

www.ingonline.biz

2) Valore tipico è: $e_{K_0} = 50 \cdot 10^{-6}$

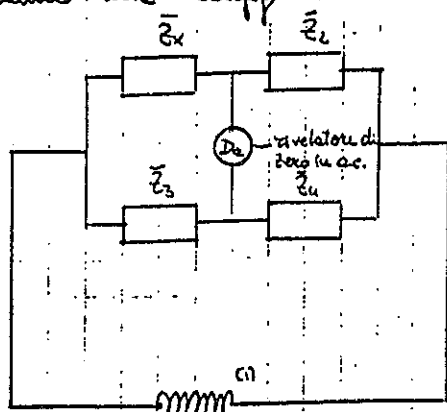
3) esatissimo più a fondo si ripete.

in realtà è: $e_{V_x} = \frac{V_x - V}{V}$ e non: $\frac{V_x - V}{V_p}$

110

5.5 PONTI IN ALTERNATA.

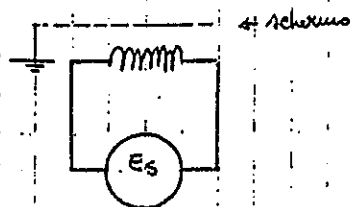
Sono metodi di zero che funzionano in regime sinusoidale. I più comuni sono a 4 lati, ed hanno una configurazione del tipo:



All'equilibrio risulta:

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}_2 \cdot \bar{Z}_3}{\bar{Z}_4}$$

Da questa equazione complice si può ricavare $\bar{Z}_x$ mediante 2 equazioni: reali: una per R_x e l'altra per X_x . Se l'equilibrio non dipende dalla frequenza della rete si dice che il ponte è INDIPENDENTE DA f .



In realtà, anche nei ponti teoricamente indipendenti da f , questa interferisce almeno come grandezza di influenza: modifica, ad esempio, i valori delle resistenze (effetto pelle).

Quasi tutti i ponti utilizzati in pratica appartengono ad una delle 2 categorie che seguono:

- **PONTI A RAPPORTO** se due impedenze adiacenti sono costituite da elementi puri: condensatori o resistori. Le due impedenze adiacenti possono essere $\bar{Z}_3$ e $\bar{Z}_4$ oppure $\bar{Z}_1$ e $\bar{Z}_2$. Si distinguono ulteriormente in:

- **PONTI A RAPPORTO REALE** se gli elementi ^{adiacenti} puri sono entrambi resistori (ponti a rapporto di resistenze) o condensatori (ponti a rapporto di condensatori); si ha, infatti:

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_4} \bar{Z}_2 = K \bar{Z}_2$$

$$\frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_4} = \frac{Z_3}{Z_4} = K \in \mathbb{R}$$

www.ingonline.biz

si: $\bar{Z}_3 = R_3$; $\bar{Z}_4 = R_4$, si ha: $K = R_3/R_4$;

o: $\bar{Z}_3 = \frac{1}{j\omega C_3}$, $\bar{Z}_4 = \frac{1}{j\omega C_4}$, si ha: $K = \frac{C_4}{C_3}$

- **PONTI A RAPPORTO IMMAGINARIO PURO** se gli elementi ^{adiacenti} sono di tipo diverso: un condensatore ed una resistenza.

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_4} \bar{Z}_2 = jK \bar{Z}_2$$

$$\frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_4} = j \frac{Z_3}{Z_4} = jK, K \in \mathbb{R}$$

si: $\bar{Z}_3 = R_3$; $\bar{Z}_4 = \frac{1}{j\omega C_4}$

o: $\bar{Z}_4 = R_4$; $\bar{Z}_3 = \frac{1}{j\omega C_3}$

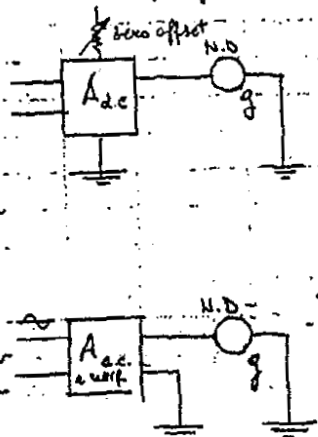
A meno di fenomeni di superconduttività, non è possibile realizzare un induttore puro.

Naturalmente, per poter ricavare R_x ed X_x , i parametri di $\bar{Z}_1, \bar{Z}_3, \bar{Z}_4$ sono noti e variabili in modo da realizzare l'equilibrio.

Trasformatore di isolamento verso terra.

Il parte in questione è costruito dalla General Radio, azienda leader nel settore, e realizza questi 6 punti superando il minor numero di elementi passivi - per ragioni di economia, dato l'elevato costo di elementi passivi di qualità e valore ripetibile -; dunque si fa largo uso di commutatori per ottenere le diverse configurazioni. Questo parte determina i tipi mediante due schemi equivalenti: serie e parallelo. È costituito dai seguenti elementi principali:

- elementi passivi
- una pila da 6 Volt per la ^{alimentazione} d.c., che alimenta anche un oscillatore a frequenza fissa di 1 KHz, per la sintonizzazione d.c.
- un rivelatore di zero, costituito da un galvanometro d.c. pilotato da un amplificatore d.c.: Quest'ultimo è un amplificatore a pila di amplificare anche le componenti continue; va calibrato frequentemente per annullare la componente di tensione continua che comunque produrrebbe per squilibri dei transistori (zero offset).
- in alternativa il rivelatore di zero può essere pilotato da un amplificatore e.e. posto a monte di un rettificatore (condensatore di qualità). L'amplificatore in questione è a band pass, in modo da poter lavorare anche con un oscillatore esterno, a frequenza diversa da 1 KHz, ma che la sensibilità del sistema venga a dipendere da f_{centro} i limiti di "protezione" della banda).



1.1 FATTORE DI PERDITA DI UN CONDENSATORE

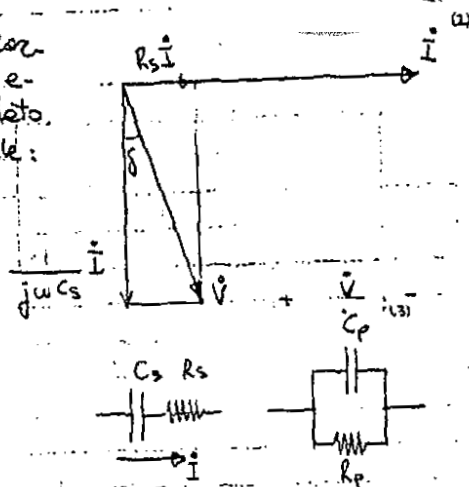
In un condensatore reale l'angolo di fase tra tensione e corrente non è mai di 90° esatto. Lo porta ad una schema equivalente serie e ad una parallelo che sono riportati a lato. Considerando lo schema serie: ammesso $\vec{I}$ come riferimento, $\vec{V}$ vale:

$$\vec{V} = \frac{1}{j\omega C_s} \vec{I} + R_s \vec{I} = \frac{1}{j\omega C_s} (1 + j\omega R_s C_s) \vec{I}$$

da cui:

$$\vec{Z}_s = \frac{1}{j\omega C_s} (1 + jD_s)$$

www.ingonline.biz



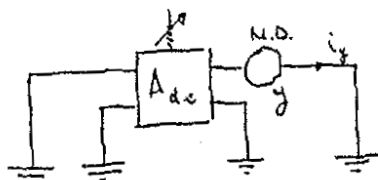
in cui:

$$D_s = \omega R_s C_s = \tan \delta \text{ è detto FATTORE DI PERDITA del condensatore nella schema serie}$$

1) Circuito p.n. il condensatore. Si comporta in maniera analoga ad un elemento ideale tanto più ci si avvicina alla condizione: $C_p \approx C_s$ $\therefore R_s \rightarrow 0$, $R_p \rightarrow \infty$.

2) Assumiamo come parametro di riferimento quella che ammette gli stessi valori nei due elementi del modello: la corrente nel modello serie, la tensione nel modello parallelo.

Schema di calibrazione:



ripetizione da effettuarsi in modo che risulti $y=0$.

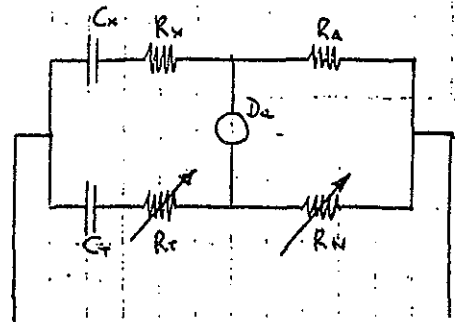
116

5.3 MISURE DI BIPOLI DI TIPO CAPACITIVO.

Passiamo ora a esaminare in dettaglio il ponte polivalente della General Radio. Come accennato, è composto da 2 ponti per le misure dei condensatori: il ponte di Wien - De Sauty e il ponte di Gott.

PONTE DI WIEN DE SAUTY

Gia menzionato, è un ponte a rapporto di resistenze. Nello schema a lato sono riportati gli elementi che lo costituiscono in questa realizzazione a livello industriale, e che sono mantenuti nei ponti che seguono. La freccia indica i componenti facilmente variabili; gli altri variano con risoluzione minore, e sono usati per produrre variazioni di un fattore 10 del punto di equilibrio del ponte.



Questo ponte è utilizzato per misure di bipoli capacitivi aventi un fattore di perdita ^{BASSO, OVEVERO} compreso tra:

$$0 \leq D \leq 1;$$

per fattori di perdita più elevati si utilizza il ponte di Gott; questa scelta è determinata da semplici motivi di ordine economico, in quanto permette di limitare lo stock di resistenze R_t da preparare⁽¹⁾.

All'equilibrio si ha:

$$\bar{Z}_x = \frac{R_A}{R_N} \bar{Z}_t$$

www.ingonline.biz

ovvero:

$$\frac{1}{j\omega C_x} (1 + jD_x) = \frac{R_A}{R_N} \frac{1}{j\omega C_t} (1 + jD_t)$$

che si scinde nelle 2 equazioni (su parte reale e parte immaginaria dei due membri):

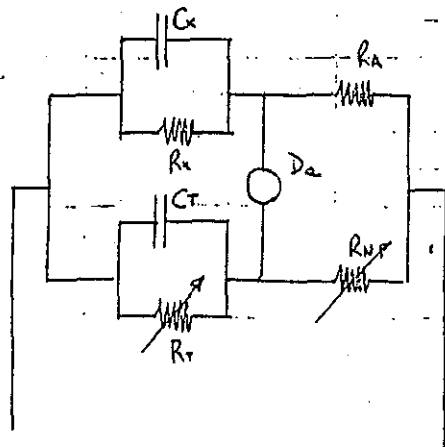
$$\begin{cases} C_x = C_t \frac{R_N}{R_A} \\ D_x = D_t = \omega C_t R_t \end{cases}$$

sono entrambe equazioni indipendenti dalla frequenza (per la 2^a basta osservare che risulta: $D_x = \omega C_x R_x$; quindi ω si semplifica e si ricava: $C_x R_x = C_t R_t$).

PONTE DI GOTT.

In questa realizzazione consente di misurare fattori di perdita compresi tra:

$$0.1 \leq D \leq 50$$



⁽¹⁾ Nel ponte di Gott ad R_t precedo con i spande D elevato, al contrario di quel che accade nel ponte di De Sauty; pertanto gli stessi resistori riproposti per misure di piccoli valori di D possono venire utilizzati per misurare valori elevati.

equazioni che si ricavano dalle equazioni: 110

$$L_x = R_A R_N C_T$$

$$Q_x = \frac{1}{D_T} = \frac{1}{\frac{1}{\omega C_T R_T}} = \omega C_T R_T$$

Quale in questo caso non dipende da ω .

PONTE DI HAY

Il ponte di Hay è diverso da quello di Maxwell, relativamente agli schemi degli elementi non puri; viene utilizzato per valori di Q compresi tra:

$$1.5 \leq Q \leq 100$$

La condizione di equilibrio è, in questo caso, espressa da:

$$\frac{\bar{Z}_x}{R_N} = \frac{R_A}{\bar{Z}_T}$$

ovvero: $Y_x = \frac{Z_T}{R_A R_N}$;

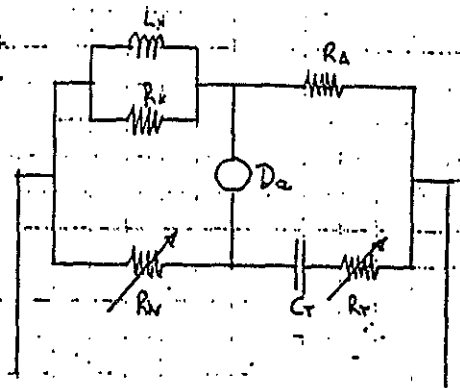
$$\frac{1}{j\omega L_x} \left(1 + \frac{1}{Q_x}\right) = \frac{1}{R_A R_N j\omega C_T} (1 + jD_T)$$

Da qui si ricavano le 2 equazioni di equilibrio reali, indipendenti da ω :

$$L_x = C_T R_A R_N$$

$$Q_x = \frac{1}{D_T} = \frac{1}{\omega C_T R_T}$$

www.ingonline.biz



MISURA DI RESISTENZE E CONDUTTANZE IN d.c.

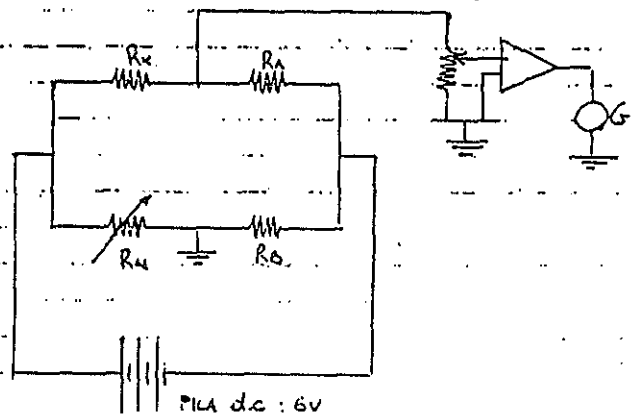
PONTE DI WHEATSTONE

La resistenza con ponti in corrente del tipo di quello di Wheatstone, in cui il rivelatore di ϕ è un galvanometro, un potenziometro pilotato da un generatore in corrente. Rispetto agli altri ponti è stato introdotto un elemento nuovo: il resistore R_0 .

All'equilibrio si ha:

$$R_x = \frac{R_A R_N}{R_0}$$

In questo ponte si misurano resistenze fino al valore di 1 M Ω . Per valori superiori si misura G , ricorrendo ad un altro ponte di Wheatstone, in cui, però, si siano modificate le posizioni degli elementi attivi.



Per gli accoppiamenti capacitivi con elementi posti a potenziali diversi da zero si può ricorrere, invece, ad uno schermo elettrostatico, ovvero ad una gabbia di Faraday, costituita da un buon conduttore (generalmente, per ragioni di costo, Alluminio).⁽¹⁾

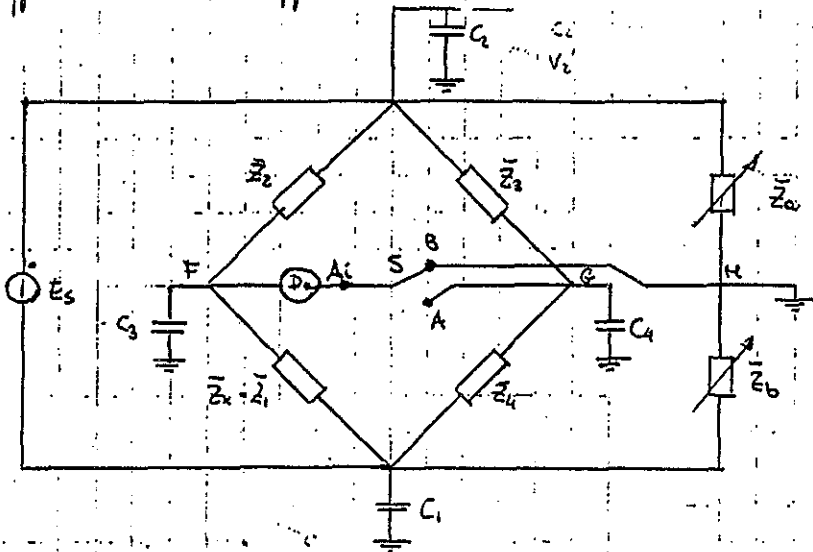
Nessuno schermo è, tuttavia, in grado di annullare gli accoppiamenti capacitivi verso terra per i quali si dovrà, pertanto, ricorrere ad altri metodi che ne annullino gli effetti. Supponiamo, quindi, che i nostri schermi abbiano zero:

$$\phi_1 \approx \phi_2 \approx 0$$

$$V_{i1} \approx V_{i2} \approx 0$$

(e di conseguenza: $V_1 \approx V_2 \approx 0$, ma queste condizioni hanno ^{MINORI} impatti

Il nostro circuito si è ridotto al Tracciato riportato in blu in figura; per eliminare gli effetti dovuti ad accoppiamenti verso terra ricorriamo ad un secondo ponte, disposto in rosso.



www.ingonline.biz

abbiamo dunque i due ponti: $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3, \bar{Z}_4$ e $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3, \bar{Z}_4$. Poniamo lo switch S nella posizione B; si varia $\bar{Z}_3$ e $\bar{Z}_4$ in modo da porre il secondo ponte in condizioni di equilibrio, ovvero che $V_{FH} = 0$, cioè il punto F è a terra. A questo punto poniamo lo switch S in posizione A; variando $\bar{Z}_3$ e $\bar{Z}_4$ posso realizzare anche l'equilibrio del ponte superiore; in tali condizioni risulta anche: $V_{GF} = 0$. Dunque, operando in modo da porre in equilibrio entrambi i ponti contemporaneamente⁽²⁾, poniamo i nodi G ed F a terra; in queste condizioni C_3 e C_4 sono sottoposti ad una ddp nulla e, quindi, non influenzano l'equilibrio del ponte superiore. Non resta che controllare le capacità C_2 e C_1 , le quali, però, costituiscono dei carichi posti in parallelo al ponte; pertanto, hanno effetti solo sull'elementatore e non alterano l'equilibrio del ponte.

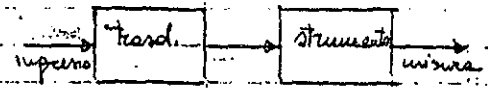
(1) È un risultato che, al solito, si può ottenere solo con procedimenti di tipo iterativo.

(2) Si possono anche realizzare schermi bi-valenti; ad esempio, un superconduttore è un ottimo schermo elettrostatico, ma anche uno schermo magnetico perfetto: emette infatti un magnetismo $\mu \neq 0$, ma esso il campo magnetico genera delle correnti vorticali di entità tale da produrre un campo uguale ed opposto, annullando così l'effetto complessivo. Uno schermo in ferro è un buon schermo magnetico e, secondariamente, anche un discreto schermo elettrico, almeno a certe frequenze.

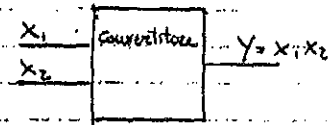
6- TRASDUTTORI

6.1 GENERALITÀ

Sono dispositivi che trasformano opportunamente la grandezza da misurare, in modo da conferirle natura e valore adatti allo strumento vero e proprio, secondo lo schema di principio:

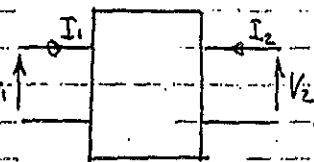


A seconda del campo di impiego sono identificati con differenti denominazioni: TRASDUTTORI, SENSORI, CONVERTITORI, eccetera. In particolare, con convertitore indichiamo un trasduttore che modifica la natura della grandezza da misurare;



Di particolare importanza per i nostri studi sono i trasduttori di grandezze elettriche, in cui ingresso ed uscita sono entrambe grandezze elettriche (in p.m. correnti e/o tensioni), non necessariamente della stessa natura e del tutto ed uscita sono grandezze della stessa natura. Il trasduttore ne può modificare il valore o l'impedenza associata. Solitamente l'uscita di un trasduttore di questo tipo è una tensione; più raramente una corrente.

Un trasduttore di tipo elettrico, se lineare, può essere rappresentato con un doppio bipolo, per il quale le grandezze elettriche in ingresso sono legate a quelle in uscita da relazioni che fra condizioni di regime sinusoidale sono del tipo:



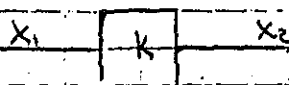
$$\begin{cases} \vec{V}_1 = \vec{A} \vec{V}_2 + \vec{B} \vec{I}_2 \\ \vec{I}_1 = \vec{C} \vec{V}_2 + \vec{D} \vec{I}_2 \end{cases}$$

www.ingonline.biz

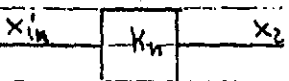
in cui $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ sono parametri complessi, in genere dimensionali, dipendenti da f .

CARATTERISTICHE STATICHE DI UN TRASDUTTORE LINEARE

Sono quelle riferite al regime sinusoidale: $f = \omega$ (ricordando $\omega = 2\pi f$): la più importante è la relazione ingresso/uscita, ricavata in condizioni di funzionamento universalmente determinate (temperatura, frequenza, eccetera). L'ipotesi di linearità del dispositivo consente di definire un fattore di conversione del trasduttore: K , in genere dimensionale, che, nelle condizioni di funzionamento stabilite e l'averne della risposta in frequenza; infatti, moltiplicando K per l'uscita si ricava l'ingresso del trasduttore.



Naturalmente K non è esattamente noto, ma ad esso si attribuisce un valore nominale: K_n . L'errore ed quale, noto X_2 , si può ricavare X_1 , è funzione solo dell'errore con cui conosciamo K .



K_n è di solito un numero reale; ha quindi senso attri-

(1) Se l'uscita è una tensione sinusoidale l'impedenza associata al trasduttore lineare è $Z = V/I_n$, nelle condizioni di uscita in cortocircuito.

Da cui, infine:

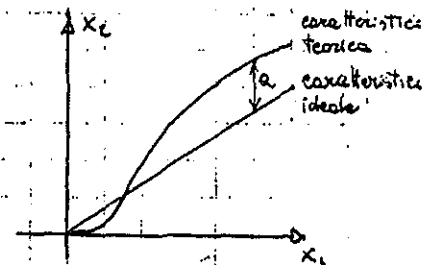
$$\bar{e} = \frac{\bar{x}_{in} - x_1}{x_1} = \frac{\Delta x_{ie}}{x_1} + j \frac{\Delta x_{iq}}{x_1} \approx \frac{\bar{x}_{in} - x_1}{x_1} + j \frac{x_{in}}{x_1} E \approx \eta + jE \quad (x_{in}/x_1 \sim 1)$$

5.3 PRINCIPALI CARATTERISTICHE DI UN TRASDUTTORE

- RANGE: intervallo ^{dei valori} ammissibili di x_1 ; ha due estremi; spesso l'inferiore è zero.

- NON LINEARITÀ: introduce un errore detto ERRORE DI NON LINEARITÀ, o, più brevemente, LINEARITÀ; rappresenta lo scostamento massimo, rispetto ad x_1 , tra caratteristica reale ed una ben definita caratteristica teorica:

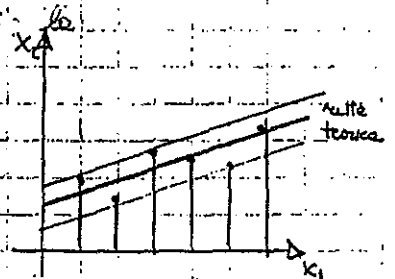
$$L = \frac{\sigma}{F.S.s.} \cdot 100$$



Per determinare la caratteristica teorica si possono adottare 4 criteri:

- 1) retta che unisce gli estremi teorici della caratteristica;
- 2) retta che unisce gli estremi sperimentali;
- 3) retta di regressione (scelta di modo da minimizzare lo scarto quadratico medio tra caratteristica teorica e caratteristica reale);
- 4) sfruttando il diagramma di dispersione: una volta che si siano rilevate le uscite corrispondenti ad un numero finito di riprese si tracciano 2 parallele che contengano tutti i punti così ottenuti; la caratteristica teorica è la parallela a queste ed equidistante da esse.

Il metodo più valido è il 3); più usati, per ragioni di tempo, sono il 2) ed il 4). (quest'ultimo anche con un tracciamento spesso approssimativo delle 2 parallele).

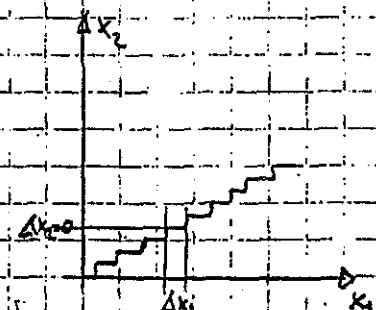


- RISOLUZIONE: la caratteristica reale non è, in effetti, una curva con andamento regolare come quello sopra riportato, ma presenta un andamento del tipo:

Vi sono, cioè, degli intervalli Δx_1 dell'ingresso che non producono variazioni dell'uscita; la risoluzione del sistema è definita come:

$$R = \frac{\Delta x_{1max}}{x_{1fs}} \cdot 100$$

in cui Δx_{1max} è il massimo intervallo Δx_1 che non produce variazioni dell'uscita.⁽¹⁾



(1) o ad x_1 ; neppure la unità si ottengono risultati equivalenti.
(2) La risoluzione è determinata da pochi nei sistemi trasduttori meccanici e da limiti di rumore.

-BANDA DI FREQUENZA: è l'intervallo di frequenze entro cui gli errori su ampiezza ed angolo del trasduttore, cioè gli errori di ampiezza ed angolo introdotti dall'approssimazione K_n , restano entro limiti prestabiliti. È, in realtà, molto più stretta della larghezza di banda, che tollera errori molto maggiori di quelli ammissibili in pratica.

6.4. CARATTERISTICHE DINAMICHE DI UN TRASDUTTORE

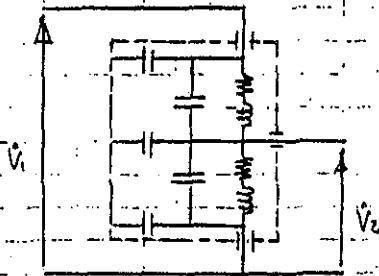
Sono le caratteristiche che descrivono l'andamento dell'uscita del trasduttore per un ingresso x_i rapidamente variabile. Il comportamento dinamico di un trasduttore lineare è descrivibile dalla sua f.t.t.; tuttavia, per semplicità di procedura si preferisce riferirsi alla risposta al gradino unitario o alla risposta armonica. Quest'ultima permette di determinare lo spettro dell'uscita a partire da quello dell'ingresso; se l'ingresso non contiene componenti frequenziali a frequenze troppo elevate si possono adottare per il trasduttore modelli semplificati del 1° o del 2° ordine (l'influenza dei poli più lontani dall'origine viene trascurata).

Nello studio della risposta a gradino si vede che, se il trasduttore ha una f.t.t. del 1° ordine, la sua risposta è esattamente definita dal fattore di conversione K e dalla costante di tempo T .

Per i sistemi di ordine superiore al primo si modella approssimativamente la risposta al gradino tenendo conto delle seguenti grandezze:

- tempo di salita: tempo impiegato dalla risposta a passare dal 10% al 90% del valore finale;
- tempo di assestamento: tempo oltre il quale l'oscillazione picco-picco residua è inferiore ad un valore prefissato;
- tempo di risposta: tempo impiegato dalla risposta a passare da x ad una certa percentuale (di solito il 96% del valore finale);
- overshoot o massima sovraccarica della risposta rispetto al valore di regime, di solito riferito al valore di regime stesso.

Vediamo come si modifica lo schema di un divisore resistivo nell'impiego in a.c. per alte tensioni. Si ottiene:



In genere non è difficile realizzare il divisore in maniera tale da avere una distribuzione uniforme degli elementi parassiti: in meno e, quindi, ancora la validità della condizione (1).

6.1 DIVISORI A RAPPORTO VARIABILE: CARATTERISTICHE

Una parte dei divisori impiegati ha la possibilità di variare il rapporto di trasformazione. Le principali caratteristiche dei divisori di questo tipo sono:

- linearità (in luogo dell'accuratezza)
- risoluzione
- impedenza di ingresso
- impedenza di uscita
- banda di frequenza

Trascuriamo la linearità, già trattata per i trasduttori in generale. Per il concetto di risoluzione conviene ricordare che tipicamente un divisore di tensione è costituito da un certo numero di decadi; il passo dell'ultima decade è la risoluzione del trasduttore. Ad esempio, per un dispositivo con 3 decadi:

A	B	C
$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-3}$

www.ingonline.biz

La risoluzione è di 10^{-3}

- L'impedenza di ingresso è valutata supponendo che il circuito dell'uscita sia aperto, vale:

$$\bar{Z}_i = \bar{Z}_a + \bar{Z}_b$$

- L'impedenza di uscita è valutata ipotizzando che l'ingresso sia prodotto da un generatore di tensione ideale; vale, pertanto:

$$\bar{Z}_u = \bar{Z}_a // \bar{Z}_b = \frac{\bar{Z}_a \bar{Z}_b}{\bar{Z}_a + \bar{Z}_b}$$

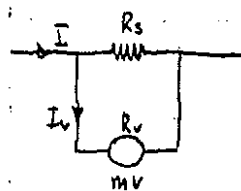
Tenendo conto che $K_0 = (\bar{Z}_a + \bar{Z}_b) / \bar{Z}_b$ si ricorre, con semplici passaggi:

$$\bar{Z}_u = \frac{\bar{Z}_a}{K_0} = \frac{\bar{Z}_i - \bar{Z}_u}{K_0} = \frac{\bar{Z}_i}{K_0} \left(1 - \frac{\bar{Z}_u}{\bar{Z}_i} \right) = \frac{\bar{Z}_i}{K_0} \left(1 - \frac{1}{K_0} \right) = \bar{Z}_i \frac{K_0 - 1}{K_0^2}$$

con $K_0 = K_0 e^{10^k}$ - fattore di compressione esemplare

sempre con lo stesso strumento, in modo che ne sia definito il fattore moltiplicativo: $m = (R_s + R_v)/R_s$. La corrente che circola nel circuito vale, allora:

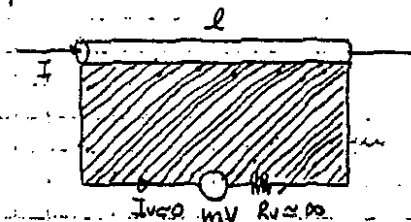
$$I = m I_v = m \frac{V}{R_v} \quad (1)$$



662 - DERIVATORI IN C.C.

Occorre considerare gli errori introdotti dalla frequenza ovvero l'effetto pelle e l'effetto di prossimità. Supporremo, per semplicità, di poter considerare il voltmetro come un circuito aperto.

Sia: $R_{so} = \rho \frac{l}{S}$ la resistenza in d.c. dello shunt; in c.c., come noto, la sua resistenza risulta: $R_s + R_{so}$. Per effetto del flusso del campo magnetico concatenato con la spira del voltmetro (2) si ha che la tensione misurata da questa risulta:



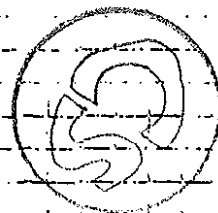
$$V = R_{so} I + j\omega \Phi$$

risostituendo Φ con un effetto di mutua induzione, si ricava:

$$V = R_{so} I + j\omega M I = R_{so} I \left(1 + j\omega \frac{M}{R_{so}} \right)$$

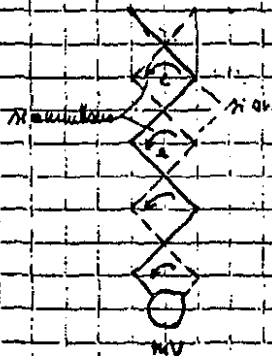
in termini di valori efficaci questa relazione diviene:

$$V = R_{so} I \sqrt{1 + \left(\frac{\omega M}{R_{so}} \right)^2}$$

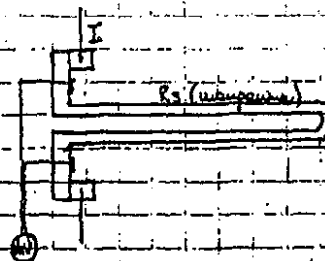


Se d.c. si avrebbe, come sappiamo: $V = R_{so} I$; si evidenziano cosí gli errori dovuti all'effetto pelle e all'effetto di prossimità (che introduce anche un errore di fase). Per approssimare la relazione pratica di questo circuito si ricorre allo schema riportato a lato:

L'area equivalente della spira si ridotta per la porzione superiore della shunt usata per l'uso di un cavo intrecciato (cavo simmetrico) per il collegamento del voltmetro.



Il cavo simmetrico si realizza con un numero pari di adiacenti tutti uguali, in modo da compensare la pelle che si genera in essi (vedi figura a lato).



www.ingonline.biz

(1) Per R_v sufficientemente elevata si riporta il caso precedente: $m = \frac{R_v}{R_s}$; $I = \frac{R_v}{R_s} \frac{V}{R_v} = \frac{V}{R_s}$

(2) Si supponeva notevole per correnti elevate.

I trasformatori di misura servono ad adattare al range degli strumenti di misura il valore della grandezza da misurare; pertanto uno dei motivi per cui vengono utilizzati è che servono da ADATTATORI DI RANGE;

Il rapporto di conversione è, nei due casi:

$$TV : K = \frac{V_1}{V_2} \quad V_1 = KV_2$$

$$TA : K = \frac{I_1}{I_2} \quad I_1 = KI_2$$

in entrambi i casi è definito dal rapporto di conversione teorico che, per un T.V. risulta:

$$TV : K_t = \frac{N_1}{N_2} + K$$

mentre in un TA vale:

$$TA : K_t = \frac{N_2}{N_1} + K$$

in entrambi i casi però K dipende dal numero di spire nei due avvolgimenti del trasformatore; si possono allora costruire trasduttori su cui il rapporto spira possa assumere più valori distinti, in modo da ottenere più rapporti di conversione e da utilizzare, quindi, un unico strumento per misure di tensioni o correnti di qualsiasi valore. Un accorgimento di questo tipo consiste, infatti, nel fornire a ciascun esemplare con un unico strumento è possibile misurare grandezze appartenenti ad un range di valori molto ampio.

Per convenzione il valore della tensione nominale di uscita dei T.V. e della corrente nominale di uscita dei TA è standardizzato e vale:

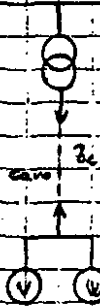
$$TV : V_n = 100V \quad \text{con fattore di conversione nominale: } K_n = \frac{V_n}{V_m} + K + K_t$$

$$TA : I_n = 5A \quad \text{con fattore di conversione nominale: } K_n = \frac{I_n}{I_m} + K + K_t$$

Per TA è stato introdotto recentemente anche un nuovo standard $I_n = 1A$, ancora poco diffuso, tale da permettere l'uso dei TA anche con strumenti numerici, per i quali è preferibile lavorare con basse correnti.

Come sappiamo, se un trasformatore l'avvolgimento di ingresso è galvanicamente separato (come isolato) da quello di uscita; dunque V_m può essere anche una tensione molto elevata fissata ricorrendo che $V_n = 100V$. Un secondo motivo per cui sono preferibili i trasformatori di misura è dunque la sicurezza: l'operatore può misurare tensioni V_m anche molto elevate lavorando su tensioni V_n relativamente basse; i rischi in caso di procedure errate o di guasti risultano quindi molto limitati.

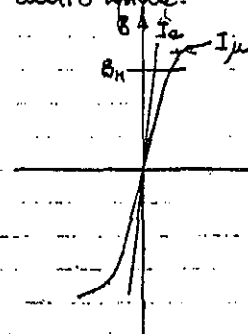
L'uso di un trasduttore di questo tipo permette anche di dislocare la stazione miselaborazione in un locale lontano dall'alta tensione: l'impedimento del cavo di collegamento, infatti, non disturba l'accuratezza del trasduttore, come vedremo.



(1) Qui V_m e I_m sono tensione e corrente nominale nel circuito di ingresso del trasduttore, rispettivamente un T.V. e un TA. Differenza dalle X_m introdotte in precedenza, in questi casi non sono che i valori che per un esemplare usato, il rapporto di conversione fosse K_n .

Anzitutto è nostro interesse far sì che K dipenda il meno possibile da queste quattro condizioni al contorno; per raggiungere questo risultato si devono seguire 2 tipi di accorgimenti: quelli intrinseci al trasduttore, che, in quanto tali, sono demandati al costruttore del dispositivo; quelli estrinseci al trasduttore, che vanno adottati dall'utente:

- accorgimenti intrinseci: per minimizzare le cadute di tensione interne al trasduttore occorre minimizzare R_1, R_2, X_{d1}, X_{d2} , ed anche $I_0 = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}$. Per minimizzare I_a bisogna realizzare il nucleo con un materiale a basse perdite; per minimizzare I_p occorre che il materiale ferromagnetico abbia una curva di magnetizzazione molto ripida:



Le due curve riportate nel diagramma a lato devono dunque essere quanto più ripide possibile. Il valore massimo di B : B_m è prossimo al massimo della caratteristica di magnetizzazione, ma inferiore ad esso; pertanto la I_p si mantiene abbastanza piccola in questo tipo di trasduttori.

Un materiale che realizza un ottimo compromesso tra prezzo e prestazioni nel nostro caso è costituito da laminari di lega al silicio e cristalli orientati.

Naturalmente, per minimizzare R_1 ed R_2 le sezioni dei cavi devono essere esuberanti rispetto a quel che sarebbe necessario per fare funzionare lo stesso dispositivo come trasformatore di potenza (a parità, quindi, di I_1 e I_2).

- accorgimenti estrinseci: consistono, essenzialmente, nel far sì che Z_2 sia maggiore di un valore minimo, dato da:

$$Z_{el} \leq Z_2 \leq \infty$$

ed in presenza di tali valori che può assumere il suo argomento: φ_2

Anche in tutti questi accorgimenti vengono presi in considerazione al contempo ad avere una dipendenza non nulla dalle condizioni di utilizzo; rispetto al fattore di conversione necessario dovrà dunque accettare la possibilità che ci siano un certo errore di rapporto ed un certo errore di angolo ϵ e θ e possono essere ricavati dal circuito equivalente del trasformatore, ma si tratta di un procedimento tecnico che, purtutto, evitiamo.

www.ingonline.biz

Il tipico risultato: $B_m = 0.8 + 1 \text{ Tesla}$
 $B_0 = 0.8 + 1 \text{ Tesla}$
 $I_p = \frac{1}{\sqrt{2}}$

è evidente che alla condizione:

$$0 \leq I_2 \leq I_{2L}$$

corrisponde la condizione sulla prestazione $P^{(1)}$:

$$0 \leq P \leq P_n$$

Sostituendo nella (1) la relazione che lega I_{2L} e Z_{2L} : $I_{2L} = \frac{V_{2n}}{Z_{2L}}$ si ricava che P_n è inversamente proporzionale a Z_{2L} :

$$P_n = \frac{V_{2n}^2}{Z_{2L}} = \frac{10^4}{Z_{2L}}$$

Es.: Se $P_n = 10$ W e $V_A = 100$ V, il minimo valore ammissibile di impedenza di carico risulta:

$$Z_{2L} = \frac{10000}{20} = 500 \Omega$$

ed è, ovviamente, piccolo.

Da questo, vista finora, risulta evidente che la presenza di un lungo collegamento tra IV e strumento non influisce sensibilmente sull'accuratezza del trasduttore, così come era stato precedentemente anticipato, in quanto provoca solo lievi variazioni (positive o negative a seconda del tipo di carico che introduce) dell'impedenza di carico complessiva Z_2 .

www.ingonline.biz

Dipendenza di K dal fdp del carico.

Supponiamo ora che del carico vari solamente il fdp $\cos \varphi_c$, mantenendo Z_2 invariata; allora con ottima approssimazione, anche la corrente I_2 (e, di conseguenza, anche V_2) è costante. Il diagramma fasoriale del IV subisce però, nel complesso, una rotazione Δ :

$$\cos \varphi_c \rightarrow \cos \varphi_c' ; \varphi_c' > \varphi_c$$

la medesima rotazione, ipotizzando di mantenere costante V_2 , sarà, per tutte le grandezze, in senso orario.

Il valore di questa rotazione sarà uguale per tutti i fasori; ad esempio, I_2 ruoterà di $\varphi_c' - \varphi_c$, mentre E_2 , conservando essenzialmente con V_2 , subirà solo una piccola rotazione. Di conseguenza anche le rotazioni di φ_1 , I_1 , I_p , I_{p0} saranno costanti.

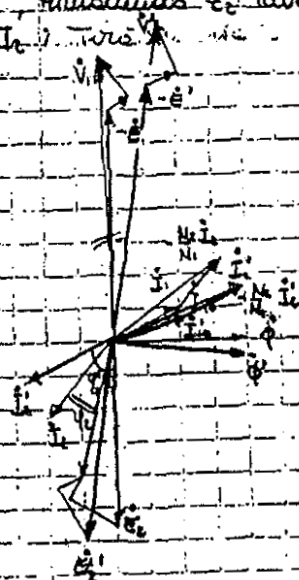
Dal diagramma si vede che, nel caso di una rotazione in senso orario, ed entro certi limiti, facilmente determinabili, I_1' , ruotando più di I_1 , tende a portarsi in fase con questa, producendo quindi un aumento di I_1 , quindi di V_1 e, infine, di K .

Quindi, se l'errore di rapporto γ che l'errore d'auto $E^{(1)}$ varia con $\cos \varphi_c$, è dunque, osservando su

per le delle limitazioni anche in $\cos \varphi_c$. Si trova che si possono ritenere valide le condizioni: $0 \leq \cos \varphi_c \leq 1$ (in ritardo).

o) V_1 e V_2 non subiscono rotazioni di angoli uguali.

a) Si utilizza come una potenza apparente: $[P] = VA$.



Dipendenza di K dalla frequenza della tensione in ingresso.

Il problema può essere visto sotto 2 punti di vista: quello della porta di uscita - in cui si suppone che V_e non vari - , e quello della porta di ingresso, in cui si suppone che V_e sia costante. In entrambi i casi supporremo che f subisca una piccola variazione rispetto al valore iniziale: ad esempio: $f' = 1.1 f$.

1) Possiamo fare in modo che la modifica di f non modifichi l'impedenza del carico - il carico dovrà essere resistivo o d.t.v. dovrà colpire, nei 2 casi, 2 circuiti diversi, tali da soddisfare la nostra condizione -
Sia, dunque:

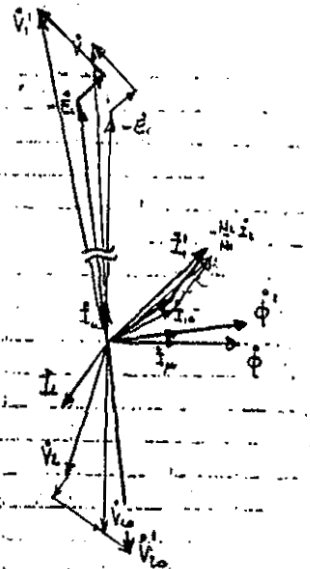
$$\bar{Z}'_{2e} = \bar{Z}_{2e}$$

Se supponiamo che risulti, inoltre:

$$\bar{I}'_e = \bar{I}_e$$

dovrà risultare anche:

$$V_e = V_e$$



L'aumento di f provoca un aumento delle cadute reattive; le conseguenze su V_o sono un aumento del modulo ed una rotazione del fasore in senso antiorario. Di conseguenza la stessa sorte subirà ϕ e, quindi I_o . Essendo la rotazione di I_o piccola e antioraria, questo fasore porterà in fase con V_e un I_o che per l'effetto di fase ritardata, l'effetto che la farà anche ruotare in senso antiorario. Infine V_e aumenterà e ruoterà, ma per l'aumento delle reattanze che per l'aumento e rotazione di I (si veda il diagramma riportato).

2) Supponiamo ora, invece, che V_e sia invariante; si può allora sfruttare la relazione approssimata:

$$V_e \propto E = \omega N_1 \phi = 2\pi f N_1 \phi$$

Se V_e è costante si vede che una variazione positiva di f ne produce una negativa di ϕ .

In entrambi i casi risulta evidente che i T.V. non sono in grado di funzionare a frequenze diverse da quelle nominali che risulta:

$$f_{na} = 50 \text{ Hz}$$

europa

www.ingonline.biz

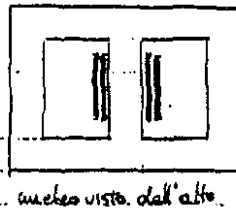
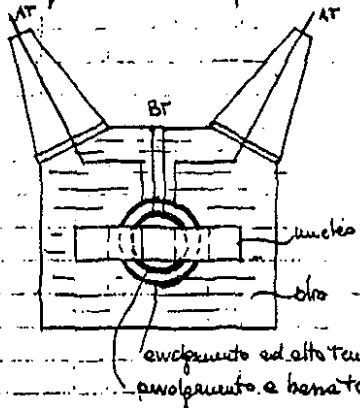
$$f_{na} = 60 \text{ Hz}$$

USA

in questo le variazioni di K risultano troppo elevate

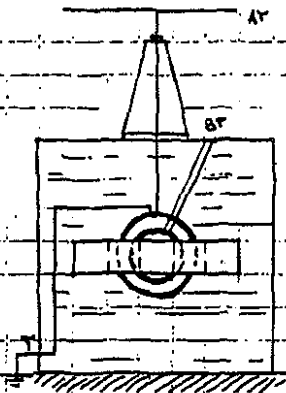
6.92 T.V. PER MEDIE TENSIONI (1 KV ÷ 30 KV)

Sono trasformatori di tensione aventi: $U_n \geq 1 \text{ KV}$. Il loro isolamento non è né aria, bensì in olio per i modelli più costosi, o in resina per quelli più economici.



Nella figura a lato è mostrata la realizzazione di un TV di media tensione 'pieno': TV a 2 corse. Con questi dispositivi si può raggiungere le classi $GO.1 \div 0.2$ per tensioni che possono arrivare a 30 KV.

In alcuni casi si preferisce porre a mezzo un intermezzo dell'avvolgimento a tensione più elevata, ottenendo così un TV a 2 corse, di seguito a lato.



Se il T.V. per media tensione è collegato ad una linea filare, si può collegare la tensione sull'avvolgimento di ripreso vale A

$$V_c = V_e$$

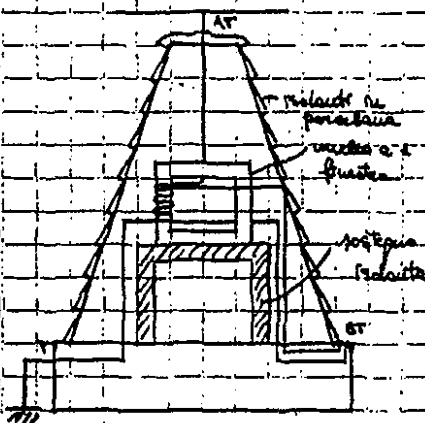
in un T.V. a 2 corse

$$V_c = V_p = \frac{V_e}{\sqrt{3}}$$

in un T.V. a 1 sola corsa

www.ingonline.biz

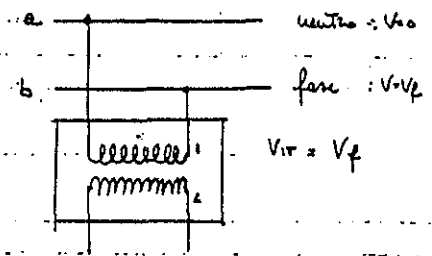
6.93 T.V. PER ALTE TENSIONI (> 30 KV) - TV. A ISOLAZIONE



La realizzazione costruttiva è mostrata nel disegno a lato. Questa volta il T.V. è posto su una base rivestita da isolante in porcellana. Il nucleo è isolato da terra; in tal modo può essere posto ad una tensione intermedia tra V_e e la tensione di linea: ne deriva il vantaggio che l'isolamento tra l'avvolgimento di ripreso e nucleo può essere dimensionato per una tensione pari a $V_e/2$, invece dell'intera V_e . Anche in tal modo si deve dimensionare anche l'isolamento della tensione di uscita in base alla stessa $V_e/2$, questo accorgimento consente notevoli risparmi in termini economici.

Per avvolgimenti in rame sono separati da adeguati spessori di resina. Nei TV di potenza collegati ad elevate correnti si ricorre a spine in porcellana con un conduttore a banda avvolta a spirale intorno al nucleo, ottenuti vantaggiosamente con un foglio di resina di adeguato spessore.

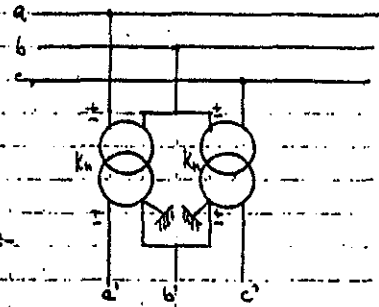
Se osservi che V_{ir} è sempre una tensione di fase, ma che il TV ha collegato ad un circuito monofase (con un filo e massa) - vedi figura -
 Ma che il collegamento ha ad un sistema trifase, con TV ad 1 corvo o a 2 corvo.



COLLEGAMENTI DEL T.V. NEI SISTEMI TRIFASE

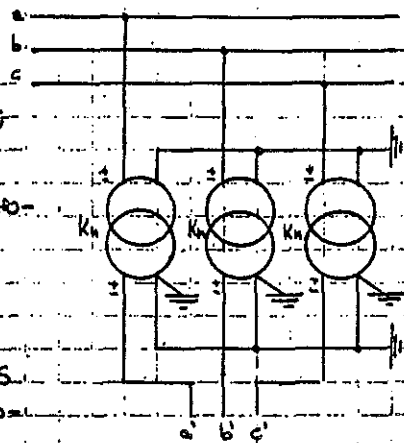
1) : $V_e \leq 50 \text{ KV}$.

L'ENEL dispone 2 TV uguali con collegamento a triangolo aperto. I contrafforti evitano risonanze di tensione. In uscita dai trasformatori otteniamo una tensione di tensione il cui valore è ridotto di K_n .
 L'uso di questo collegamento è conveniente solo alla tensione di linea ridotta; sotto questa condizione consente di realizzare trasformatori di buona accuratezza: $\lambda = 0.5$ (è il valore standard dell'ENEL) senza eccessivi problemi nel realizzare il isolamento dei dispositivi.



2) : $V_e > 50 \text{ KV}$.

Si impiegano 3 TV uguali con collegamento a stella; in tal modo la tensione cui vengono sottoposti gli avvolgimenti di ingresso non è più V_e ma divisa $V_e/\sqrt{3}$; anche il isolamento sarà dunque proporzionato con V_e .



$$V_{is} = V_e/\sqrt{3}$$

Si possono in tal modo ottenere ancora TV con $\lambda = 0.5$ senza ricorrere ad isolamento di caratteristiche eccezionali.

www.ingonline.biz

iii) per il TV a 2 corvo non si tratta di una propria bancha; tuttavia se la V_{ϕ} è la tensione tra la fase e (ad esempio) la massa, si ha che la linea coincide col centro stella, per cui V_{ir} è proprio una tensione di fase.

