



www.ingonline.tk

BASI DI MATEMATICA

di

Giovanni Canní

Sussidio per il precorso di laurea in

Ingegneria

Università di Pisa

A.A. 2003/2004

Data: settembre 2003

Scaricato gratuitamente da: **WWW.INGONLINE.TK**

Prefazione:

Il presente testo espone le nozioni di matematica ritenute necessarie per intraprendere un corso di studi di ingegneria.

I contenuti sono esposti in linguaggio volgare poiché formulati da uno studente di ingegneria e rivolti a futuri studenti di ingegneria, per i quali l'obiettivo prioritario è ottenere risultati "corretti" impiegando il minor tempo possibile, trascurando la correttezza formale dei procedimenti utilizzati (ponti, palazzi, strade, linee elettriche, mezzi di comunicazione ecc. hanno infatti la cattiva abitudine di dar luogo a disastri se risultano mal dimensionati, infischiosene di chi, in fase di progettazione, ha "formalmente" aderito alla "matematica").

Questa introduzione vuole pertanto giustificare la crostacea e vergognosamente scorretta stesura del testo, capace di far accapponare i capelli a qualunque matematico, ma vuole anche mettere in evidenza l'efficacia didattica del medesimo, che vuole essere sostanzialmente un sussidio conciso, semplice e diretto.

ATTENZIONE: CONTIENE QUALCHE

IMPRECISIONE CONCETTUALE → Si rimanda, pertanto, a testi più completi e di autori più 'professionali'.

SOMMARIO

Insiemi e logica matematica.....	3
Proposizioni e predicati	3
Insiemi.....	6
Funzioni	13
Le funzioni:.....	18
Numeri naturali, relativi, irrazionali e reali.....	20
Grafici di funzioni:	25
crescenza e decrescenza:	25
Traslazioni e compressioni:	28
Le potenze:	30
potenza:	31
esponenziale:	31
dominio di alcune funzioni:.....	32
Campi di definizione in genere:.....	34
geometria analitica:	36
il piano cartesiano:.....	36
la retta:	36
Distanza tra due punti:	37
Punto medio:.....	37
definizione diretta passante per due punti:.....	38
rette parallele:	40
Perpendicolarità tra rette:	41
Distanza punto – retta:	42
la parabola:.....	43
La circonferenza:	44
i polinomi:	46
studio dei poli di un polinomio	46
polinomi di secondo grado:.....	46
Polinomi di terzo grado:	47
conclusioni:.....	48
Calcolo numerico:	52
rappresentazioni dei numeri.....	53
Equazioni e Disequazioni irrazionali:	55
Trigonometria	56
Gli angoli	56
le funzioni seno e coseno:	61
Formule:.....	63
funzione tangente:.....	68

Angoli insistenti ad una circonferenza:	69
Teorema dei seni:	70

INDICE DELLE FIGURE

Numero Pagina

TAB. 1.3 TABELLA DI VERITÀ DEGLI OPERATORI AND E OR.....	5
FIG. 1.4 DEFINIZIONE DI INSIEME	6
TAB. (1.9) TABELLA DI VERITÀ DI PREDICATI.....	9
FIG.(2.1) FUNZIONE.....	18
(3.3) RAPPORTO INCREMENTALE	26
FIG.(3.6) TRASLAZIONI E COMPRESSIONI	29
(4.1) PROPRIETÀ DELLE POTENZE	30
FIG.(4.2) RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI X^B	31
(4.5) SIMBOLOGIA DI LOGARITMO	32
FIG.(4.10) RISOLUZIONE GRAFICA DI SISTEMI DI EQUAZIONI	35
FIG.(5.1) RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI UN PUNTO NEL PIANO.....	36
FIG.(5.4) COEFFICIENTE ANGOLARE.....	38
FIG.(5.5) RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI	39
FIG.(5.6) APPARTENENZA DI UN PUNTO AD UNA RETTA	39
FIG.(5.7) APPARTENENZA DI UN PUNTO AD UNA RETTA	40
FIG.(5.8) RETTE PARALLELE.....	41
FIG.(5.9) RETTE PERTPENDICOLARI	42
FIG.(5.11) DISTANZA PUNTO - RETTA	43
FIG.(5.14)	44
FIG.(6.1)	47
FIG.(6.8)	49
FIG.(6.9)	50
FIG.(9.1)	56
FIG.(9.7)	62
FIG.(9.8)	63
FIG.(9.9)	64
FIG.(9.11)	66
FIG.(9.18)	68
FIG.(9.19)	69
FIG.(9.20)	69
FIG.(9.21)	70
FIG.(9.22)	70

Capitolo 1

Insiemi e logica matematica

Proposizioni e predicati

Linguisticamente un teorema è composto da due parti:

- Ipotesi (P);
- Tesi (Q).

Dove generalmente l'ipotesi implica la tesi. In linguaggio matematico tale condizione si identifica con la scrittura:

$$P \Rightarrow Q$$

Se poi la tesi implica a sua volta l'ipotesi, si indica con:

$$P \Leftrightarrow Q$$

E si dice “se e solo se”.

Linguisticamente un esempio di proposizione è:

“il latte è bianco”

Un altro esempio di proposizione è:

“il latte è rosso”

Da questa ultima proposizione possiamo ingenuamente intuire che esistono due tipi di proposizioni, ovvero:

- Proposizioni vere;
- Proposizioni false.

In realtà esistono proposizioni che non sono né vere né false, così come esistono proposizioni allo stesso tempo vere e false, queste ultime definite “antinomie”.

In matematica, un esempio di proposizione è:

$$3+2=5$$

Se vogliamo rendere più complessa una proposizione, possiamo aggiungervi alcuni elementi. In matematica si adottano le congiunzioni “e” e “o”:

$$P \text{ e } Q \text{ (1.1)}$$

$$P \text{ o } Q \text{ (1.2)}$$

Per individuare il valore di tali proposizioni, possiamo costruire una tabella di verità, nella quale indicare i possibili stati delle proposizioni P e Q (vero o falso) e quindi verificare le proposizioni 1.1 e 1.2:

Tab. 1.3
tabella di
verità degli
operatori and
e or

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Insiemi

Una comune definizione di insieme cita che:

“un insieme è una famiglia di cose aventi un'uguale proprietà”

Tale definizione è falsa, poiché definisce la parola “insieme” utilizzandone un sinonimo (famiglia). I matematici definiscono cose simili per assiomi. Nel caso di un insieme, si stabiliscono tutte le regole che riguardano gli insiemi e, poi, si definisce insieme l'ente stabilito da tali regole. Esistono 10 assiomi che definiscono l'insieme.

In linguaggio matematico un insieme si indica con lettere maiuscole, mentre i suoi elementi si indicano con lettere minuscole.

Per concretizzare il concetto di insieme ci si riferisce al piano, ovvero si traccia una linea chiusa e quindi si dice che tutti gli elementi ad esso interni gli appartengono:

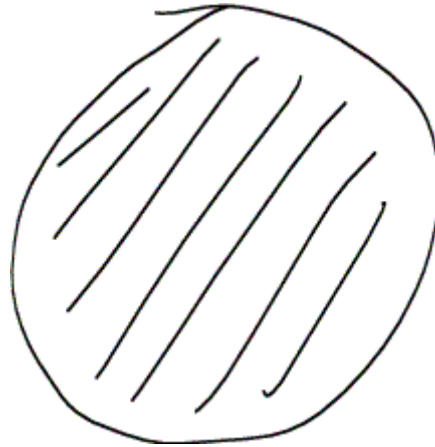


fig. 1.4 definizione di insieme

dati più insiemi è pertanto possibile stabilire delle relazioni tra essi, esempio:

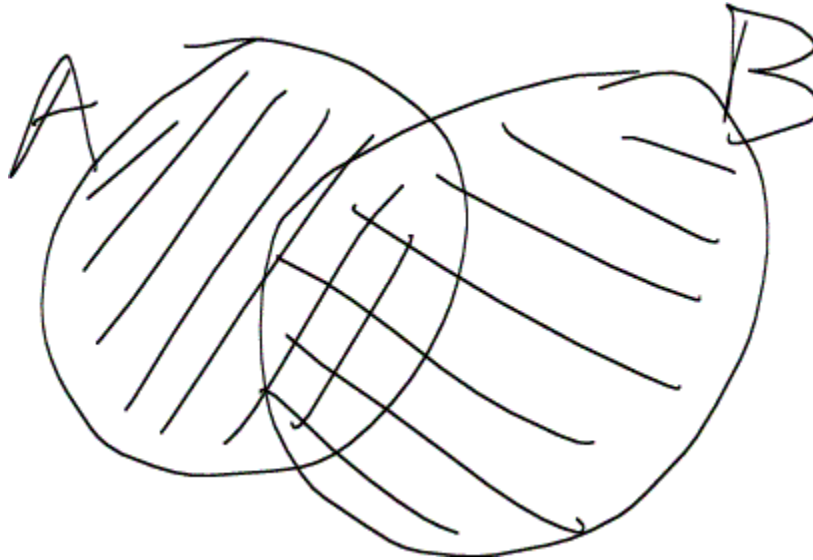


fig. 1.5 intersezione di insiemi

tale relazione è equivalente a dire:

$$(a \in A) \text{ e } (a \in B) = A \cap B \quad (1.6)$$

il simbolo $\cap$ significa “intersezione”.

In un altro caso possiamo avere:

$$(a \in A) \text{ o } (a \in B) = A \cup B \quad (1.7)$$

dove il simbolo $\cup$ significa “unione”.

Da queste relazioni è possibile desumere alcune proprietà:

$(A \cup B) \cup C \rightarrow$ basta che A, B oppure C sia vera, affinché l'intera proposizione sia verificata e valgono le proprietà associativa e commutativa, ovvero: $(A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C = C \cup A \cup B$

$(A \cup B) \cap C \rightarrow$ vale a dire $(a \in A \cup B)$ e $(a \in C)$. (1.8)

$(A \cap B) \cap C \rightarrow$ anche in questo caso, come nella prima ipotesi, valgono le proprietà associativa e commutativa

$(A \cap B) \cup C \rightarrow$ in questo caso, come nel secondo, vale la proprietà distributiva. Aggiungendo alle ipotesi relative la tab. 1.1 la proposizione C, otteniamo la seguente tabella:

Tab. (1.9) tabella di verità di predicati

P	Q	PeQ	PoQ	C	(PoQ)eC	(PeC)	(QeC)	(PeC) o (QeC)
V	V	V	V	V	V	V	V	V
				F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V	V	F	V
				F	F	F	F	F
F	V	F	V	V	V	F	V	V
				F	F	F	F	F
F	F	F	F	V	F	F	F	F
				F	F	F	F	F

Osservando questa tabella, possiamo desumere che $(PoQ) e C = (PeC) o (QeC)$

L'intersezione gode pertanto della proprietà distributiva. Tale proprietà vale anche per l'unione.

Un'altra operazione applicabile agli insiemi è l'inclusione:

$$A \subseteq B \quad (1.10)$$

Quest'ultima relazione vale a dire che:

$$a \in A \Rightarrow a \in B \quad (1.11)$$

e si dice che A è un sottoinsieme di B, oppure che B include A.

un'altra applicazione è la negazione:

$$\text{non } P \quad (1.12)$$

anche per la negazione vale la proprietà distributiva, con la differenza che l'operatore "o" è sostituito dall'operatore "e" e viceversa.

$$\text{Non } (P e Q) = (\text{non } P) o (\text{non } Q) \quad (1.13)$$

$$\text{Non } (P o Q) = (\text{non } P) e (\text{non } Q). \quad (1.14)$$

Data la seguente proposizione:

$$A \cap B = \emptyset$$

Vale a dire che i due insiemi non hanno elementi in comune

Data la seguente proposizione:

$$A = B = (A \subseteq B) \text{ e } (B \subseteq A)$$

Vale a dire che

$$(a \in A \Rightarrow a \in B) \text{ e } (A \subseteq B \Rightarrow a \in A) \quad (1.15)$$

$$(a \in A) \Leftrightarrow (a \in B) \quad (1.16)$$

dalle proposizioni si passa ai predicati quando gli elementi di un insieme sono sostituiti da variabili:

$$\text{“X è rosso”} \quad P(X)$$

tale predicato può essere vero o falso secondo il valore della variabile X.

$$\text{“X è Y”} \quad P(X,Y)$$

questo predicato ha due variabili.

Un esempio di predicato in matematica è:

$$X^2 + 1 = 0$$

Questo predicato può essere vero oppure falso a seconda degli insiemi di partenza considerati: se infatti l'insieme delle X è formato da numeri reali, non abbiamo soluzioni, se l'insieme delle X è invece formato da numeri complessi, abbiamo 2 soluzioni.

Un predicato diventa una proposizione quando alla variabile è assegnato un valore:

prendendo valori dall'insieme U (universo), avremo le seguenti possibilità:

- esiste almeno un $X \in U$, $P(X)$;
- esiste un numero $X \in U$ sufficiente a riempire un insieme assegnato;
- È vero che per ogni $X \in U$, $P(X)$.

I simboli stenografici per semplificare le precedenti frasi sono:

$$- \exists X \in U : P(X)$$

$$- A \subseteq \{ X \in U : P(X) \}$$

$$- \forall X \in U : P(X)$$

negando tali proposizioni, avremo:

$$- \text{non}(\exists X \in U : P(X)) = \forall X \in U, \text{non } P(X)$$

$$- \text{non}(\forall X \in U : P(X)) = \exists X \in U, \text{non } P(X)$$

$\forall$ e $\exists$ significano rispettivamente “per ogni” e “esiste” e si definiscono quantificatori:

$$\exists X, \exists Y : P(X,Y) \quad \text{è invertibile con} \quad \exists Y, \exists X : P(X,Y)$$

$$\exists Y, \forall X : P(X,Y) \quad \text{non è invece invertibile con} \quad \exists Y, \forall X : P(X,Y).$$

Da questo desumiamo che quantificatori uguali possono essere invertiti, mentre quantificatori diversi non possono essere invertiti.

Funzioni

Una funzione si indica con la scrittura:

$$f: A \rightarrow B \quad (1.17)$$

una comune definizione di funzione cita che: “una funzione è una legge che stabilisce una corrispondenza univoca tra gli elementi di due insiemi A e B ”. tale definizione non è esaustiva, poiché la parola legge è un sinonimo di funzione. Bisogna pertanto capire cosa si intende con la parola “legge”.

Indicando con $A \times B$ il “prodotto cartesiano” e con (a,b) una coppia ordinata, e con coppia ordinata intendiamo che:

$$\{a, \{a,b\}\}$$

ovvero che un numero viene prima di un altro, possiamo stabilire la seguente proposizione:

$$A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$$

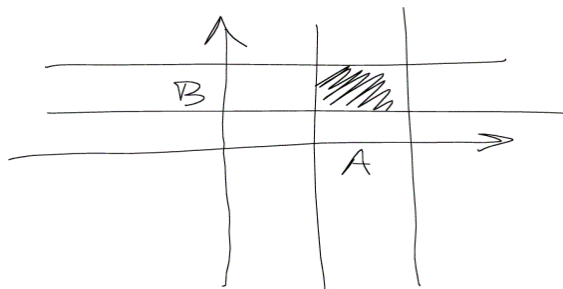


fig. (1.18)

e possiamo quindi dire che questa relazione rappresenta un insieme incluso nel prodotto cartesiano:

$$R \subseteq A \times B$$

Data pertanto la seguente relazione:

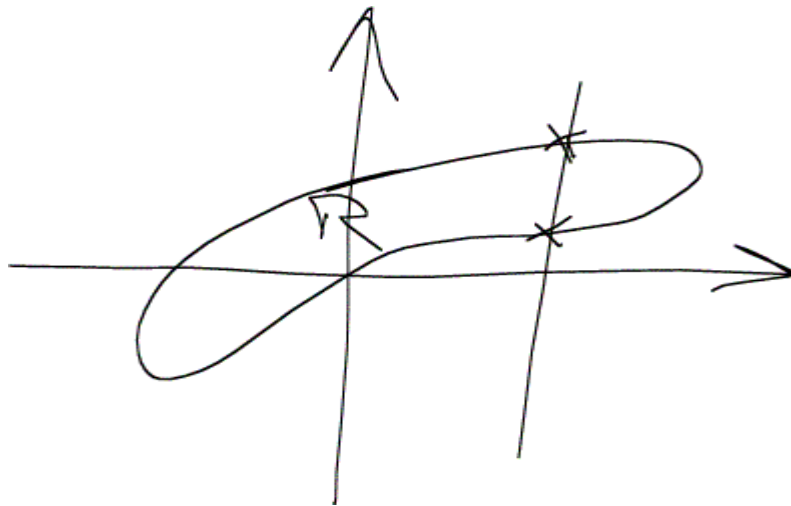


fig.(1.19)

non possiamo dire che:

$$\forall a \in A' \subseteq A, \exists \text{ un solo } b \in B : (a,b) \in R \quad (1.20)$$

quest'ultima relazione non definisce infatti una funzione, ovvero casi descritti graficamente nel seguente modo:

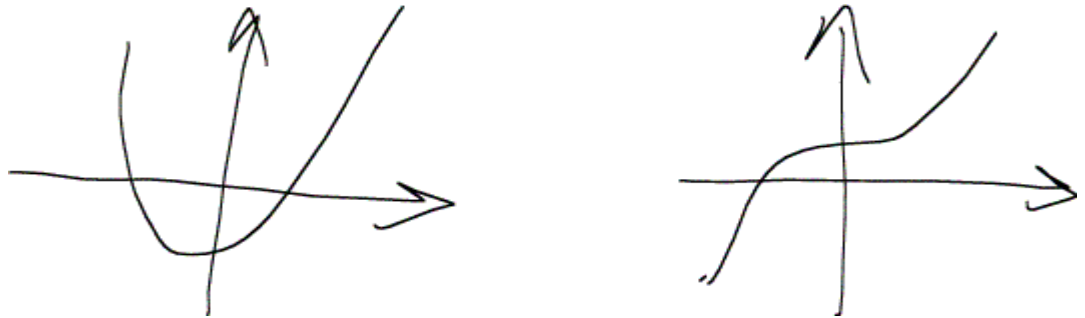


fig.(1.21)

la differenza tra questi due ultimi esempi è che, benché in entrambi i casi ciascuna retta verticale interseca la relazione in un solo punto, non tutte le rette orizzontali della prima intersecano la relazione in un solo punto.

Si possono pertanto classificare le relazioni nei seguenti modi:

- relazioni iniettive: ad ogni elemento di A corrisponde un solo elemento di B.
- relazioni surgettive: ad ogni elemento di B corrisponde un elemento di A.
- relazioni bigettive: a ciascun elemento di A corrisponde un solo elemento di B e viceversa.

esistono inoltre due tipi di relazione:

- relazione di ordine;
- relazione di equivalenza.

Una relazione di equivalenza non preclude il fatto che due insiemi possano coincidere.

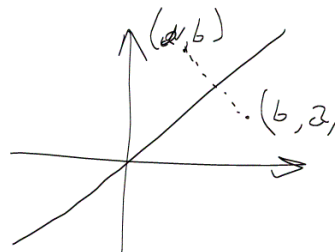
$$R \subseteq A \times A$$

Le proprietà di una relazione di questo tipo sono le seguenti:

1- riflessiva: $(a,a) \in R$

2- simmetrica: $(a,b) \in R \Leftrightarrow (b,a) \in R$

3- transitiva: $(a,b) \in R, (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$.



con il termine “classe di equivalenza” si indica l'insieme degli elementi di un insieme B tali che la coppia ordinata (a,b) appartiene alla relazione data:

$$[a] = \{b: (a,b) \in R\} \quad (1.22)$$

un esempio di relazione di equivalenza è dato dal seguente caso:

$$3/2 = 1,5$$

in realtà una frazione non è un numero razionale. Il passaggio da una frazione ad un numero razionale è stabilito dalla seguente relazione:

$$a/b \ R \ a'/b' \Leftrightarrow ab' = a'b$$

tale relazione è simmetrica, infatti:

$$a'/b' \ R \ a/b \Leftrightarrow a'b = ab'$$

le relazioni d'ordine sono tipicamente rappresentate da disuguaglianze:

$$3 \leq 3$$

$$3 \leq 100000000$$

$$3 \leq 5$$

le proprietà di tali relazioni sono:

- 1- asimmetrica $(a \leq b) \text{ e } (b \leq a) \Leftrightarrow a = b$
- 2- transitiva $(a \leq b) \text{ e } (b \leq c) \Rightarrow a \leq c$
- 3- ordinamento totale $\forall (a,b) \text{ o } a \leq b, \text{ o } b \leq a.$

l'inclusione di sistemi è una relazione che non gode di ordinamento totale.

Le funzioni:

data una relazione $R: A \rightarrow B$, questa consisterà in un insieme incluso nel prodotto cartesiano $A \times B$

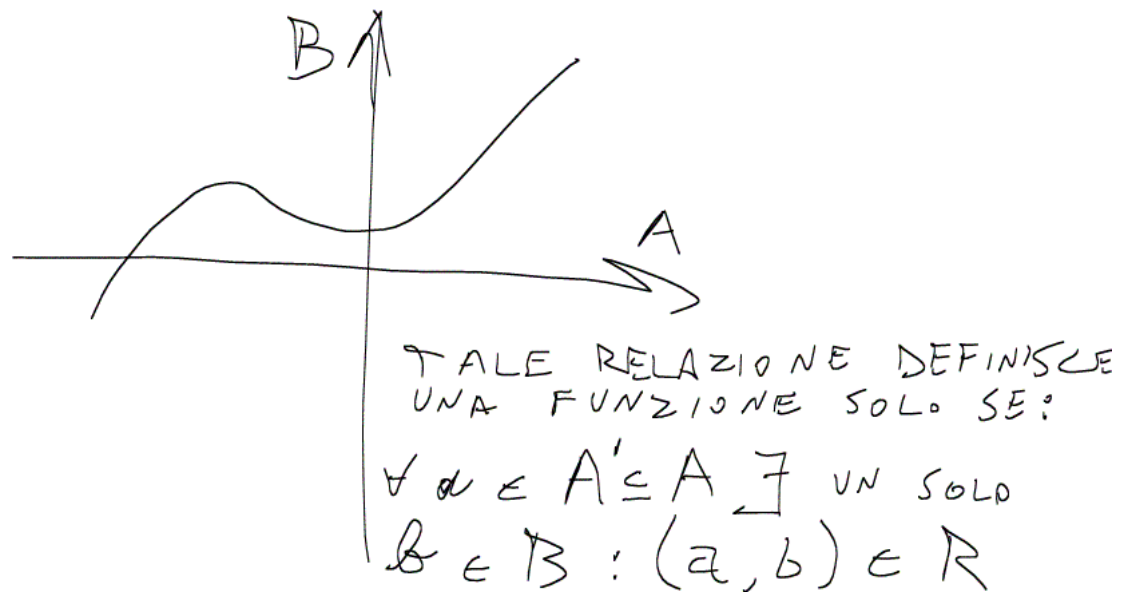


fig.(2.1) funzione

in tale definizione l'indicazione " A' incluso in A " esprime il concetto di "campo di definizione del dominio".

In tale relazione deve pertanto esistere un solo b per ogni a , tuttavia ciò non preclude la possibilità che si verifichi il contrario, ovvero che per ciascun b vi siano più a .

In matematica l'insieme A si definisce dominio della funzione, mentre l'insieme B si definisce codominio. Con A' si indica invece un sottoinsieme di A , ovvero il campo di definizione.

Allo stesso modo l'insieme dei valori $f(a)$, ovvero delle immagini, è in realtà un sottoinsieme del codominio.

$$f(a) \subseteq B$$

E' possibile operare inversamente, ovvero prendere gli elementi b del condominio e vedere quali valori di A vi corrispondono:

$$f^{-1}(D) = \text{controimmagine di } a = \{ a : f(a) \in D \} \quad (2.2)$$

ma affinché questo possa avvenire, $f(a)$ deve necessariamente essere una relazione iniettiva. Esempio:

$$f(x) = x^2$$

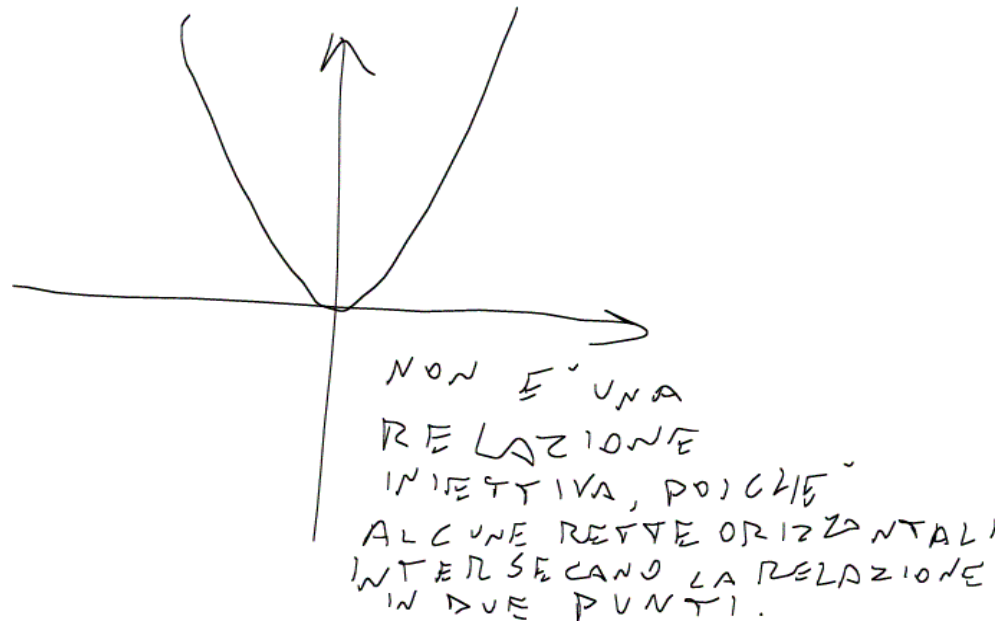


fig.(2.3)

se prendiamo in considerazione un intervallo $a = [0,1]$, notiamo che l'immagine di a è $f(a) = [0,1]$. Se proviamo a calcolare la controimmagine di $f(a)$, quest'ultima risulterà invece $f^{-1}(f(a)) = [-1,1]$.

Alla luce di queste considerazioni, è possibile rivedere il concetto di relazione iniettiva, surgettiva e bigettiva:

- iniettiva: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$
- surgettiva: $f(a) \equiv B \equiv B'$
- bigettiva: verifica le precedenti con una condizione in più: $A' = A$

è sufficiente che una funzione sia iniettiva, affinché sia pure invertibile.

Che senso ha invece parlare di funzione inversa nel caso di funzioni non iniettive? Riprendendo in considerazione $f(x) = x^2$, ad esempio, non è vero che $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, in quanto quest'ultima funzione è in realtà l'inversa della restrizione del dominio della funzione di partenza. Infatti non è vero che $\sqrt{x^2} = x$, il suo valore è bensì $|x|$. Stesso vale, a maggior ragione, per le funzioni periodiche, quali quelle goniometriche.

Numeri naturali, relativi, irrazionali e reali.

Dire che l'insieme dei numeri naturali sia un sottoinsieme dei numeri reali è un po' riduttivo, in realtà il procedimento per giungere dai numeri naturali ai numeri reali è alquanto complesso:

l'insieme dei numeri naturali è ponibile in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri cardinali e, quindi:

$$N = \{ [A] : A \text{ insieme dei numeri finiti } \} \quad (2.4)$$

$$\text{Se } B \in [A] \text{ e } C \in [A], \exists f : B \rightarrow C$$

$$n = [A]$$

$$m = [B] \text{ (dove } B \text{ non è la classe dei numeri naturali)}$$

$$n + m = [A \cup B]$$

$$n \cdot m = [A \times B]$$

$$\text{se, in particolare } A \subseteq B, \text{ allora } [A] \subseteq [B], \text{ allora } n \leq m$$

nell'ambito dei numeri naturali vi sono le seguenti restrizioni:

- se $a = b + c$, allora $b > a$, altrimenti c sarebbe un numero negativo, cosa non ammissibile.

- se $a = b \cdot c$, allora $b > a$, altrimenti c sarebbe un numero minore di 1.

Per superare questo ostacolo si è operato nel seguente modo:

il numero tre può nascere da una serie di differenze tra numeri naturali, ovvero:

$$3 = 3 - 0 = 4 - 1 = 5 - 2 \text{ ecc.}$$

tutte le coppie ordinate sopraelencate hanno pertanto la loro differenza in comune, se ne scegliamo due a caso, avremo:

$$(a, b) \quad (a', b')$$

$$a - b = a' - b'$$

quest'ultima relazione di equivalenza può non aver senso nel campo dei numeri naturali, eppure può essere riscritta nella forma:

$$a + b' = a' + b \quad (2.5)$$

quest'ultima relazione ha sempre senso in $\mathbb{N}$.

e' da questa considerazione che acquista senso parlare di numeri relativi $\mathbb{Z}$, quale insieme inteso come classe di equivalenza tra coppie ordinate di numeri naturali ($\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$)

C'è ora da chiedersi quando ha senso una frazione nel campo dei numeri relativi:

$3/2$ non esiste tra i numeri relativi

$4/2$ esiste tra i numeri relativi.

Quest'ultima frazione è, come nel caso precedente, esprimibile mediante divisione tra coppie ordinate di interi:

$$2 = 4/2 = 8/4 = 16/8 \text{ ecc.}$$

tali coppie ordinate, a condizione che il denominatore sia diverso da zero, rappresentano il numero due.

$$(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$$

se, come nel caso precedente, consideriamo due coppie ordinate $(a, b) \sim (a', b')$, possiamo stabilire la seguente relazione di equivalenza:

$$a / b = a' / b'$$

quest'ultima, che può non aver senso in $\mathbb{Z}$, può essere riscritta come:

$$a \cdot b' = a' \cdot b \quad (2.6)$$

la quale ha senso in $\mathbb{Z}$.

quando, a sua volta, nel campo dei numeri razionali, ha senso parlare di potenza?

Un numero elevato a potenza può essere rappresentato come:

$$a^n = 1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots \dots \dots \cdot a_n$$

il numero 1 anteposto al prodotto giustifica il fatto che un numero elevato a zero fa 1, allo stesso modo giustifica 0^0 solo se 0 esponente appartiene a $\mathbb{N}$.

ricordando le regole fondamentali delle potenze, possiamo fare le seguenti considerazioni:

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

$$a^{-n} = 1/a^n$$

dove a deve essere diverso da zero, giustificando l'impossibilità di calcolare 0^0 .

Inoltre:

$$a^{p/q} = (a^{1/q})^p = (a^p)^{1/q}$$

se $q=2$, avremo:

$$a^{1/2} \cdot a^{1/2} = (a^{1/2})^2 = a \quad (2.7)$$

così nasce la radice quadrata e, quindi, i numeri irrazionali.

Capitolo 3

Grafici di funzioni:

data una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e disegnato il grafico, è opportuno studiarne le caratteristiche grafico - visive (ad es. la crescita, punti di massimo ecc.)

crescenza e decrescenza:

considerata la funzione $y=x^3$

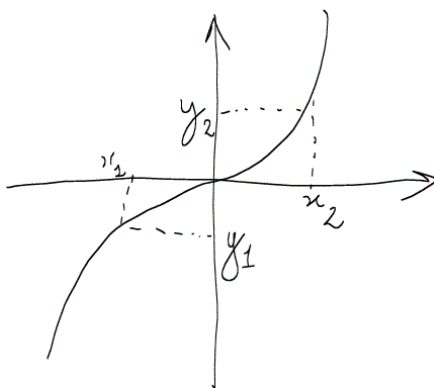


fig.(3.1)

potremo dire che:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ovvero nel punto x_1 la funzione assume un valore minore che in x_2 .

Quando una funzione è definita crescente, lo è “globalmente” nel suo campo di definizione.

Se, in un altro caso, il grafico è “in discesa”, avremo che:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

pertanto avremo una funzione globalmente decrescente.

Esistono inoltre altri due casi, per così dire, intermedi, nei quali sono verificate le seguenti condizioni:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

quando una funzione soddisfa tali condizioni si definisce rispettivamente “non decrescente” e “non crescente”.

In tutti questi casi le funzioni si definiscono monotone. Nei primi due casi in particolare, desumiamo che le funzioni sono necessariamente iniettive.

Per verificare analiticamente l'andamento di una funzione, riprendiamo la relazione:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

dalla quale avremo che:

$$x_1 - x_2 < 0$$

$$f(x_1) - f(x_2) < 0 \quad (3.2)$$

studiando il segno del rapporto tra queste due ultime relazioni, potremo desumere l'andamento di una funzione in un intervallo dato:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

(3.3) rapporto incrementale

tale rapporto prende il nome di “rapporto incrementale”.

Vi sono tuttavia altri casi in cui il rapporto incrementale non ci permette di individuare in maniera univoca e per qualsiasi intervallo $x_1 - x_2$ l'andamento di una funzione, si consideri ad esempio il caso rappresentato in figura:

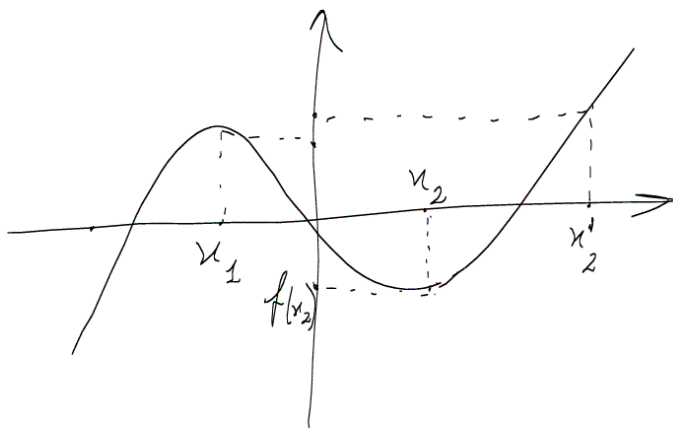


fig.(3.3)

se consideriamo l'intervallo $x_1 - x_2$, il rapporto incrementale assumerà un valore negativo. Se consideriamo invece l'intervallo $x_1 - x_2'$, il rapporto incrementale assumerà un valore positivo.

Cosa significa studiare qualitativamente il grafico di una funzione?

Sia per risolvere disequazioni, sia per risolvere equazioni di grado superiore al quinto, occorre innescare un procedimento di calcolo numerico, ovvero procedere come di seguito descritto:

dato un polinomio $P(x)$ di grado n , si voglia individuare la radice x_1 :

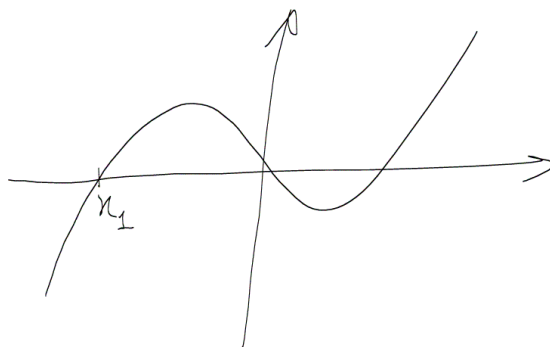


fig.(3.4)

ipotizziamo di aver accertato che x_1 si trovi all'interno dell'intervallo $[-2, -1]$.

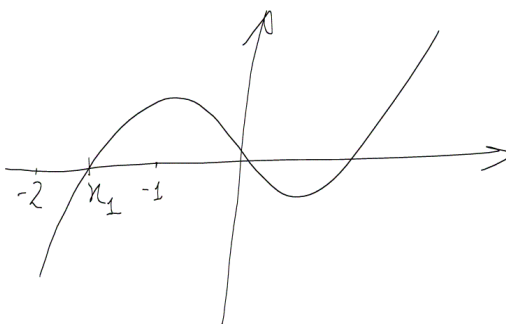


fig.(3.5)

individuiamo il punto medio c dell'intervallo $[-2, -1]$ e calcoliamo $f(c)$. se quest'ultimo valore non è zero, ne teniamo in considerazione il segno in modo da scegliere un altro intervallo $[-2, c]$, oppure $[c, -1]$ che siamo certi contenga la radice x_1 per poi proseguire nella costruzione di tale famiglia di intervalli scatolati, fino a raggiungere il grado di precisione richiesta.

Traslazioni e compressioni:

data l'equazione di una parabola: $y = ax^2 + bx + cx$, ci chiediamo come influiscano i parametri a , b e c sul grafico di tale funzione.

Data una funzione $f(x)$, avremo che:

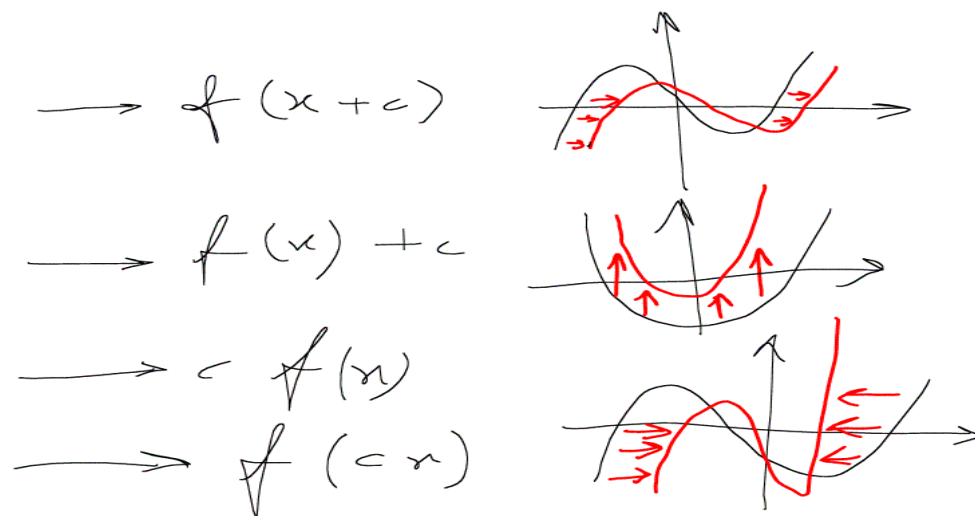


fig.(3.6) traslazioni e compressioni

meritano particolare attenzione gli ultimi due casi, nei quali bisogna prestare attenzione al segno di c ed al fatto che sia maggiore oppure minore di uno:

il segno influenza infatti la compressione in maniera simmetrica rispetto l'asse delle ascisse; il fatto che c sia maggiore o minore di uno distingue la compressione (nel primo caso) dalla dilatazione (nel secondo caso).

C a p i t o l o 4

Le potenze:

per definire una potenza razionale ad esponente reciproco di un razionale, si opera nel campo dei numeri reali.

Le potenze godono delle seguenti proprietà:

$$a^{b_1+b_2} = a^{b_1} * a^{b_2}$$

$$(a^{b_1})^{b_2} = a^{b_1*b_2} = (a^{b_2})^{b_1}$$

$$\text{se } a > 1 \text{ e } b_1 < b_2 \quad \text{allora} \quad a^{b_1} < a^{b_2}$$

$$\text{se } a = 1 \quad \text{allora} \quad a^{b_1} = a^{b_2} = 1$$

$$\text{se } 0 < a < 1 \text{ e } b_1 < b_2 \quad \text{allora} \quad a^{b_1} > a^{b_2}$$

$$\text{se } b > 0 \text{ e } a_1 < a_2 \quad \text{allora} \quad a_1^b < a_2^b$$

$$\text{se } b = 0 \quad \text{allora} \quad a_1^b = a_2^b = 1$$

(4.1) proprietà delle potenze

si ritiene opportuno evidenziare la differenza tra potenza ed esponenziale:

$$f(x) = x^b \quad \text{potenza}$$

$$f(x) = a^x \quad \text{esponenziale}$$

potenza:

data una potenza $f(x) = x^b$, individuiamo i seguenti casi schematizzati in figura:

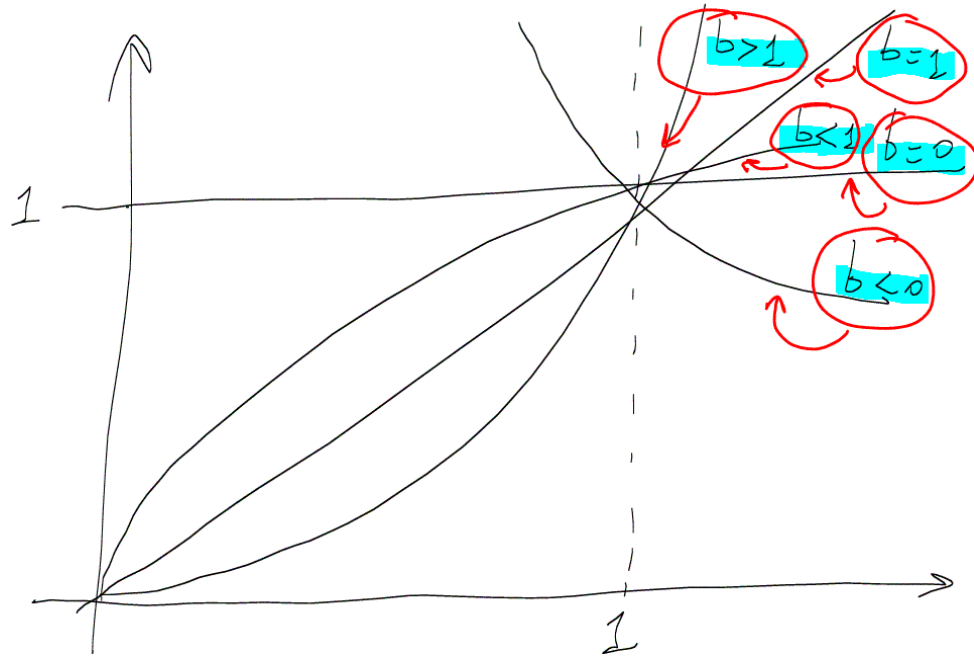
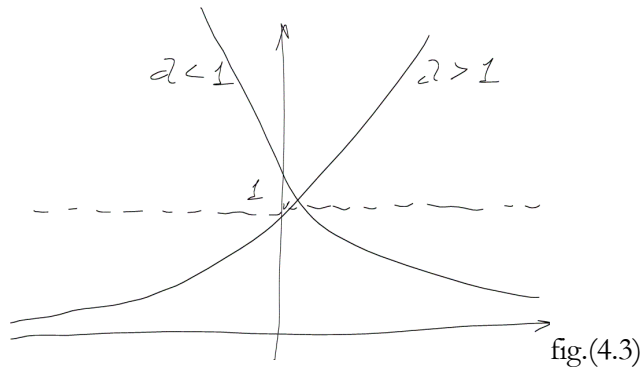


fig.(4.2) rappresentazione grafica di x^b

possiamo notare che l'unico caso in cui $f(x)$ è decrescente risulta essere per $b < 0$

esponenziale:

se consideriamo invece la funzione $f(x) = a^x$, avremo i seguenti casi:



n.b.: questa funzione non è surgettiva, ma è iniettiva.

La vera funzione inversa dell'esponenziale (senza restrizioni del dominio) è il logaritmo, il quale rappresenta invece una funzione surgettiva, nella quale, indicata con a la base del logaritmo, deve essere: $a \neq 1$; $a > 0$; $x > 0$.

Altra importante considerazione riguarda la simbologia:

$$\begin{aligned} \text{LOGARITMO IN BASE } e \text{ DI } x &= \ln x = \log x \\ \text{LOGARITMO IN BASE } 10 \text{ DI } x &= \log x = \text{Log } x \end{aligned}$$

(4.5) simbologia di logaritmo

dominio di alcune funzioni:

date le seguenti funzioni, ne definiamo il dominio:

$$\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{\pi} \exists \Leftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{3}, \infty\right[\quad \text{poiché una potenza ad esponente irrazionale esiste}$$

solo se la base è positiva.

$$\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 \exists \forall x \in \mathbb{R}$$

Una potenza ad esponente razionale esiste sempre

$$\frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{\pi}}{1 - [x]} \quad \text{questo rappresenta un caso particolare nel quale il dominio è: } [2, \infty[$$

la funzione $f(x)=[x]$ è la cosiddetta “caratteristica” (impropriamente definita “parte intera”) ed il suo significato è il seguente:

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists [x] \in \mathbb{Z} : [x] \leq x < [x] + 1 \quad (4.6)$$

ovvero, per ogni x appartenente ad $\mathbb{R}$, il valore della caratteristica è il numero relativo immediatamente inferiore, esempio:

$$[3,14] = 3$$

$$[-3,14] = -4$$

il grafico della funzione “caratteristica” è:

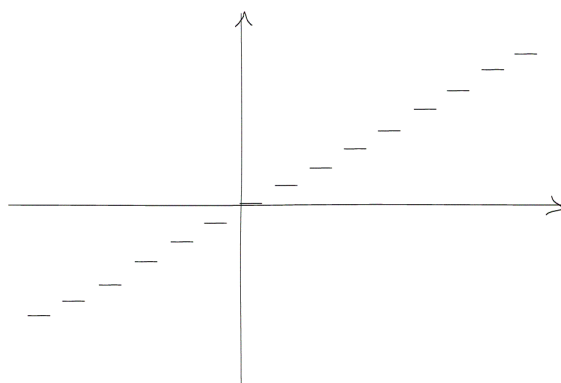


fig.(4.7)

un'altra importante funzione è la funzione “Mantissa”, ovvero:

$$m(x) = x - [x] \quad (4.8)$$

il dominio di questa funzione è l'insieme dei numeri reali ed i valori da essa assunti sono sempre compresi tra zero e uno:

$$0 \leq m(x) < 1$$

il grafico di questa funzione è:

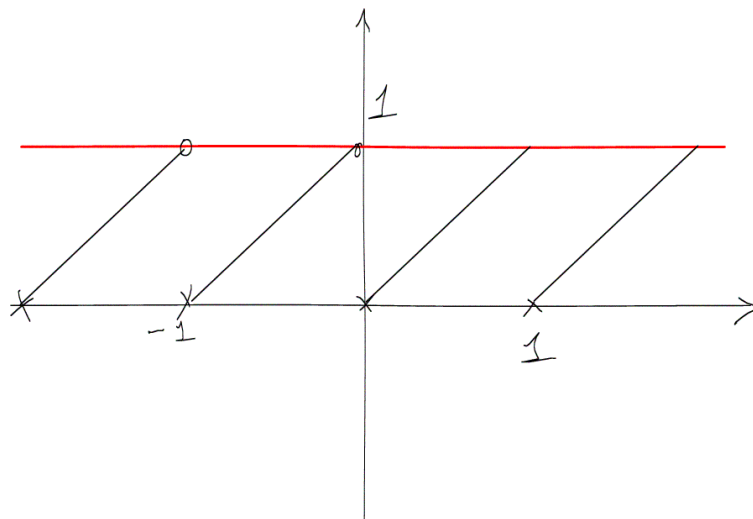


fig.(4.9)

possiamo pertanto osservare che tale funzione è limitata e periodica.

Campi di definizione in genere:

il dominio di una funzione, come già detto, cambia in base all'insieme numerico tenuto in considerazione. In genere è tenuto in considerazione l'insieme dei numeri reali.

Se consideriamo, ad esempio la funzione:

$$f(x) = \log_{x+2}(3-x)$$

dobbiamo verificare, allo stesso tempo, le seguenti condizioni:

- la base deve essere positiva;
- l'argomento deve essere positivo;
- la base deve essere diversa da 1.

Analiticamente questo si traduce nel sistema:

$$\begin{cases} 3-x > 0 \\ x+2 > 0 \\ x+2 \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3 \\ x > -2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

la soluzione di tale sistema può essere ottenuta graficamente:

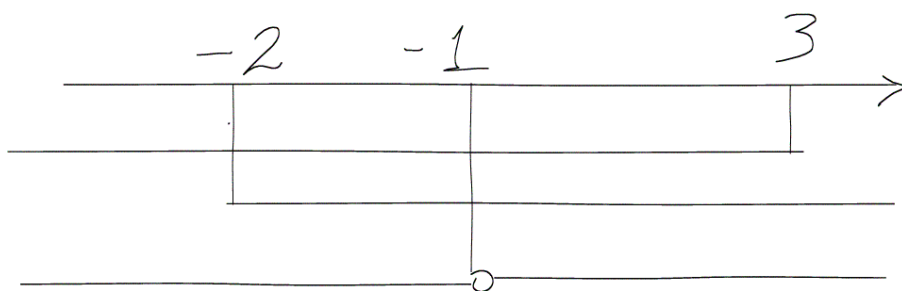


fig.(4.10) risoluzione grafica di sistemi di equazioni

le soluzioni del sistema sono pertanto:

$$-2 < x < -1 \cup -1 < x < 3$$

è stata praticamente attuata una sottrazione di insiemi.

geometria analitica:

il piano cartesiano:

il piano cartesiano è una rappresentazione geometrica di una cosa algebrica. Tale rappresentazione offre il vantaggio di avere un riscontro geometrico di nozioni prettamente algebriche.

La nozione basilare su cui è fondata la geometria analitica è la corrispondenza biunivoca tra i punti di un piano (anche solo di una retta, oppure nello spazio) e coppie ordinate di numeri.

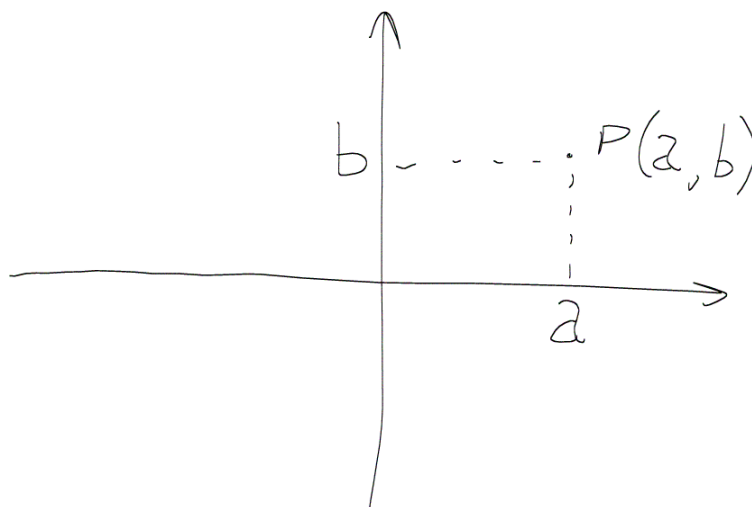


fig.(5.1) rappresentazione grafica di un punto nel piano

la retta:

il modello algebrico di una retta si presenta nella forma di un'equazione lineare di primo grado:

$$a x + b y + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad (5.2)$$

l'insieme delle rette corrispondono alle soluzioni di tale equazione.

Distanza tra due punti:

dati due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, la loro distanza ci è data dal teorema di Pitagora, ovvero:

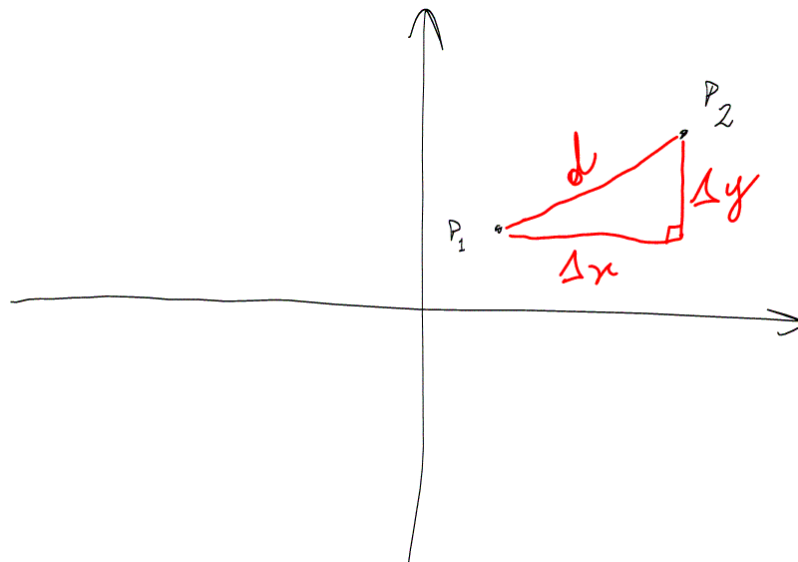


fig.(5.3)

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Punto medio:

calcolare il punto medio di un segmento su una retta è semplice, quando tale segmento è arbitrariamente orientato sul piano, possiamo desumerne il punto medio considerando disgiuntamente l'asse orizzontale da quello verticale.

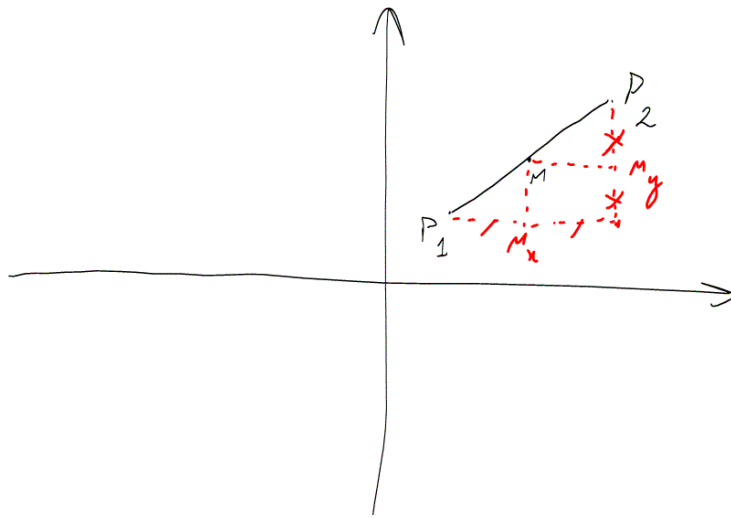


fig.(5.4) punto medio

si opera pertanto calcolando le rispettive medie M_x ed M_y , per poi riunirle come coordinate del punto medio M .

definizione diretta passante per due punti:

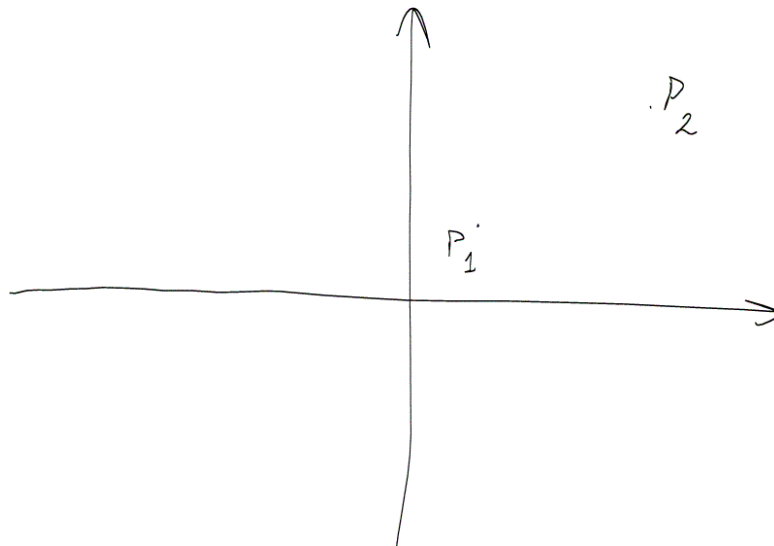


fig.(5.5) retta passante per due punti

dati due punti, come possiamo definire la retta passante per entrambi?

Possiamo anzitutto ricordare la definizione algebrica di retta prima data e dire che tali punti appartengono ad un'unica retta se e solo se sono entrambe soluzioni della stessa equazione lineare di primo grado.

Ci torna comodo ricordare che vale pure il contrario, ovvero che tutte le soluzioni di una equazione lineare di primo grado appartengono alla retta da essa rappresentata.

Se prendiamo, ad esempio, un terzo punto P, ci chiediamo se esso faccia parte o meno della retta passante per due punti A e B:

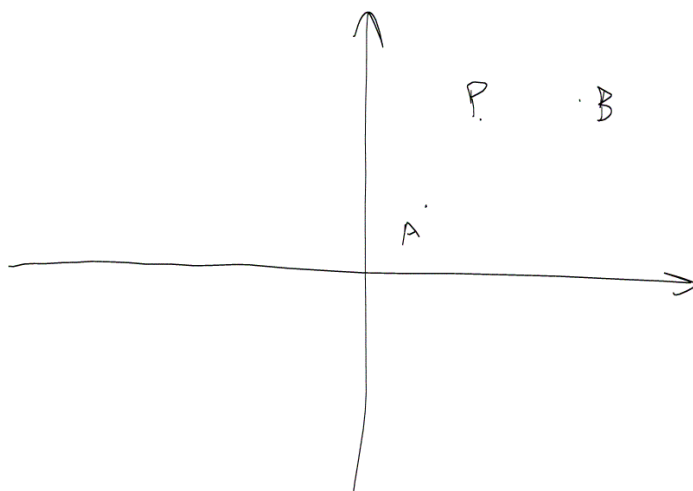


fig.(5.6) appartenenza di un punto ad una retta

questo si dimostra verificando la somiglianza tra triangoli, ovvero:

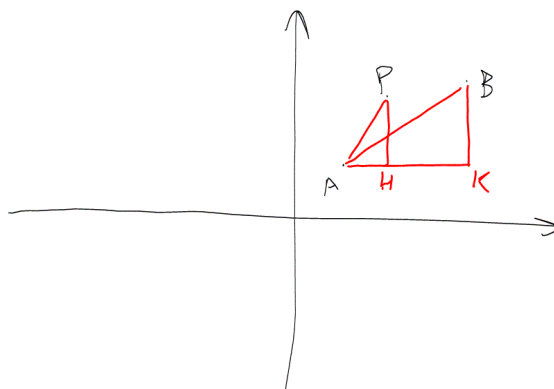


fig.(5.7) appartenenza di un punto ad una retta

il punto P appartiene alla retta passante per AB se e solo se il triangolo APH è simile al triangolo ABK. Infatti solo in questo caso il punto P sta sull'ipotenusa AB. Una rappresentazione algebrica di questa situazione è l'uguaglianza fra i rapporti dei lati dei triangoli:

$$PH/AH = BK / AK$$

Il rapporto ottenuto caratterizza tutte le rette ad eccezione delle rette verticali.

Le rette verticali ed orizzontali, le quali rivestono parecchia importanza in molti casi, si presentano rispettivamente nella forma:

$$x = x_0 \quad y = y_0$$

rette parallele:

due rette non verticali sono parallele se e solo se hanno stesso coefficiente angolare. Per dimostrare questo si ricorre ad un sistema tra le equazioni di due rette.

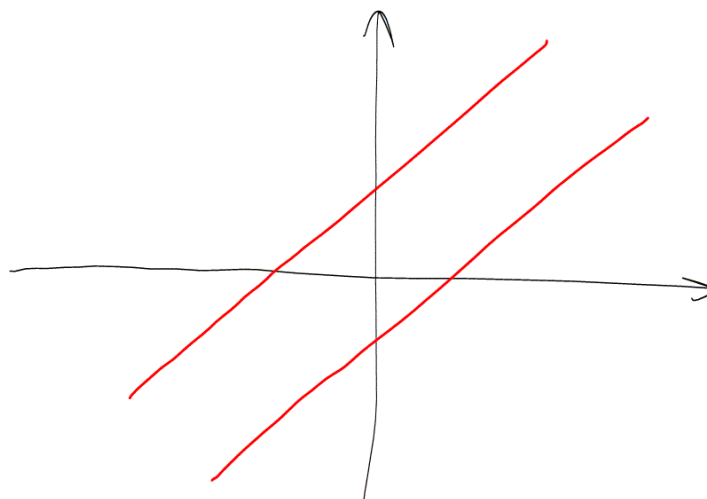


fig.(5.8) rette parallele

Se tale sistema non ammette soluzioni, si dimostra che le equazioni di tali rette hanno uguale coefficiente angolare.

Questo teorema è, tra l'altro, dimostrabile mediante l'applicazione di Kramer:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' = 0$$

Cosa significa, invece, quando tale sistema ammette soluzioni? In tal caso le rette si intersecherebbero in un punto e la soluzione del sistema corrisponderebbe alla coppia ordinata di numeri corrispondenti al punto di intersezione tra le due rette.

Perpendicolarità tra rette:

per dimostrare che due rette qualsiasi, quali ad esempio quelle sotto raffigurate, sono perpendicolari, è sufficiente dimostrare la formazione di un triangolo rettangolo mediante l'applicazione del Teorema di Pitagora:

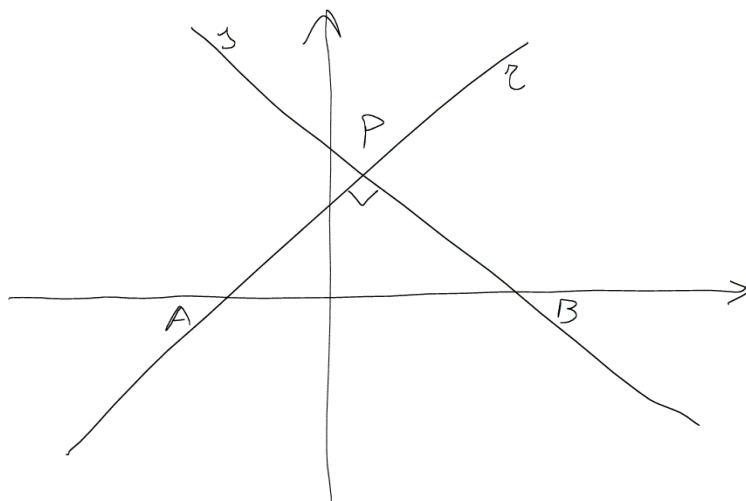


fig.(5.9) rette perpendicolari

$$AB^2 = \sqrt{(AP)^2 + (PB)^2} \quad (5.10)$$

Svolgendo i calcoli si ottiene che il coefficiente angolare di ciascuna retta è l'opposto del reciproco dell'altra: $m_1 = -1/m_2$.

Distanza punto – retta:

data una retta qualunque ed un punto, ci chiediamo quanto dista tale punto dalla retta in esame. Si premette che per distanza tra un punto e una retta si intende la distanza minima (che certamente esiste):

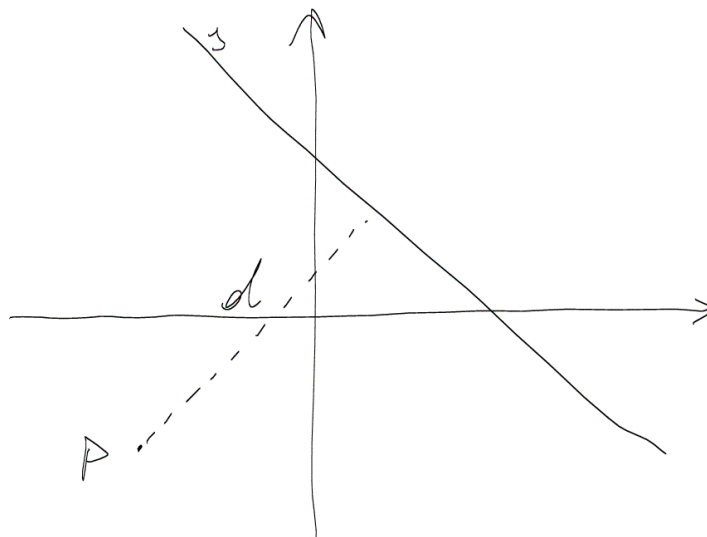


fig.(5.11) distanza punto - retta

per giungere alla dimostrazione di tale problema si opera come di seguente elencato:

- si individua la retta perpendicolare alla retta data passante per il punto assegnato;
- si individua il punto in cui le due rette si intersecano;
- si applica il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo individuato.

La formula che ne risulta è:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (5.12)$$

la parabola:

il suo modello algebrico si presenta nella forma:

$$y = a x^2 + b x + c \quad (5.13)$$

la loro rappresentazione grafica è una parabola:

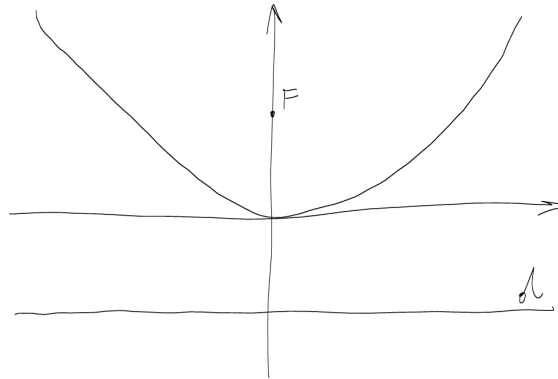


fig.(5.14)

per definizione la parabola è il luogo dei punti equidistanti da un punto detto fuoco ed una retta detta direttrice.

Tutti i punti della parabola sono soluzione dell'equazione sopra riportata.

La circonferenza:

è il luogo dei punti equidistanti da un punto solo detto centro. La distanza è chiamata raggio. Dati un raggio ed un centro, possiamo verificare che un punto qualsiasi del piano appartenga alla circonferenza data applicando il teorema di Pitagora:

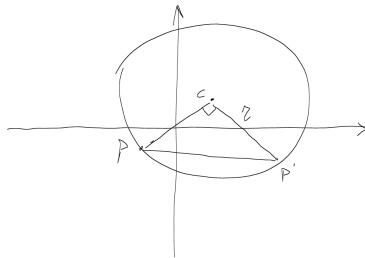


fig.(5.15)

la forma algebrica di una circonferenza è:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (5.16)$$

n.b.: non si ottiene una circonferenza per qualsiasi valore di a, b, c.

data una circonferenza, per individuarne il centro e il raggio, si applicano le seguenti:

$$c(-a/2, -b/2)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}. \quad (5.17)$$

i polinomi:

studio delle radici di un polinomio

si omette la descrizione dei polinomi di primo grado, il cui studio è ritenuto oltremodo elementare.

polinomi di secondo grado:

per studiare il segno delle radici di un polinomio di secondo grado, si adotta lo studio del segno di Cartesio: ovvero ci si basa sui segni dei coefficienti del polinomio, attribuendo una radice negativa ad ogni permanenza ed una radice positiva ad ogni variazione, come descritto nello schema seguente per ciascuno dei possibili casi:

segno dei coefficienti			Segno delle radici	
a	b	c		
+	+	+	-	-
+	+	-	-	+
+	-	+	+	+
+	-	-	+	-
-	+	+	+	-
-	+	-	+	+
-	-	-	-	-
-	-	+	-	+

Polinomi di terzo grado:

lo studio di un polinomio di terzo grado diventa abbastanza intuitivo se considerato come la somma tra una cubica ed un polinomio di secondo grado:

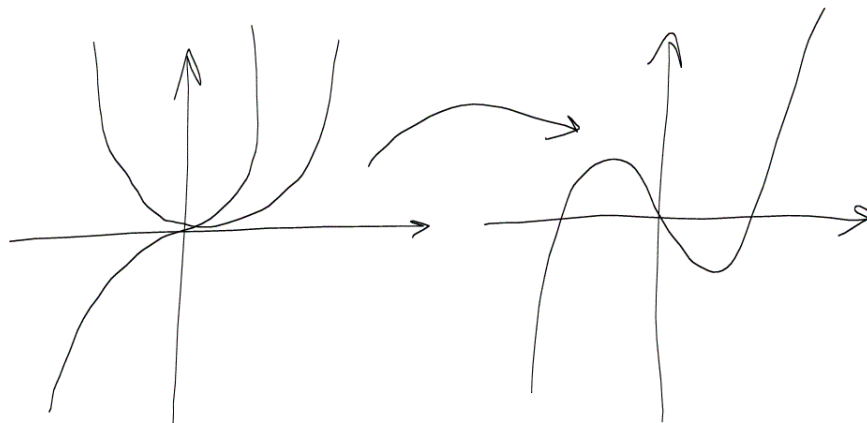


fig.(6.1)

$$x^3 + ax^2 + bx + c \quad (6.2)$$

è importante ricordare che la funzione $f(x) = x^3$ è una funzione dispari, ovvero simmetrica rispetto all'origine degli assi.

Il rapporto incrementale della funzione cubica in un intervallo $[x, x+h]$ è:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h^3 + (3x+a)h^2 + (3x^2 + 2ax + b)h}{h} \quad (6.3)$$

se vogliamo che la cubica in esame sia crescente, dobbiamo fare in modo che il rapporto incrementale sia sempre positivo, per qualunque valore di x , ovvero:

$$h^2 + (3x+a)h + (3x^2 + 2ax + b) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (6.4)$$

se osserviamo questa disuguaglianza, notiamo che è di secondo grado rispetto ad h . possiamo pertanto stabilire che il discriminante debba essere minore di zero

$$-3x^2 - 2ax + (a^2 - 4b) < 0 \quad \forall x \in R \quad (6.5)$$

abbiamo ottenuto un'altra disequazione di secondo grado, stavolta in x. Possiamo ulteriormente impostare che il discriminante debba essere minore di zero:

$$4a^2 + 12(a^2 - 4b) = 16a^2 - 48b = 16(a^2 - 3b) < 0 \quad (6.6)$$

se confrontiamo quest'ultimo risultato con l'equazione della cubica in esame,

$$x^3 + ax^2 + bx + c$$

possiamo trarre le seguenti

conclusioni:

Se $a^2 - 3b < 0$, la funzione è sempre crescente.

il segno di c rivela il segno dell'unica radice della cubica (unica in quanto, alle condizioni sopra stabilite, la funzione è sempre crescente), ovvero: se c è negativo, la radice sarà positiva, se c è positivo, la radice sarà negativa.

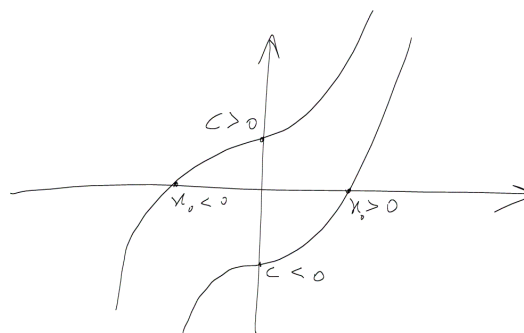


fig.(6.7)

Se invece $a^2 - 3b > 0$, le cose cambiano, ovvero la funzione non è più crescente in tutto l'insieme di definizione:

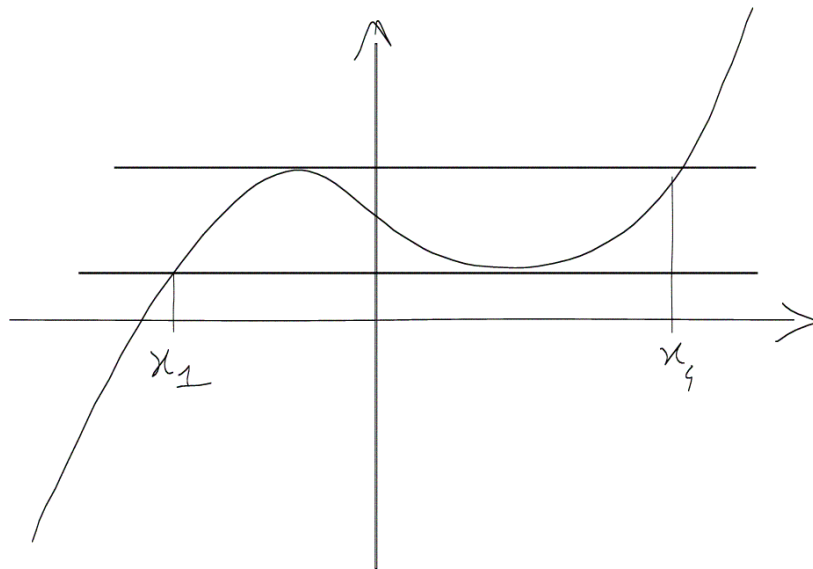


fig.(6.8)

x_1 ed x_4 sono i punti rispettivamente al di sotto e al di sopra dei quali la funzione non scende/sale mai. Se, in questo caso, studiamo il segno del rapporto incrementale in un intervallo esterno ad $[x_1, x_4]$, la funzione risulterebbe strettamente crescente senza effettivamente esserlo.

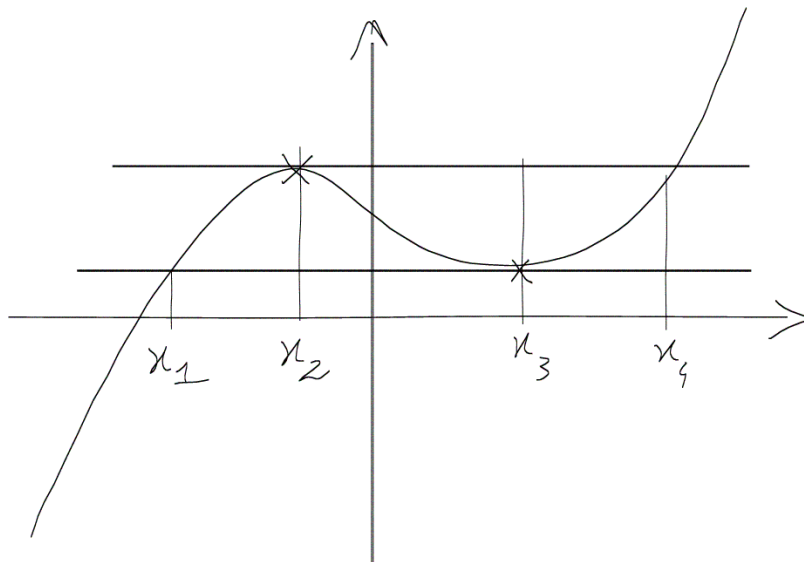


fig.(6.9)

individuati i punti x_2 ed x_3 , in corrispondenza dei quali la curva ha tangente orizzontale ed il punto x_5 interno all'intervallo $[x_2, x_3]$, considerando il rapporto incrementale:

$$h^2 + (3x + a)h + (3x^2 + 2ax + b)$$

ci accorgiamo di poter scegliere gli intervalli da prendere in considerazione sulla base del grafico precedentemente tracciato:

	x_1	x_2	x_5	x_3	x_4
h^2	+	+	+	+	
h	-	-	+	+	
termine nt_0	+	-	-	+	
SEGNO DELLE RADICI	-	-	+	-	-

fig.(6.10)

il segno delle radici del rapporto incrementale, individuato mediante il principio delle variazioni e delle permanenze, ci permette di capire in quali intervalli la funzione è crescente ed in quali intervalli la funzione è decrescente. In particolare il valore di x_5 è $a/3$ e si dimostra che i quattro intervalli individuati sono uguali.

Capitolo 7

Calcolo numerico:

data la seguente disequazione:

$$\pi^e < 24$$

trattandosi di una potenza a base irrazionale elevata ad esponente irrazionale, ci chiediamo se esiste un metodo per definirne il valore per verificare la disequazione. La domanda è: come fare a stabilire se un numero reale è minore dell'altro?

$$a < b ?$$

Una scontata, ma efficace risposta è: se esiste un numero razionale tra essi contenuto:

$$a < p < b$$

$$\forall [a, b] \subseteq \mathbb{R}, \exists p \in (\text{razionali}) : a < p < b \quad (7.1)$$

dobbiamo pertanto trovare un numero strettamente maggiore di a , nel nostro caso di π :

sappiamo che $\pi = 3,1415926535897932384626433832795\dots$

E sappiamo che $e = 2,718281828\dots$

Se approssimiamo questi valori rispettivamente a 3,15 e $2 + \frac{3}{4} (= 2,75)$, potremo

certamente dire che: $\pi^e < (3,15)^{2+\frac{3}{4}}$

Resta ora da dimostrare che

$$(3,15)^{2+\frac{3}{4}} < 24$$

$$(3,15)^{2+\frac{3}{4}} = (3,15)^2 \cdot \sqrt[4]{3,15^3}$$

$$3,15^2 = 9,9225$$

$$3,15^3 = 31,2559 < 16 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad \sqrt[4]{16 \cdot 2} = 2\sqrt[4]{2} < 2 \cdot 1,2 = 2,4$$

$$2,4 \cdot 9,9225 = 23,814 < 24 \Rightarrow \pi^e < 24$$

rappresentazioni dei numeri

la rappresentazione decimale dei numeri non è univoca, infatti:

$$0,4\overline{9} = 0,5$$

$$2,\overline{3} = 2,3$$

il passaggio da rappresentazione decimale a frazione avviene nel seguente modo:

$$\begin{aligned} 0,4\overline{9} &= \frac{49 - 4}{90} \\ 2,\overline{3} &= \frac{23 - 2}{9} \end{aligned} \quad (7.2)$$

si pone al numeratore la differenza tra l'intera cifra senza la virgola e l'antiperiodo, si pongono al denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti zeri quante sono le cifre decimali dell'antiperiodo.

Equazioni e Disequazioni irrazionali:

data la seguente equazione:

$$\sqrt{1-3x} = 3+x \quad (8.1)$$

è sbagliato applicare direttamente il quadrato ad entrambi i membri, poiché il quadrato non è l'inverso della radice.

Bisogna infatti determinare per prima cosa il campo di definizione della radice ed impostare la condizione che entrambi i membri siano positivi.

Trigonometria

Gli angoli

Usualmente la misura degli angoli avviene in gradi, ovvero si suddivide l'angolo giro in 360 parti e si dice che la trecentosessantesima parte dell'angolo giro è il grado. Tuttavia tale definizione non ha un preciso fondamento matematico.

Un altro metodo per misurare l'ampiezza degli angoli potrebbe, per esempio consistere nel tracciare una retta che interseca i lati dell'angolo in due punti e dire che la misura dell'angolo corrisponde alla lunghezza del segmento da esso intercettato:

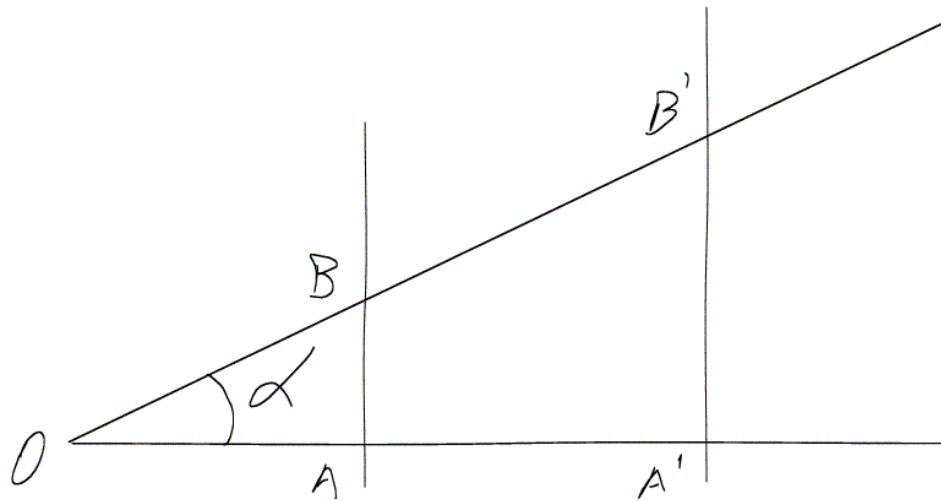


fig.(9.1)

dalla figura è possibile addirittura desumere che tale metodo di misura non è alterato dalla distanza della retta dal punto O . se consideriamo infatti la misura dell'angolo come il rapporto:

$$\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \quad (9.2)$$

tale misura sarebbe a sua volta uguale al rapporto:

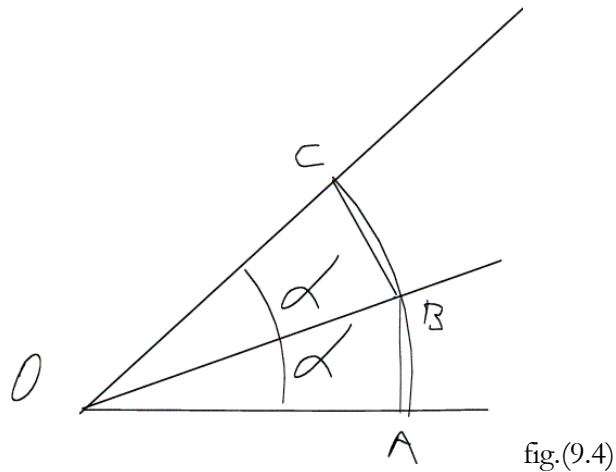
$$\alpha = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O'A'}} \quad (9.3)$$

tuttavia l'applicazione di un metodo simile avrebbe una grave limitazione, tale da non renderlo definibile come misura.

Una misura, per essere definita tale, deve garantire, ad esempio, che la misura del doppio di una grandezza sia a sua volta due volte la misura della grandezza non raddoppiata. Nel caso in esame, se prendessimo un angolo di ampiezza doppia, anche la sua misura dovrebbe raddoppiare, cosa che non accade seguendo il metodo sopraccitato.

Bisogna pertanto trovare un metodo di misura che rispetti tale condizione.

Se, al posto di tracciare una retta, tracciassimo una circonferenza, sarebbe vero che:



$$\overline{AB} = \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{AB} + \overline{CB} = 2\overline{AB} = 2\overline{CB}$$

questa è la caratteristica che si richiede ad un buon metodo di misura. Se, in particolare, vogliamo che la misura risulti univoca indipendentemente dal raggio della circonferenza, la misura dell'angolo potrebbe essere espressa come il rapporto tra la lunghezza dell'arco AB e il raggio della circonferenza OA.

Se, per comodità, volessimo far coincidere la misura dell'angolo con la lunghezza dell'arco, potremmo scegliere una circonferenza a raggio unitario.

Questo metodo, che è il più ampiamente utilizzato, consiste nella misura dell'angolo in “radianti”.

Tra la misura in radianti degli angoli e la misura in gradi vi è la seguente corrispondenza:

$$360^\circ = 2\pi(rad)$$

$$180^\circ = \pi(rad)$$

$$90^\circ = \frac{\pi}{2}(rad)$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{3}(rad)$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4}(rad)$$

$$30^\circ = \frac{\pi}{6}(rad)$$

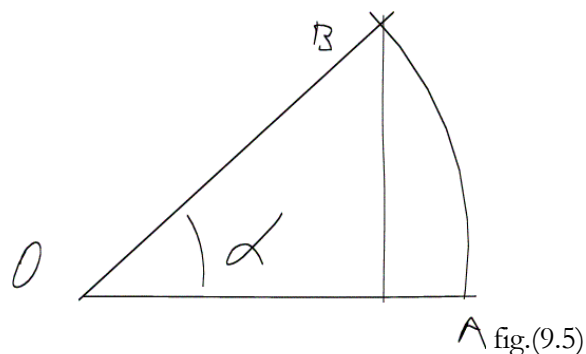
ecc.

la circonferenza di raggio unitario precedentemente menzionata prende il nome di circonferenza goniometrica e la sua equazione è:

$$x^2 + y^2 = 1$$

definizione di seno, coseno e regole fondamentali:

dato un angolo, come quello di seguito raffigurato:



il seno di tale angolo, indicato come $\sin \alpha$, è per definizione il rapporto tra i segmenti AB e OB.

Il coseno di tale angolo, indicato come $\cos \alpha$, è invece il rapporto tra i segmenti OA ed OB.

Se, in particolare, la circonferenza scelta è quella goniometrica, seno e coseno coincidono con le misure dei rispettivi segmenti AB e OA.

Da ciò si desume che la scelta della circonferenza goniometrica non influenza neanche queste ultime misure definite, tuttavia tale scelta rende più comoda e immediata la loro definizione.

È opportuno specificare che seno e coseno sono numeri, non segmenti.

Un'importante nozione riguarda la definizione di angoli positivi e negativi:

si definiscono positivi gli angoli orientati in senso antiorario, si definiscono negativi gli angoli orientati in senso orario.

Detto questo, si dimostrano i seguenti valori di seno e coseno:

$$\sin 0 = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

le funzioni seno e coseno:

se prendiamo un punto P generico sulla circonferenza goniometrica,

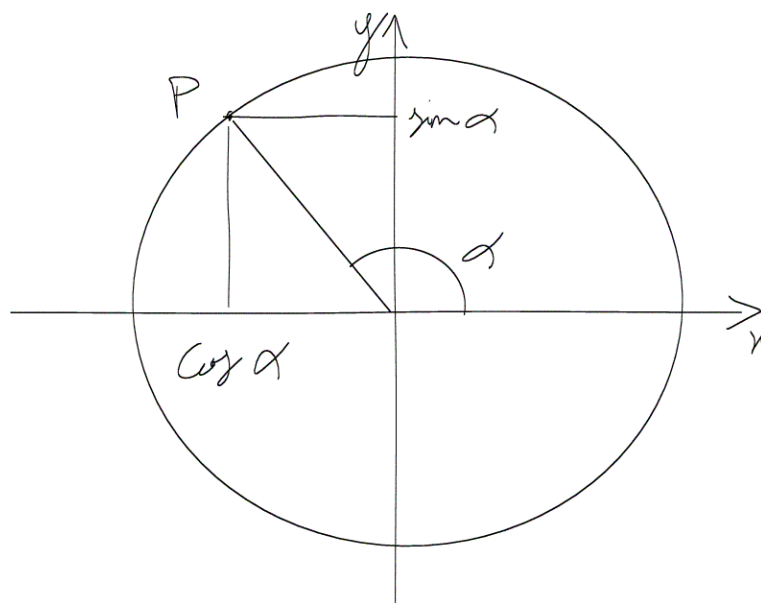


fig.(9.6)

diremo che il seno e il coseno dell'angolo α sono rispettivamente l'ordinata e l'ascissa del punto P.

se prendiamo un punto P' simmetrico a P rispetto l'asse delle ordinate,

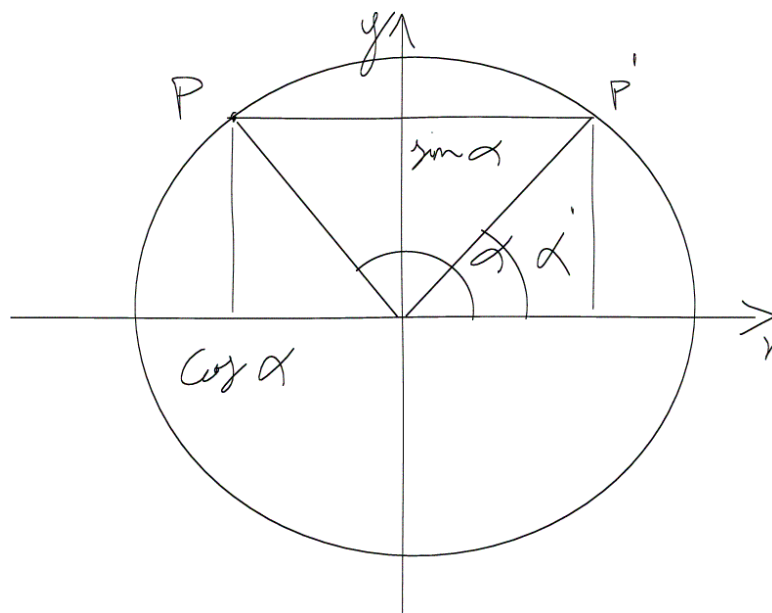


fig.(9.7)

possiamo notare che il relativo angolo α' ha lo stesso valore del seno e valore opposto di coseno. Questo angolo è pertanto definito complementare.

Se individuiamo i punti P'' e P''' , a loro volta simmetrici di P e P' rispetto l'asse delle ascisse,

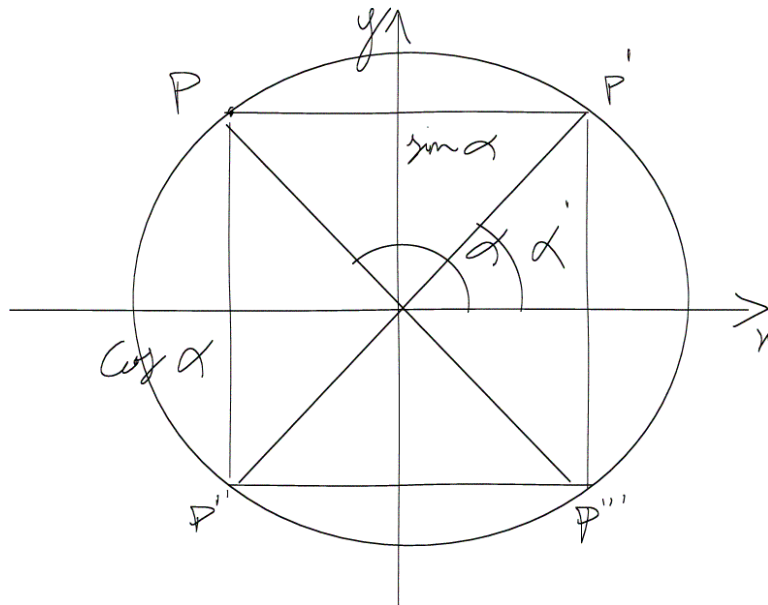


fig.(9.8)

otterremo angoli aventi ugual valore di coseno e valori opposti di seno. Tali angoli sono pertanto definiti supplementari.

I valori delle funzioni seno e coseno appartengono ai numeri reali ed assumono valori compresi tra zero e uno (inclusi).

Formule:

la formula cosiddetta “fondamentale” della goniometria, è la seguente:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (9.8)$$

questa regola si dimostra mediante l'applicazione del Teorema di Pitagora:

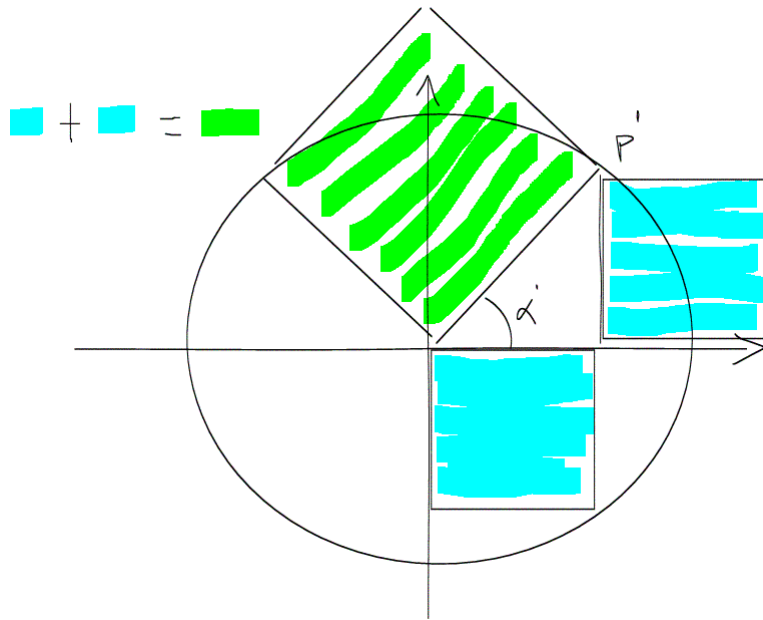
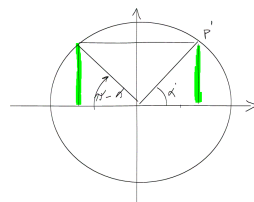


fig.(9.9)

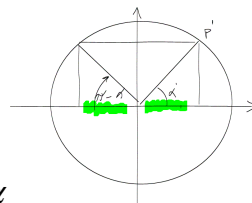
dalla formula fondamentale si possono ricavare varie formule inverse:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \cos \alpha &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}\end{aligned}\quad (9.10)$$

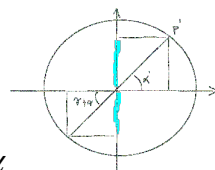
ci sono altre formule, facilmente dimostrabili:



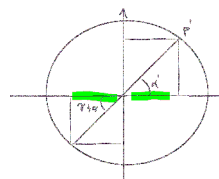
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$



$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$



$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$



$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

ecc.

se volessimo calcolare il seno oppure il coseno della somma di due angoli, non possiamo assolutamente ragionare nel modo seguente:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha - \cos \beta \rightarrow \text{assolutamente errato!!!}$$

infatti:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \neq \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{4}$$

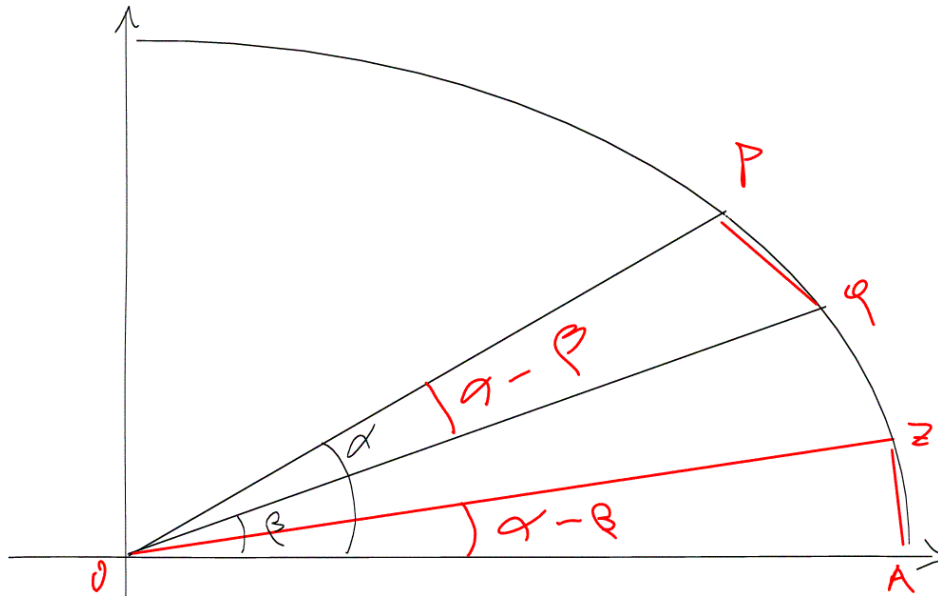


fig.(9.11)

i segmenti PQ e ZA sono uguali, potremo quindi dire che:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{ZA}^2$$

se consideriamo tali segmenti come distanze tra due punti, avremo che:

$$(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = [\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + \sin^2(\alpha - \beta)$$

sviluppando, si ottiene:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (9.12)$$

e, allo stesso modo:

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen} \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \text{sen} \beta \quad (9.13)$$

un'altra importante formula, che riguarda la duplicazione degli angoli, è un caso particolare della somma di angoli, infatti:

$$\begin{aligned} \text{sen} 2\alpha &= \text{sen}(\alpha + \alpha) \\ \cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) \end{aligned} \quad (9.14)$$

capita talvolta l'esigenza di calcolare il seno e il coseno di angoli divisi, ovvero:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \end{aligned} \quad (9.15)$$

formula di Prostaferesi:

un'altra importante formula è la seguente:

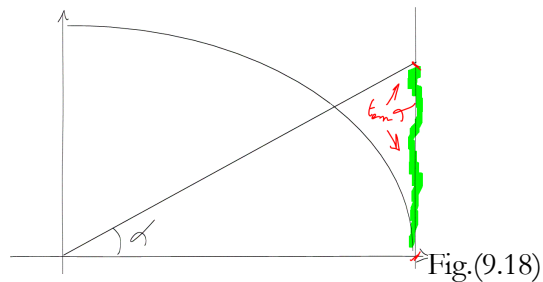
$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (9.16)$$

funzione tangente:

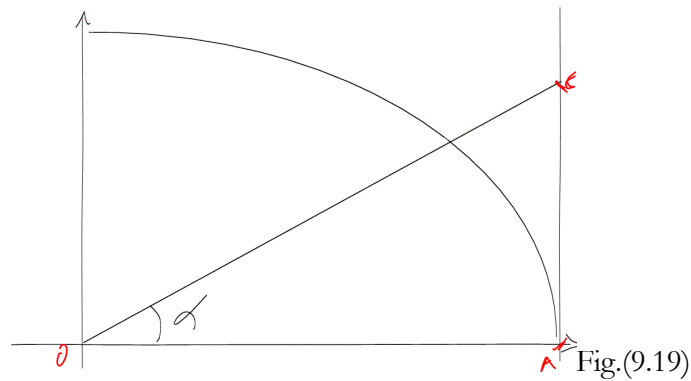
la funzione tangente, che si indica con:

$$f(\alpha) = \tan \alpha \quad (9.17)$$

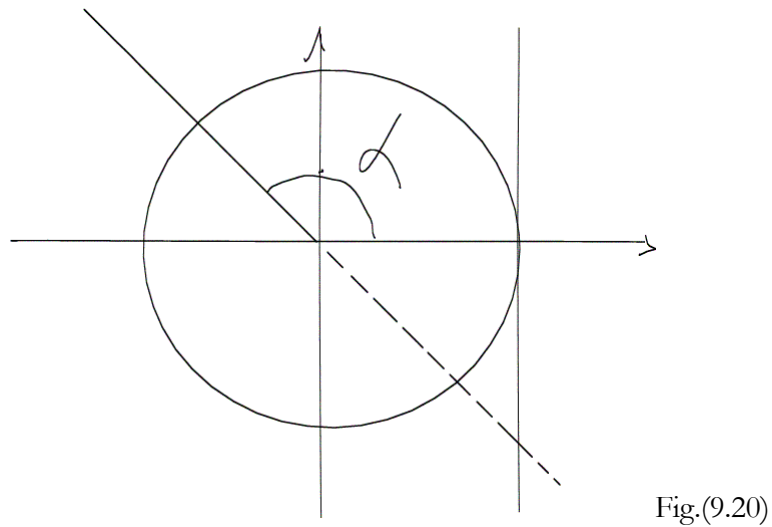
Consiste, dato un angolo α , nel segmento della retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto di intersezione col semiasse positivo delle ascisse, intercettato dall'angolo stesso:



Se, invece di considerare la circonferenza goniometrica, vogliamo utilizzare una circonferenza qualunque, la tangente è il rapporto tra i segmenti AC e AO indicati nella figura sottostante:



Questo ha senso quando parliamo di angoli acuti, nel caso di angoli ottusi, per indicare la tangente si considera il prolungamento di un lato dell'angolo:



Si ricava inoltre che

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (9.21)$$

Angoli insistenti ad una circonferenza:

Data una circonferenza di raggio r ed un angolo α ad essa insistente,

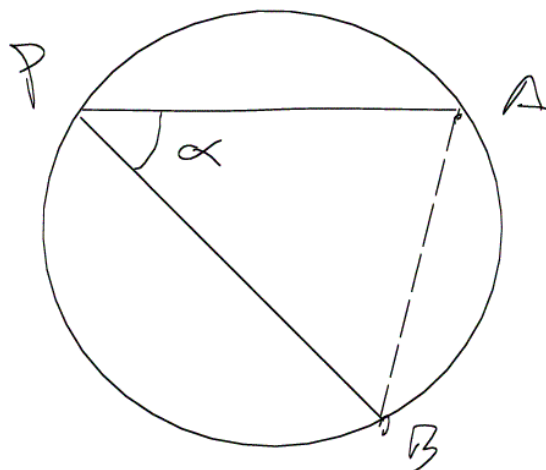


Fig.(9.21)

Avremo che il segmento AB sarà pari a:

$$\overline{AB} = 2r \cdot \sin \alpha$$

Indipendentemente dalla posizione del punto P rispetto ad A e B.

Teorema dei seni:

Preso un triangolo qualsiasi,

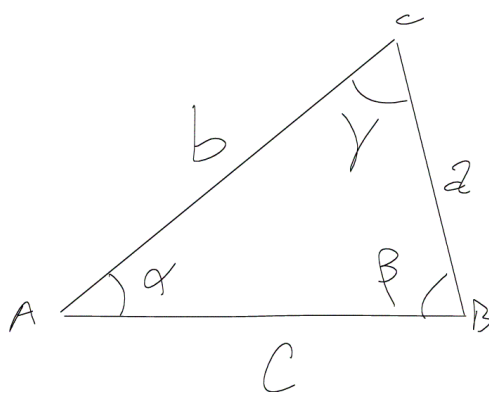


Fig.(9.22)

Vale che:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} \quad (9.23)$$

La dimostrazione di ciò deriva dal fatto che qualsiasi triangolo è inscrittibile in una circonferenza. Avendo pertanto:

$$\overline{CB} = 2r \cdot \sin \alpha \quad (9.24)$$

Possiamo dire che:

$$2r = \frac{\overline{CB}}{\sin \beta} \quad (9.25)$$

