

LEZIONE DEL 14/03/2007

35

TECNICHE DI MODULAZIONE

È STATO INTRODOTTO IL CONCETTO DI APPROSSIMAZIONE DI ANDAMENTI CONTINUI VARI CON FORME D'ONDA TIPICAMENTE DISCONTINUE.

A TAL FINE SI È VISTO CHE UN APPROCCIO TESO AD OTTENERE UN'APPROSSIMAZIONE PUNTUALE È DECISAMENTE INEFFICACE.

RISULTATI INTERESSANTI SI OTTENGONO, INVECE, PER MEZZO DI APPROSSIMAZIONI SPETTRALI, BASATI SU CONCETTI DI ELIMINAZIONE E/O OTTIMIZZAZIONE ARMONICA.

SIMMETRIE DI N-PLA

L'ASSENZA DI INTERE FAMIGLIE DI ARMONICHE DA UNA FORMA D'ONDA EMERGONO DA UNA PROPRIETÀ DELLA FORMA D'ONDA STESSA:

$$\sum_{k=0}^{m-1} f\left(t + \frac{kT}{m}\right) = 0 \quad (f(t), T)$$

AD ESEMPIO, TUTTE LE ARMONICHE PARI (MULTIPLE DI 2) SPARISCONO SE È RISPETTATO IL VINCOLO DI ALTERNATIVITÀ:

$$m=2 \Rightarrow f(t) + f\left(t + \frac{T}{2}\right) = 0 \quad \forall(t)$$

ANALOGAMENTE, IL VINCOLO DI SIMMETRIA DI TERNA IMPLICA L'ASSENZA DI TUTTE LE ARMONICHE MULTIPLE DI 3:

$$m=3 \Rightarrow f(t) + f\left(t + \frac{T}{3}\right) + f\left(t + \frac{2T}{3}\right) = 0$$

(36)

L'ASSENZA DI TUTTE LE ARMONICHE PARI E DI
TUTTE LE ARMONICHE MULTIPLE DI 3 È QUINDI
LEGATA AL SODDISFACIMENTO DI ENTRAMBE LE SUDDETTE
SIMMETRIE:

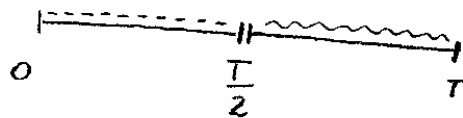
$$\begin{cases} f(t) + f\left(t + \frac{T}{2}\right) = 0 \\ f(t) + f\left(t + \frac{T}{3}\right) + f\left(t + \frac{2}{3}T\right) = 0 \end{cases}$$

LA SOLUZIONE DI QUESTO SISTEMA PUO' ESSERE
ESPLORATA IN UN SOLO PERIODO (POICHE' STIAMO
TRATTANDO UNA FORMA D'ONDA PERIODICA)



CON RIFERIMENTO AL VINGOLO DI ALTERNATIVITA' ABBIAMO:

$$\underline{f\left(t + \frac{T}{2}\right)} = - \underline{f(t)} \quad \forall t \in \left(0, \frac{T}{2}\right)$$

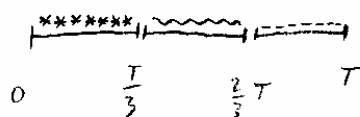


UNA INTERESSANTE CONSEGUENZA DI QUESTA PROPRIETA'
E CHE CI E' SUFFICIENTE CONOSCERE L'ANDAMENTO DI f IN
MEZZO PERIODO PER POTER AFFERMARE DI CONOSCERNE
L'ANDAMENTO IN TUTTO IL PERIODO.

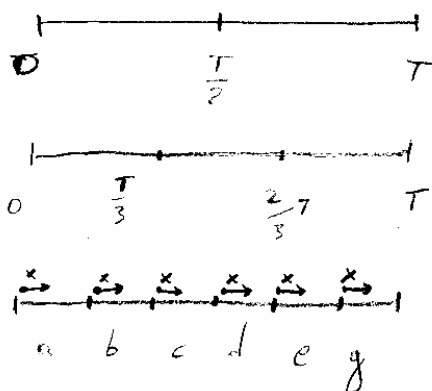
IN VIRTU' DEL VINCOLO DI SIMMETRIA DI TERNA,
ABBIAMO A SUA VOLTA;

(37)

$$\underline{f\left(t + \frac{2}{3}T\right)} = - \underline{f(t)} - \underline{f\left(t + \frac{T}{3}\right)} \quad \forall t \in \left(0, \frac{T}{3}\right)$$



RICORDANDO CHE, NEL CASO IN ESAME, VOGLIAMO CHE
SUSSTANO CONTEMPORANEAMENTE IL VINCOLO DI TERNA E
IL VINCOLO DI ALTERNATIVITA', RAGIONIAMO DIVIDENDO
IL PERIODO IN $3 \cdot 2 = 6$ PARTI:



PER CIASCUNO DEI 6 INTERVALLI OTTENUTI DEFINIAMO UNA
COORDINATA LINEARE x CON ORIGINE COINCIDENTE CON L'INIZIO
DELL'INTERVALLINO STESSO. LA RESTRIZIONE DI DOMINIO DELLA
FUNZIONE f ENTRO CIASCUNO DEI MINI INTERVALLI DI $\frac{T}{6}$ ASSUMA IL
NOME DELL'INTERVALLINO STESSO E SIANO LE ASCISSE TRASLATE
OPPORTUNAMENTE IN MODO DA POTER USARE LA VARIABILE INDIPENDENTE
 x .

ALLA LUCE DEI VINCOLI IMPOSTI SI HA, AD ESEMPIO, CHE LA FUNZIONE $a(x)$ È LA COMPLEMENTARE DELLA FUNZIONE $d(x)$.

(38)

I VINCOLI DI ALTERNATIVITÀ POSSONO ESSERE RISCritti NEL SEGUENTE MODO:

$$\begin{cases} f(t) = a(x) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -d(x) \\ f\left(t + \frac{T}{6}\right) + f\left(t + \frac{T}{2} + \frac{T}{6}\right) = b(x) + c(x) = 0 \\ f\left(t + \frac{T}{3}\right) + f\left(t + \frac{T}{2} + \frac{T}{3}\right) = c(x) + g(x) = 0 \end{cases}$$

I TRE VINCOLI FUNZIONALI SUSCRITTI SONO VALIDI $\forall x \in \left(0, \frac{T}{6}\right)$.
LE TRE FUNZIONI COMPONENTI IL SISTEMA SONO ESPRESSE NELLA MEDESIMA VARIABILE (ABBIAMO, INFATTI, x IN LUOGO DI $t + \varphi$).

TENENDO CONTO ANCHE DEL VINCOLO DI SIMMETRIA DI TERNA ABBIAMO:

$$\begin{cases} a(x) + c(x) + e(x) = 0 & \forall x \in \left(0, \frac{T}{6}\right) \Leftrightarrow t \in \left(0, \frac{T}{6}\right) \\ b(x) + d(x) + g(x) = 0 & \forall x \in \left(0, \frac{T}{6}\right) \Leftrightarrow t \in \left(\frac{T}{6}, \frac{T}{3}\right) \end{cases}$$

COMBINANDO I VINCOLI DI ALTERNATIVITÀ CON I VINCOLI DI SIMMETRIA DI TERNA, OTTENIAMO UN SISTEMA DI 5 EQUAZIONI NELLE 6 INCOGNITE RAPPRESENTATE DA ALTRETTANTE FUNZIONI.

IL SISTEMA COMPLETO È:

(39)

$$\begin{cases} a(x) + c(x) + e(x) = 0 \\ b(x) + d(x) + g(x) = 0 \\ a(x) + d(x) = 0 \\ b(x) + e(x) = 0 \\ c(x) + g(x) = 0 \end{cases}$$

OVVIAMENTE IL VINCOLO DI SIMMETRIA DI N-PLA
IMPLICA L'ELIMINAZIONE DELL'ARMONICA N E DI TUTTI
I MULTIPLI DI N. PER QUESTO MOTIVO HA SENSO
SCEGLIERE N TRA I NUMERI PRIMI.

SCELTO UN VALORE DI X, IL SISTEMA DIVIENE UN
BANALE SISTEMA LINEARE:

$$x = x^* \Rightarrow \begin{cases} a = -d \\ b = -e \\ c = -g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + c - b = 0 \\ b - a - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{POSSIBILE SOLUZIONE } a = b - c$$

FISSATI, PERTANTO, UN VALORE AD ARBITRIO PER
b E c, IL VALORE DI a È UNIVOCAMENTE
DETERMINATO. DI CONSEGUENZA TUTTO IL SISTEMA
PUO' ESSERE RISOLTO.

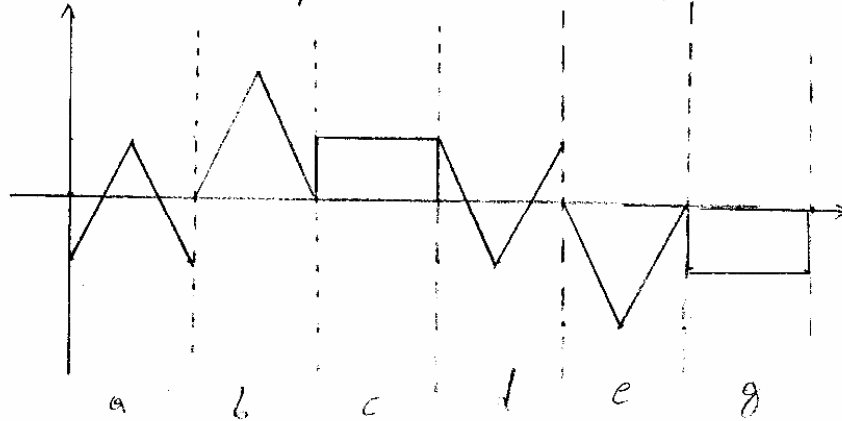
TUTTO CIÒ ESULA DALLA DIPENDENZA DA x :

(40)

$$a(x) = b(x) - c(x) \quad \forall x \in [0, \frac{T}{6}]$$

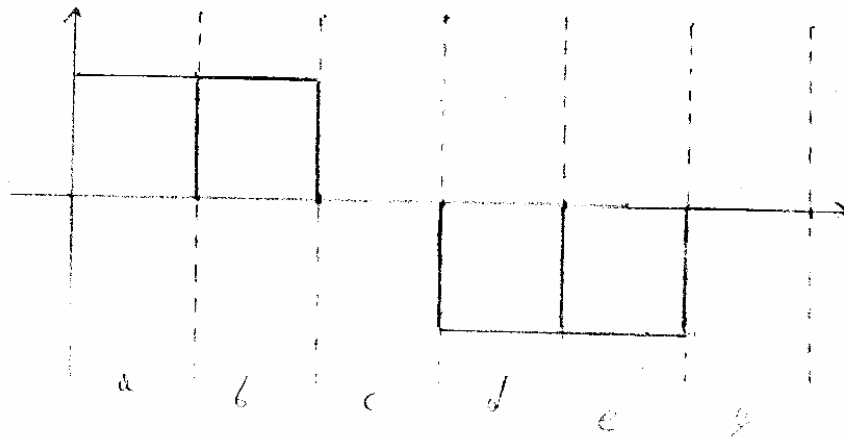
ESEMPIO:

FISSIAMO, AD ARBITRIO, LE FORME D'ONDA DI b E c



ESEMPIO:

INVERTER A PONTE:

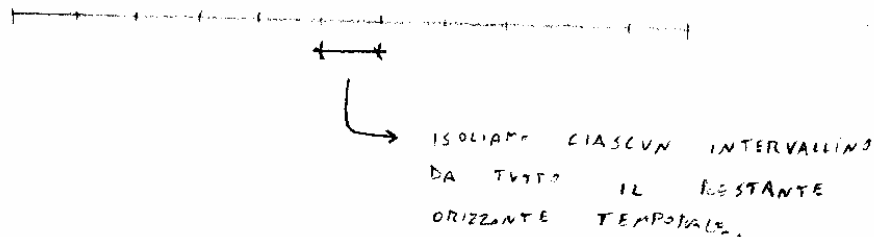


LA FIGURA FA RIFERIMENTO AD UN PILOTAGGIO UNIPOLARE $\Rightarrow$ I VALORI AMMESSI $\in \{-V_c, 0, V_c\}$. PERTANTO b E c VANNO SCELTE IN MANIERA TALE CHE NEI RESTANTI INTERVALLI LA FUNZIONE NON DEBBA ASSUMERE VALORI DIVERSI DA QUELLI AMMESSI (E QUELLI CHE L'INVERTER È IN GRADO DI FORNIRE).

APPROSSIMAZIONE SPETTRALE PER VIA LOCALE.

(41)

QUANDO SI VUOLE APPROSSIMARE UNA FORMA D'ONDA
IN TEMPO REALE SI RITORNE AD APPROSSIMAZIONI
SPETTRALI PER INTERVALLI DI TEMPO AL LIMITE
INFINITESIMI:



RAGIONANDO PER SINGOLI INTERVALLINI PERALTRO
PICCOLO A PIACERE, ~~SARÀ POSSIBILE ESTENDERE ANCHE A CASI NON PERIODICI
SPARTISCE IL VINCOLO DI PERIODICITÀ~~
~~DELLA FORMA D'ONDA.~~

PER OTTENERE UNA BUONA APPROSSIMAZIONE SPETTRALE
DELLA FORMA D'ONDA, NELL'INTERVALLO IN CONSIDERAZIONE,
CI AVVALIAMO DEL SEGUENTE TEOREMA (NON DIMOSTRATO):
TEOREMA DI APPROSSIMAZIONE SPETTRALE PER VIA LOCALE.

SUPPOSTO DI APPROSSIMARE UNA FORMA D'ONDA PER
 N INTERVALLI, SIA e_m L'ERRORE DELLO SPETTRO
DELLA FORMA D'ONDA APPROSSIMANTE RISPETTO ALLA FORMA
D'ONDA APPROSSIMANDA. SIA e_m^* UN'ARBITRARIO VALORE
DELLA SUCCESSIONE e_m .
SE, PER $N \rightarrow \infty$ SI HA CHE $e_m^* \rightarrow 0$ CON UN
ORDINE DI INFINITESIMO MAGGIORE DELL'ORDINE DI
INFINITESIMO DELLA MISURA DELL'AMPIEZZA DEL SINGOLO
INTERVALLO, L'ERRORE SPETTRALE DELLA FORMA D'ONDA

APPROSSIMANTE ε' NULLO $\forall$ ARMONICA, OVVERO: $c_m = 0 \quad \forall m.$

(42)