

QUANTITA' DI MOTO : grandezza vettoriale (è differente dall'energia che è uno scalare)



Supponiamo che essi interagiscano solo tra loro, cioè:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

SISTEMA ISOLATO:

interazioni avvengono solo tra le parti

2° principio della dinamica

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{12} \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \end{cases} \Rightarrow m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0$$

sostituiamo

$$\vec{a}_1 = \frac{d}{dt} \vec{v}_1$$

$$\vec{a}_2 = \frac{d}{dt} \vec{v}_2$$

otteniamo e sapendo che la somma delle derivate è uguale alla derivata della somma

$$\frac{d}{dt} [m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2] = 0$$

è una grandezza costante $\rightarrow$ perché la sua derivata rispetto al tempo è 0

si chiamano COSTANTI DEL MOTO

$$m_1 \vec{v}_1 \quad \text{e} \quad m_2 \vec{v}_2$$

$$\vec{P} = m \vec{v}$$

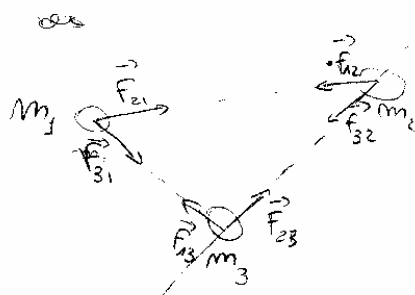
QUANTITA' DI MOTO

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO

In un sistema isolato la quantità di moto è costante

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \text{cost}$$

Prendiamo un numero arbitrario di masse puntiformi che interagiscono solo tra loro.



Per dimostrare il principio di cons. della quantità di moto considero 3 masse puntiformi

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} \\ m_3 \vec{a}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} \end{cases}$$

sommo membro a membro

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 = 0$$

come prima

$$\frac{d}{dt} [m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3] = 0$$

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = \text{cost}$$

Dato un SISTEMA ISOLATO di n masse puntiformi, la quantità di moto totale è costante

$$\begin{cases} \vec{P}_i = m_i \vec{v}_i \\ \vec{P}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N \vec{P}_i \end{cases} \quad N \text{ (n° delle masse puntiformi)}$$

in un sistema isolato è costante

$$\vec{F} = m \vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{P} \quad \text{perché } m \text{ è costante}$$

IMPULSO

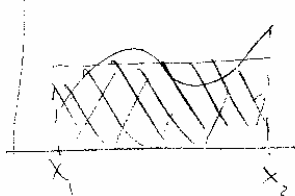
$$\vec{I}(t_1, t_2) \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt \quad \leftarrow \text{definizione}$$

$$\vec{I}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \vec{P}(t) dt = \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1)$$

dato $y = f(x)$

$$\bar{y} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} y(x') dx' \quad \text{valor medio di } y$$

geometricamente è l'altezza del rettangolo "equivalente" che ha la stessa area

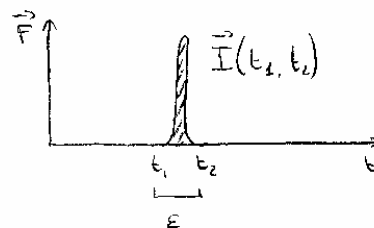
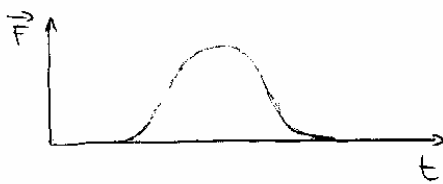


se $f(x) > 0$

forza media tra t_1 e t_2

$$\vec{F} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = \frac{\vec{I}(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{P}_2 - \vec{P}_1}{t_2 - t_1}$$

FORZE NON IMPULSIVE



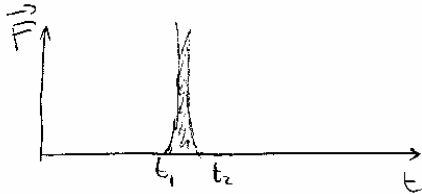
ci aspettiamo che

se $\epsilon \rightarrow 0$ $\vec{I}(t_1, t_2) \rightarrow 0$

Forza NON impulsiva se è tale che il suo $\vec{I}(t_1, t_2) \rightarrow 0$ se $t_2 - t_1 \rightarrow 0$

Una forza non impulsiva se fatta agire per un tempo infinitesimo, fa variare la quantità di moto di una infinitesima.

FORZA IMPULSIVA



forza che in un intervallo temporale anche brevissimo ^{infinitesimo} sviluppa un'intensità tale che riesce a cambiare la quantità di moto di un valore finito $\neq 0$

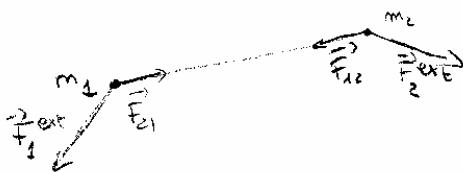
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} I \neq 0 \quad \text{finito}$$

URTI

~~di interazione~~
urto $\rightarrow$ processo in cui ~~due o più~~ 2 o $+ \infty$ punti materiali interagiscono per un tempo brevissimo, al limite infinitesimo (es. un pugno non è un urto)

Le forze che si vengono a sviluppare negli urti, sono tutte forze impulsive.

Differenza di comportamento tra forze



ipotesi che esistono forze esterne: cioè generate da qualcosa che non fa parte del sistema

Cioè il sistema non è isolato

suppongo $\vec{F}_{1, \text{ext}}$ $\vec{F}_{2, \text{ext}}$ NON IMPULSIVE

$$t_1$$

$$t_2 = t_1 + \epsilon$$

$$\vec{P}_{\text{Tot}} = \text{cost}$$

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_2$$

se è presente una forza esterna, ma $\vec{F}_{ext}$ è non impulsiva, la quantità di moto tot non cambia.

$$\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$$

$$\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$$

$$\vec{p}_{tot} = \vec{p}_1(t_1) + \vec{p}_2(t_1)$$

$$\vec{p}_{tot} = \vec{p}_1(t_2) + \vec{p}_2(t_2)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_1^{ext}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_2^{ext}$$

sommo

$$\frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}$$

$$\vec{p}_{tot}$$

$\Rightarrow \vec{p}_{tot}$ non si conserva (ma la sua derivata $\neq 0$, non è una cost.)

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \vec{p}_{tot} dt' = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1^{ext} dt' + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2^{ext} dt' = \vec{I}_1(t_1, t_2) + \vec{I}_2(t_1, t_2)$$



$$\vec{p}_{tot}(t_2) - \vec{p}_{tot}(t_1) = \vec{I}_1(t_1, t_2) + \vec{I}_2(t_1, t_2)$$

$$\text{se } t_2 - t_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{I}_1 \rightarrow 0 \quad \& \quad \vec{I}_2 \rightarrow 0$$

essendo ^{forze} NON impulsive

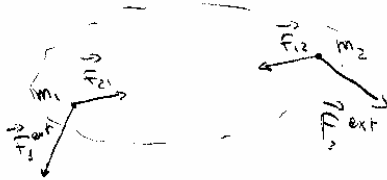
$$\boxed{\vec{p}_{tot}(t_2) - \vec{p}_{tot}(t_1) \approx 0} \quad \triangleleft$$

La quantità di moto non cambia tra due istanti infinitamente vicini, se ho un sistema non isolato dove agiscono forze interne NON impulsive.

08/03/06 (2 ore + 1 ora)

URTO

- In linea di principio le forze che si sviluppano in tali interazioni possono ~~essere~~ ^{avere in} carattere impulsivo.



se $\vec{F}_{ext}$ sono NON impulsive $\Rightarrow \vec{P}_{tot}(t) \cong \vec{P}_{tot}(t_1 + \epsilon)$ $\rightarrow \epsilon$ piccolo
 $\vec{P} = m, \vec{v}$

URTO ELASTICO

Ipotesi: sistema isolato o non isolato ma con $\vec{F}_{ext}$ NON impulsive

1) Vale il principio di conservazione della quantità di moto
 $\vec{P}_{tot}(t) \cong \vec{P}_{tot}(t_1 + \epsilon)$

2) Si

$$E(t_1) = E(t_1 + \epsilon)$$

URTO ANELASTICO

Ipotesi:

1) $\vec{P}_{tot}(t) \cong \vec{P}_{tot}(t_1 + \epsilon)$

C'è dissipazione di energia meccanica (perso per trasformazioni in calore) ^{es. termica}
_{es. acustica}

Non si conserva E.

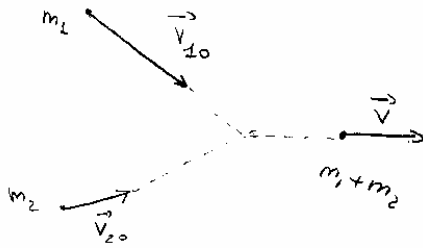
URTO PERFETTAMENTE ANELASTICO

Ipotesi:

1) $\vec{P}_{tot}(t) \cong \vec{P}_{tot}(t_1 + \epsilon)$

Le due parti dopo l'urto si uniscono e si muovono in maniera concorde ~~ma~~ rimanendo attaccate.

URTO PERFETTAMENTE INELASTICO



$$\begin{aligned} \vec{P}_{\text{Tot}}(t_i) &= \vec{P}_i = m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20} \\ \vec{P}_{\text{Tot}}(t_i + \epsilon) &= \vec{P}_f = (m_1 + m_2) \vec{V} \end{aligned} \Rightarrow \vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20}}{m_1 + m_2}$$

URTO CENTRALE: urto in cui le velocità ^{mentre} delle particelle ^{prima} dell'urto giacciono sulla congiungente le due masse



Si può definire come moto unidimensionale rettilineo

URTO CENTRALE ELASTICO



$$\vec{v}_{10} = v_{10} \hat{z}$$

$$\vec{v}_1 = v_1 \hat{z} \leftarrow \text{velocità dopo l'urto della particella 1}$$

$$E_i = E_f \quad \begin{array}{l} i: \text{istante prima dell'urto} \\ f: \text{istante subito dopo l'urto} \end{array}$$

non ci interessa ciò che avviene durante l'urto.

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 + \underbrace{\phi}_{U=0}$$

$$E_f = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \underbrace{\phi}_{U=0}$$

Se ci sono forze est. NON impulsive, non cambia né la quantità di moto, né l'energia meccanica prima e dopo l'urto
(se l'urto è ELASTICO)

• $P_i = P_f$

non sono vettori perché considero solo la componente x
essendo il moto unidimensionale

⑥ $P_i = m_1 v_{10} + m_2 v_{20}$

⑥+⑦ $P_f = m_1 v_1 + m_2 v_2$

queste velocità essendo componenti, sono
grandezze algebriche, cioè dotate di segno

$$\begin{cases} E_i = E_f \\ P_i = P_f \end{cases}$$

$$v_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{10} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{20}$$

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{20} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{10} \leftarrow \text{la derivo dalla prima, scambiando gli indici}$$

se ci fosse una differenza, quando il den = 0
avrei una velocità che va all'infinito

se $v_{20} = 0$ (se m_2 inizialmente ferma)

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10}$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{10}$$

caso particolare $m_1 \gg m_2$

essendo $m_2 \ll m_1$

perché la vettura più così
mole può viene investita
anche se la macchina
va piano?

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10} \approx v_{10}$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{10} \approx 2v_{10}$$

WOW

$$V_{20} = 0 \quad | \quad m_1 \ll m_2$$

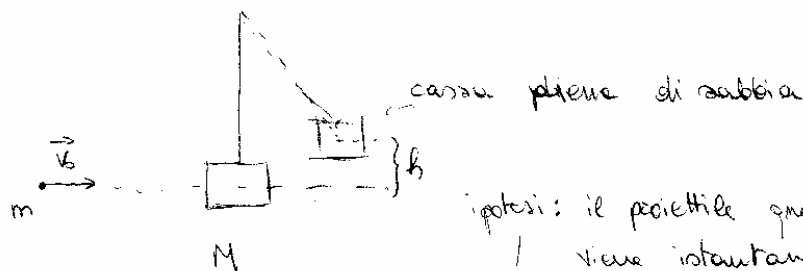
La macchina sbatte contro un muro

$$V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{10} \approx -V_{10}$$

$$V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_{10} = 0$$

PENDOLO BALISTICO

misura le velocità con cui vengono sparati i proiettili



ipotesi: il proiettile qual entra nella cassa viene istantaneamente fermato
→ ipotizziamo che avvenga un urto

convertiamo il probl. di una misura di velocità in una di lunghezza

Processo URTO ANELASTICO PERFETTAMENTE (centrale)

t_1 istante prima dell'urto

$t_1 + \epsilon$ istante subito dopo l'urto

↑
piccolo

è un urto centrale, cioè rettilineo, quindi passo alle componenti.

$$P_i = m v_0$$

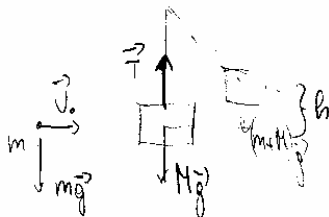
(t_1)

$$\Rightarrow v = \frac{m}{m+M} v_0$$

$$P_f = (m+M) v$$

($t_1 + \epsilon$)

il sistema non è isolato, ma le forze esterne sono di tipo non impulsivo



(Mg non è impulsiva perché in un tempo infinitesimo, Mg ha sempre un'intensità finita) -

T : essendo la fune flessibile, non è in grado di sviluppare forze impulsive

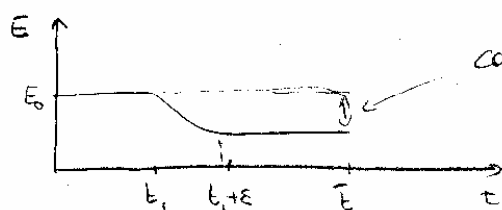
subito dopo l'urto

$\vec{T}$ non so che tipo di forza è, ma so che non compie lavoro perché:



gli spostamenti infinitesimi sono sempre $\perp$ alla direzione della forza $\vec{T}$.

Quindi compie lavoro solo $M\vec{g}$, che è una forza conservativa



calcolare ΔE

T : istante in cui raggiungo la quota h

Quindi, durante l'urto E diminuisce, ma
subito dopo l'urto E rimane costante

(i) $t_1 + \epsilon$ $E_i = \frac{1}{2}(m+M)v^2 + (m+M)gz_i$ considero la quota iniziale $z_i = 0$

(f) T $E_f = \phi + (m+M)gz_f$ $z_f = h$
perché alla quota max $v=0$

$$E_i = E_f \Rightarrow h = \dots$$

E_0 energia meccanica che aveva inizialmente il sistema

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \phi + 0 + 0$$

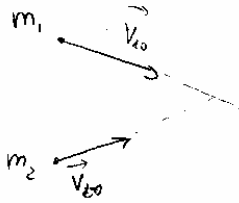
$\uparrow$ $\uparrow$
Tensione U_m e U_H

$$\Delta E = E_0 - E_i = E_0 - E_f$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M}v_0\right)^2 \neq 0$$

$\leftarrow$ continua

URTO NON CENTRALE : le velocità prima dell'urto non giocano lungo la congiungente



orto che avviene in un piano

grandest note: $\vec{v}_{10}$
 $\vec{v}_{20}$

incoignite : $\begin{matrix} \rightarrow \\ V_3 \\ \rightarrow \\ V_2 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 2 \text{ component} \\ 2 \end{matrix} \rightarrow 4 \text{ incoignite}$

Ipotesi: sistema isolato o non è isolato, f^{est} non impulsivo

Conservazione quantità di moto

$$m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad \therefore \text{ho due equazioni}$$

$$m_1 v_{1ox} + m_2 v_{2ox} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} \quad \text{2 eqns.}$$

Superelastico Sia NON CENTRALE ELASTICO

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2$$

$$v_{30}^2 = |\vec{v}_{30}|^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$E_f = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$E_i = E_f \quad \leftarrow$ ho una equaz.

La 2^a equaz. ~~si deve trovare~~ ci deve essere data dal problema

Le equaz. mancanti ci devono essere fornite dalle condizioni date del problema

URTO (NON CENTRALE)	Equaz. frnte de principi di conservazione	Equaz. accessorie (date dal testo del proble)
ELASTICO	③ $\begin{cases} 2 (\vec{p}_i = \vec{p}_f) \\ 1 (E_i = E_f) \end{cases}$	1
ANELASTICO	② $(\vec{p}_i = \vec{p}_f)$	2
TOTALMENTE ANELASTICO	② $(\vec{p}_i = \vec{p}_f)$	2 $\leftarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2$

Ora in più il sistema non lo considero più un punto materiale, ma come un corpo esteso

CENTRO DI MASSA

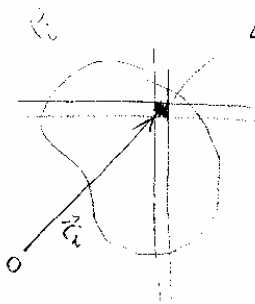
una collezione di
di N punti materiali m_i



posizione del centro di massa di un oggetto continuo

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad \leftarrow \text{definizione}$$

$M \rightarrow$ massa del sistema



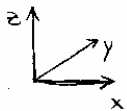
Δm_i ΔV_i
divido in tanti cubetti

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \Delta m_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \rho_i \Delta V_i = \int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$$

$\Delta V_i \rightarrow 0$ $\uparrow$
integrale di volume

densità
 $\downarrow$
 $\rho_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$

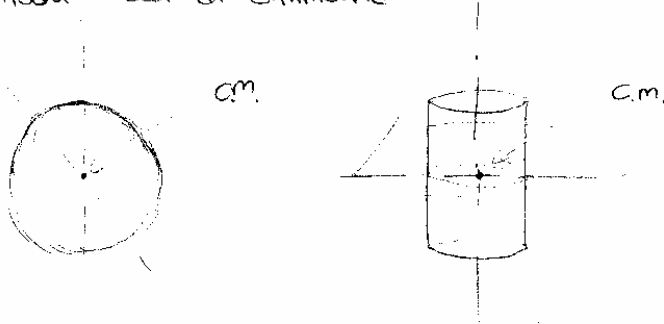
$$\rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV}$$



$$z_{cm} = \int z \rho(x, y, z) \underbrace{dx dy dz}_{dV}$$

oggetto omogeneo $\rightarrow$ oggetto a densità costante, la densità di massa è la stessa in tutti i suoi punti interni
 $\rho(\vec{r}) = \rho$

in un oggetto omogeneo C.M. si trova nell'intersezione di eventuali assi di simmetria



L

$$\vec{R}_{cm}(t) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i(t)}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{d}{dt} \vec{R}_{cm}(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underbrace{\frac{d}{dt} \vec{r}_i(t)}_{\vec{v}_i(t)} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i(t) = \frac{1}{M} \vec{P}_{tot}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{\vec{P}_{tot}}{M}$$

I Equazione CARDINALE DELLA MECCANICA

indica le modalità con cui si muove il Centro di Massa
(2° principio della dinamica per il C.M.)

I punti materiali interagiscono con forze interne e vi sono anche forze esterne

Considero il punto i -esimo

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ji}^{(\text{int})} \quad \leftarrow \text{e' la forza interna subita da } i \text{ e' causata da } j$$

$$\vec{A}_{cm} = \frac{d}{dt} \vec{V}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$$

$$\begin{aligned} \vec{A}_{cm} &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \left[\vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ji}^{(\text{int})} \right] = \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}}}_{\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}}} + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ji}^{(\text{int})} = 0 \quad \text{perché a due a due sono opposte} \end{aligned}$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}} = M \vec{A}_{cm} = \frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{tot}}$$

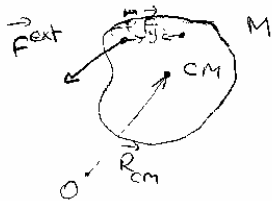
C.M. è un punto che si ^{ha} muove come equaz. del moto lo stesso di un punto che ha come massa la massa totale e si muove solo sotto l'azione delle forze esterne agenti sul sistema

$$\text{se ho un sistema isolato} \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{tot}} = 0 = \vec{F}_{\text{ext}}$$

10/03/06 (3 ore)

esercitazioni Ven 17 Mar. 21 Ven. 24

I Equaz. coordinate



$$\vec{V}_{cm} = \frac{d}{dt} \vec{R}_{cm}$$

$$\vec{R}_{cm}(t)$$

$$\vec{A}_{cm} = \frac{d}{dt} \vec{V}_{cm} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{R}_{cm}$$

$$\vec{P}_{\text{tot}} = M \vec{V}_{cm}$$

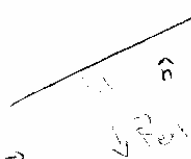
$$\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{tot}} = M \frac{d}{dt} \vec{V}_{cm} = M \frac{d^2}{dt^2} \vec{R}_{cm} \quad \text{cioè stabilisce l'equaz. del moto per il punto cm}$$

CM serve a descrivere il moto traslazionale di un corpo esteso

Per i corpi estesi possono traslare, ma anche ruotare, cosa che non avveniva per i punti materiali.

• se $\vec{F}_{ext} = 0$ ← sistema isolato
 $\Downarrow$
 $\vec{P}_{tot} = \text{cost}$

•  supponiamo che lungo $\hat{n}$ $\vec{F}_{ext} = 0$
 se $\vec{F}_{ext} \cdot \hat{n} = 0$

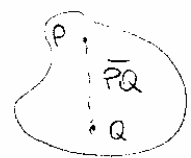
poiché $\hat{n}$ non dipende dal tempo, è una cost. quindi:
 $\hat{n} \cdot \frac{d}{dt} \vec{P}_{tot} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (\hat{n} \cdot \vec{P}_{tot}) = 0$
 proietz. di $\vec{P}_{tot}$ lungo $\hat{n}$

$\Rightarrow \vec{P}_{tot} \cdot \hat{n} = \text{cost.}$

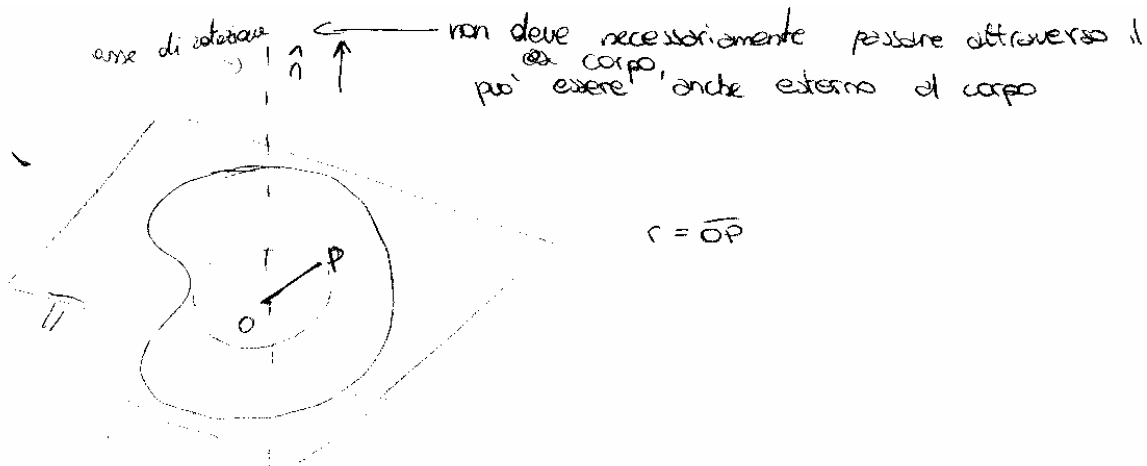
II Equazione coordinate

Supponiamo che a ruotare siano corpi rigidi

ROTAZIONE DI UN CORPO RIGIDO ATTORNO AD UN ASSE FISSO

 se $\forall P, Q$, PQ è cost. nel tempo durante il moto

Corpo rigido: se ovunque presi due punti, la loro distanza è costante nel tempo
 indeformabile

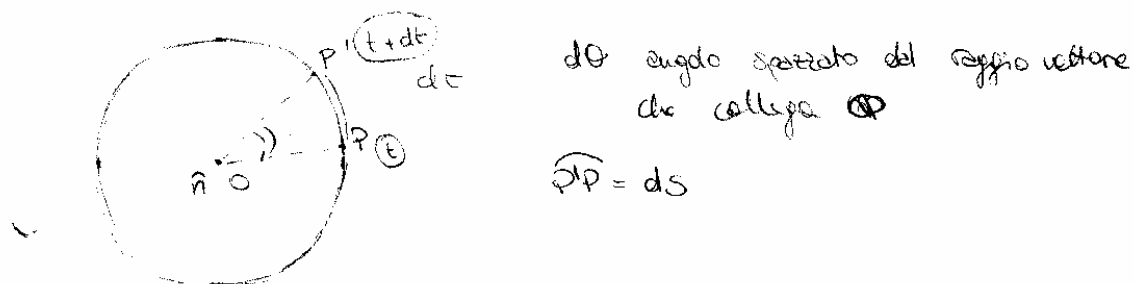


cosa vuol dire atto di rotazione?

prendo un punto P ed un piano π che passi per P ed è $\perp$ all'asse di rotazione. O è l'intersezz. tra π e $\hat{n}$.

P durante la rotaz. descrive una circonferenza che giace su π , con centro O e raggio $\overline{OP}$

Tutti i punti del corpo effettuano un moto circolare come quello di P .



$$ds = r d\theta \quad \text{divido per } dt$$

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = v_p \quad \leftarrow \text{ modulo della velocità del punto } P \text{ lungo la circonferenza}$$

$$v_p = |\vec{v}_p|$$

$$v_p = \omega r$$

dato una rotaz. di un corpo esteso intorno ad un asse fisso la velocità angolare è uguale per tutti i punti del corpo.

Punti che hanno stessa distanza dall'asse hanno la stessa v .

Il luogo geometrico dei punti che hanno stessa distanza dall'asse è un cilindro.

$$v_p(t) = \omega(t)r$$

r non dipende dal tempo perché l'asse di rotaz. è fisso e il corpo è rigido

v_p cambia nel tempo perché ω cambia nel tempo

$$\omega \rightarrow \omega + d\omega$$

$$v_p \rightarrow v_p + dv_p$$

$$v_p = \omega r$$

$$v_p + dv_p = (\omega + d\omega)r$$

facile da diff

$$dv_p = d\omega(t)r$$

divido per dt

$$\frac{dv_p}{dt} = \frac{d\omega(t)}{dt} r$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} \rightarrow \text{acceleraz. tangenziale}$$

↓
fa variare il modulo della velocità

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$$

acceleraz. angolare

$$a_t(t) = \alpha(t)r$$

$$a_c = \omega^2(t)r = \frac{v_p^2}{r}$$

$\vec{\omega}$ $\vec{\alpha}$? si possono definire come vettori? sì

$$\vec{\omega} = \begin{cases} \text{modulo: } \omega = \frac{d\theta}{dt} \\ \text{direzione: } \hat{n} \text{ } \parallel \text{ a quella dell'asse di rotazione} \\ \text{verso: } \hat{n} \text{ } \text{regola della mano destra} \end{cases}$$

rotaz. antioraria $\Rightarrow$ uscente
rotaz. oraria $\Rightarrow$ entrante

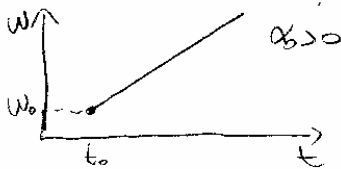
$$\vec{\alpha} = \begin{cases} \text{modulo: } \alpha = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \\ \text{direzione: } \hat{n}, \text{ asse di rotazione} \\ \text{verso: } \begin{cases} \parallel \vec{\omega} & t \rightarrow t+dt & \frac{d\omega}{dt} > 0 \\ \parallel -\vec{\omega} & t \rightarrow t+dt & \frac{d\omega}{dt} < 0 \end{cases} \\ \text{antiparallela a } \vec{\omega} \end{cases}$$

supponiamo
 $|\vec{\alpha}| = \alpha_0 = \text{cost}$

analogo del moto uniformemente accelerato

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha_0 \rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \alpha_0(t - t_0)$$

moto angolare
uniformemente accelerato

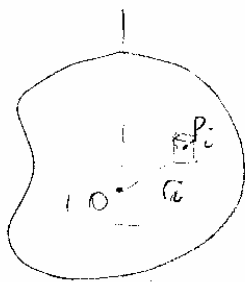


$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(t) \rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha_0(t - t_0)^2$$

Che prima prende l'energia cinetica di un corpo in rotazione intorno ad un asse.

Energia cinetica di rotazione

Considero un corpo rigido come idealmente ripartito in tanti cubetti di massa Δm_i distanze r_i



$$\vec{OP}_i = r_i$$

$$\Delta m_i$$

$$r_i$$

$$v_i(t) = \omega(t) r_i$$

essendo l'energia cinetica una grandezza additiva

$$T = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2 =$$
$$= \frac{1}{2} I \omega^2$$

I

momento d'inerzia
relativo a rotazioni intorno
all'asse $\hat{n}$

non ha le dimensioni fisiche di una massa

~~è capace di~~ a ω

inerzia è variare la loro velocità angolare $\rightarrow$ dipende

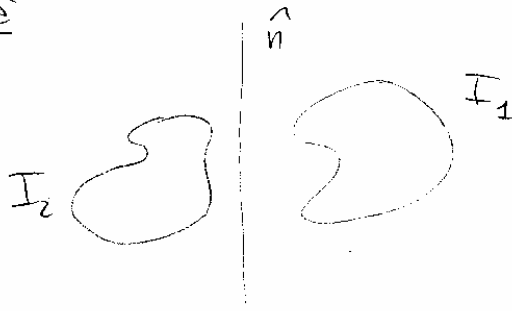
In generale due corpi di masse uguali, ma di forme diverse, possono avere energie cinetiche diverse nel moto di rotazione.

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{ma } I \text{ non dipende dal tempo poiché l'asse è fisso}$$

a partire da corpo, I può cambiare se cambio asse di rotazione

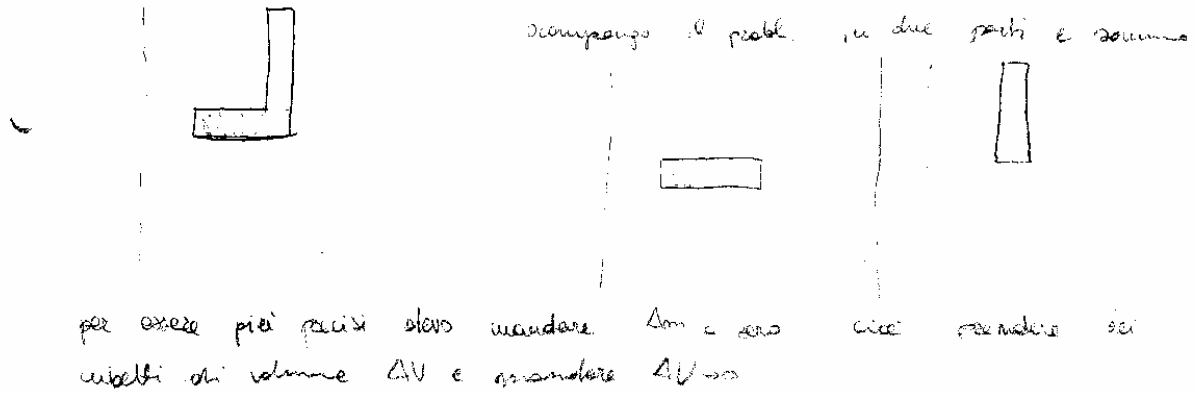
la massa del corpo invece è una proprietà del corpo

Proprietà



$$I_{\text{TOT}} = I_1 + I_2$$

momento di inerzia è una grandezza additiva



$$I = \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 = \int dm \cdot r^2 =$$

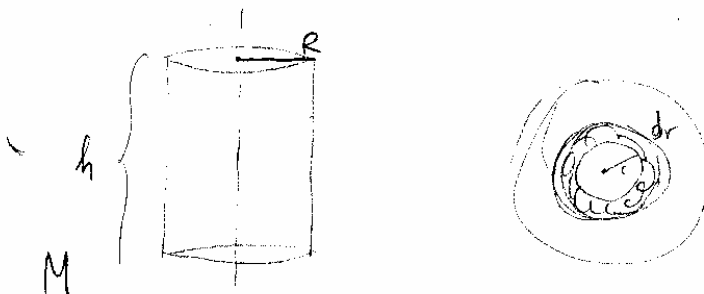
$$dm = \rho dV$$

$$= \int_V \rho r^2 dV = I$$

integrale di volume

Calcolo del momento di

MOMENTO D'INERZIA DI UN CILINDRO OMogeneo PER
ROTAZIONI INTORNO AL PROPRIO ASSE



$$\begin{cases} I = \int r^2 dm \\ dm = \rho dV \end{cases}$$

dato un corpo ~~se~~ piccolo tutti i punti che si trovano alla stessa
distanza dall'asse

prendo un corona circolare di raggio r , spessore dr e altezza h .
Tutti i punti che appartengono a pst insieme hanno la stessa
distanza dell'asse di rotazione.

$$dI = dM r^2$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 h}$$

$$dM = \rho dV$$

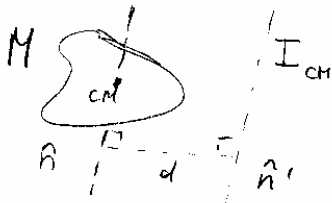
$$dV = h \underbrace{2\pi r dr}_{\text{area di base}}$$

$$dI = \rho h 2\pi r r^2 dr$$

$$I = \int dI = \int dM r^2 = \int_0^R \rho h 2\pi r r^2 dr = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr =$$

$$= \frac{1}{2} M R^2$$

TEOREMA DEGLI ASSI PARALLELI



asse $\perp$ a $\hat{n}$

$$I = I_{CM} + M d^2$$



cilindro visto dall'alto

$$I_{CM} = \frac{1}{2} M R^2$$

asse che passa per CM

$\hat{n}' \perp \hat{n}$ (sono complementari)

d = distanza tra i due assi

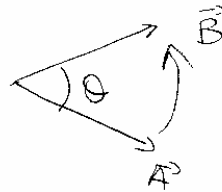
l'asse del cilindro ~~anche~~
per CM

$$I = \frac{1}{2} M R^2 + M R^2 = \frac{3}{2} M R^2 \quad \leftarrow \text{rispetto ad un asse } \parallel \text{ che} \\ \text{giace sulla superficie} \\ \text{laterale}$$

PRODOTTI VETTORIALE

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 stat. unit. europeo



$$\odot \vec{A} \wedge \vec{B}$$

• Modulo:

$$|\vec{C}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$$

• Direzione:

$\perp$ al piano ^{formato} individuato da $\vec{A}$ e $\vec{B}$

• Verso:

regola della mano destra

devo far ruotare $\vec{A}$ per farlo coincidere con $\vec{B}$

Proprietà

1) Anticommutativo: $\vec{A} \wedge \vec{B} = -(\vec{B} \wedge \vec{A})$

2) Associativo rispetto alle somme: $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{C} + \vec{B} \wedge \vec{C}$$

3) Il prodotto vettoriale di due vettori $\parallel$ è nullo

4) La derivata di $d(\vec{A} \wedge \vec{B}) = d(\vec{A}) \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge d(\vec{B})$

MOMENTO DELLA FORZA RISPETTO AD UN POLO O

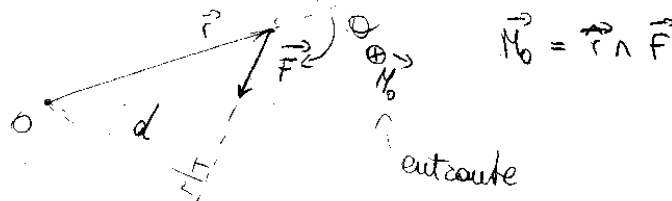


↓
punto fisso

si definisce:

$$\vec{H}_O = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

dato un punto fisso detto polo e il punto di applicazione di una forza

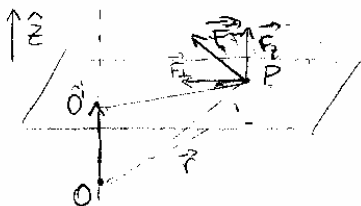


traslo $\vec{r}$ fino a far coincidere lo sc O con il punto di applicazione della forza.

considero la retta su cui giace $\vec{F}$: retta d'azione (direzione di $\vec{F}$)
~~Per~~ considero la distanza di O dalla retta d'azione: braccio

$$|\vec{N}_O| = |\vec{F}| d$$

MOMENTO ASSIALE →



$\vec{F}$ e $\vec{z}$ non sono necessariamente complanari

M_z : momento assiale

↓
componente del momento rispetto ad un asse (passante per il polo O)

considero un piano passante per P e $\perp \vec{z}$

O' = intersezione del piano con $\vec{z}$

scompongo $\vec{F}$ in due componenti: una $\perp$ al piano e una che giace sul piano

$$\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_\perp$$

$$\vec{OP} = \vec{r} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$$

$$\vec{H}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = (\vec{OO'} + \vec{O'P}) \wedge (\vec{F}_z + \vec{F}_\perp) =$$

$$= \underbrace{\vec{OO'} \wedge \vec{F}_z}_{=0} + \underbrace{\vec{OO'} \wedge \vec{F}_\perp}_{\perp \hat{z}} + \underbrace{\vec{O'P} \wedge \vec{F}_z}_{\perp z} + \underbrace{\vec{O'P} \wedge \vec{F}_\perp}_{\parallel \hat{z}}$$

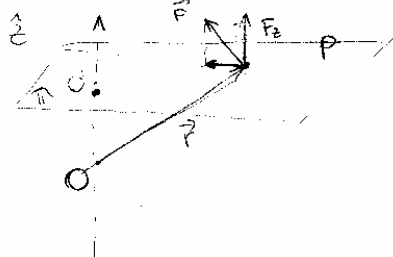
non danno componenti
di z

$\parallel \hat{z}$

11/03/06 (3 ore)

20/03 NON C'E' RICEVIMENTO

MOMENTO ASSIALE



$$\vec{H}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = (H_x, H_y, H_z)$$

costituisce un piano $\pi \perp \hat{z}$ e passante per P

di interesse M_z

F_z componente di $\vec{F} \perp \pi$

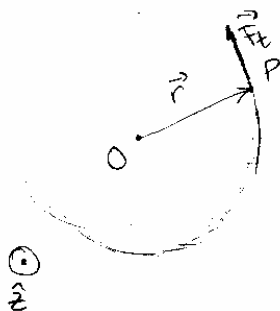
$F_\perp$ che giace su π

$$\begin{cases} \vec{F} = F_z \hat{z} + \vec{F}_\perp \\ \vec{r} = \vec{OO'} + \vec{O'P} \end{cases}$$

$$M_z \hat{z} = \vec{O'P} \wedge \vec{F}_\perp$$

essendo $\vec{O'P}$ e $\vec{F}_\perp$ giacenti su π , $M_z \hat{z}$ è
un vettore $\perp$ a π , quindi ha componenti
solo su $\hat{z}$

RELAZIONE TRA MOMENTO ASSIALE E ACCELERAZIONE ANGOLARE



supponiamo che ~~esista~~ su P agisca una
forza generica e considero la sua
componente che giace sul piano e
tangente alla traiettoria ~~di P~~ in P

$\vec{F}_t \rightarrow$ componente tangenziale di $\vec{F}$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad \text{sono interessati alla componente } M_z$$

$$M_z = |\vec{r}| F_t = r F_t \leftarrow \text{poiché } \vec{r} \perp \vec{F}_t$$

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

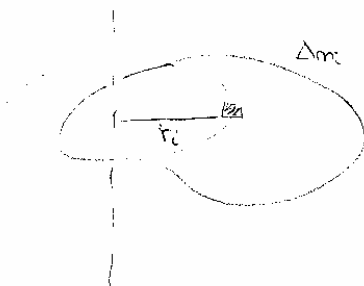
$$F_t = m a_t \quad a_t = r \alpha$$

$$M_z = r m a_t = m r^2 \alpha = I_z \alpha$$

↑
momento d'inerzia di P
calcolato rispetto
all'asse z

$$M_z = I_z \alpha$$

valido non solo per un punto materiale, ma
anche per un corpo esteso rigido



$$\Delta M_{zi} = \Delta I_{zi} \alpha$$

$$M_z = \sum_{i=1}^N \Delta M_{zi} = \alpha \left(\sum_{i=1}^N \Delta I_{zi} \right) = I_z \alpha$$

↑
momento d'inerzia
compensivo

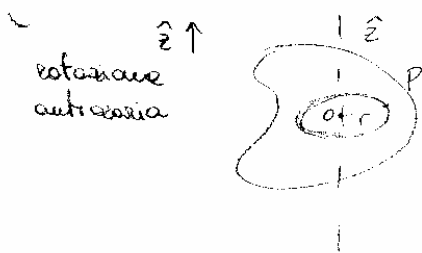
essendo I una grandezza
additiva e α uguale
per tutti i punti del corpo

$$M_z = I_z \alpha$$

↑
vero per la componente assiale

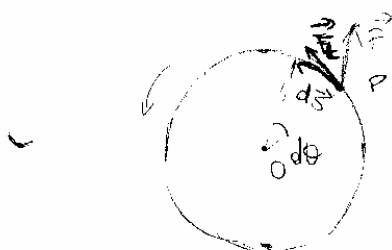
simile a $\vec{F} = m \vec{a}$ per un moto rotazionale

Dato un corpo, supponiamo di metterlo in rotazione con una velocità angolare $\vec{\omega}$



$\vec{\omega} = \omega \hat{z} \rightarrow$ quindi $\hat{z}$ è ~~un~~ un asse // alla velocità angolare

consideriamo il piano su cui giace la circonferenza ($\perp \hat{z}$)



considero la componente tangenziale della forza F agente su P

$t \rightarrow t + dt$

$$ds = r d\theta$$

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_t ds = F_t r d\theta$$

prendo la componente della forza $\parallel$ a $d\vec{s}$

$$dL = \frac{F_t r}{M_z} d\theta = M_z d\theta$$

$$dL^{TOT} = M_z^{TOT} d\theta$$

$$\sum_{i=1}^n M_{zi}$$

POTENZA

$$P = \frac{dL^{TOT}}{dt} = M_z^{TOT} \frac{d\theta}{dt} = M_z^{TOT} \omega$$

$$P = M_z \omega$$

nel moto traslatorio analogo
 $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ per un punto materiale, ma

$$\vec{M} = (M_x, M_y, M_z) = M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k}$$

$$P = M_z \omega = \vec{M}_O \cdot \vec{\omega} \rightarrow P = \vec{M}_O \cdot \vec{\omega}$$

O' può essere generico, ma

$$O' \in \hat{z}$$

continua ad essere vero il teorema delle forze vive

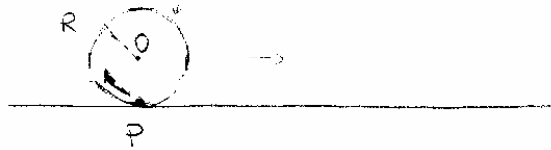
$$L_{i \rightarrow f} = T_f - T_i$$

in psl caso

$$\int_i^f M_z d\theta = \frac{1}{2} I_z \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_i^2$$

MOTO DI ROTOLAMENTO PURO

supponiamo che sia un cilindro



P: punto di contatto

istante per istante
→ se il punto di contatto $\checkmark$ ha velocità
nulla rispetto al piano ~~di~~ orizzontale
scabro

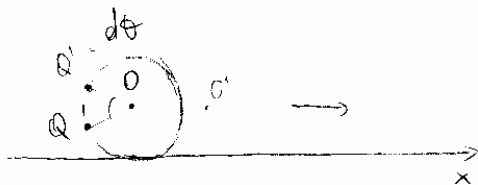
SCABRO

$$t \rightarrow t + dt \quad v_p = 0$$

(se $v_p \neq 0 \Rightarrow$ il cilindro slitta, ~~scivola~~ striscia (slittando le mani per l'istinto))

(su una superficie scabra)
In un moto di puro rotolamento non c'è dissipazione,
perché è presente l'attrito STATICO, che NON compie
lavoro

rotolamento puro
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{moto rotatorio} \rightarrow \text{cilindro attorno all'asse} \\ \text{moto traslatorio} \rightarrow \text{dell'asse rispetto al piano} \end{array} \right.$



$$t \rightarrow t + dt$$

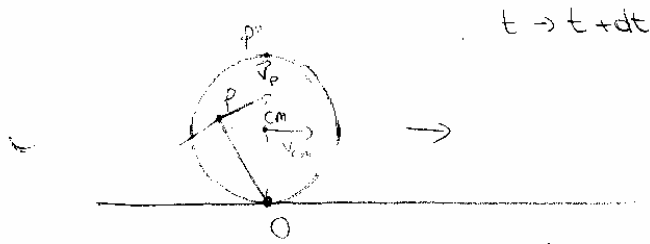
$$R d\theta$$

$$OO' = dx_{cm}$$

← MOTO DI PURO ROTOLAMENTO

$$\textcircled{1} R d\theta = dx_{cm}$$

(es. se fa un giro completo $\textcircled{1}$ si è spostato
della lunghezza della circonferenza)



considero un asse che passa ^(per i punti di contatto) per O e // all'asse del cilindro

① **ASSE ISTANTANEO DI ROTAZIONE**

Il moto di puro rotolamento in un tempo dt ^{arco tangente infinitesimo} può essere visto come un moto di rotazione puro attorno all'asse istantaneo di rotazione

considero un punto arbitrario P

$\vec{v}_P$ è tangente alla traiettoria di P, quindi $\perp OP$

^{velocità angolare rispetto all'asse istantaneo}
 $|\vec{v}_P| = \omega \cdot OP$

supponiamo che P sia il C.M.

$$v_{cm} = \omega R$$

se P coincide con O

$$v_O = \omega \cdot 0 = 0$$

P''

$$v_{P''} = v'' = \omega \cdot 2R \quad \leftarrow \text{vel. del punto opposto al punto di contatto}$$

② trovare ω

$$v_{cm} = \omega R$$

rispetto la ①

$$v_{cm} = \frac{dx_{cm}}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$\leftarrow$ velocità angolare di rotazione rispetto all'asse istantaneo

È uguale alla velocità angolare di rotazione del corpo intorno all'asse di simmetria

cio' avviene spontaneamente su una superficie scabra,
puo' avvenire anche su una superficie liscia se riesce a
raggiungere le qst condizioni

ALE KASHER

$$T = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

ω velocità angolare rispetto all'asse di rotazione
(dove $\omega = a$ gli di simmetria)
 I_0 : momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione

$$I_0 = I_{cm} + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2 \quad I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$$

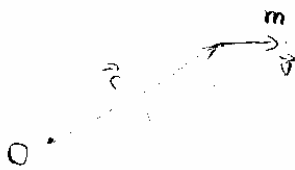
$$T = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M \underbrace{\omega^2 R^2}_{V_{cm}^2}$$

$$T = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{cm}^2$$

↑ T che avrebbe il cilindro se traslasse soltanto senza ruotare
Energia cinetica di traslazione

↑ ene. cin. della cilindro se ruotasse attorno all'asse di simmetria, mantenuto fermo
En. cinetica di rotazione

MOMENTO DELLA QUANTITA' DI MOTO o ANGOLARE



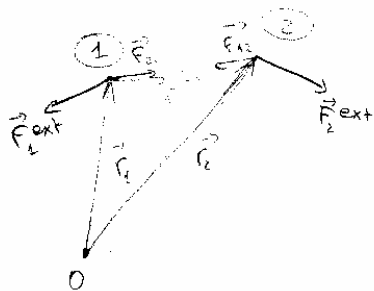
si definisce momento della quantità di moto

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_0 = \frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \vec{p}) = \underbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} \right)}_{\substack{\text{perché} \\ \vec{v} \parallel \vec{p} \\ = 0}} + \vec{r} \wedge \underbrace{\left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)}_{\parallel \vec{F}} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_0$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_0 = \vec{M}_0$$



1 e 2 costituiscono un sistema non isolato

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

il momento delle
quantità di moto tot.
è la somma delle
momenti

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_1 = \vec{r}_1 \wedge (\vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_{12})$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_2 = \vec{r}_2 \wedge (\vec{F}_2^{\text{ext}} + \vec{F}_{21})$$

derivata della somma = somma delle derivate

$$\vec{A} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \vec{F}_{21} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} \vec{L}_1 + \frac{d}{dt} \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2^{\text{ext}} + \vec{A} =$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2^{\text{ext}} = \vec{M}^{\text{ext}}}$$

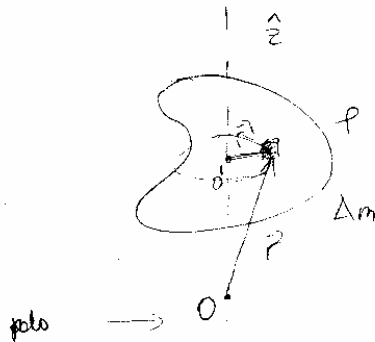
la derivata del momento della quantità di moto
dipende solo dai momenti delle forze esterne

⇒ in un sistema isolato il momento della quantità di moto
si conserva

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{ext}}$$

II equaz. cardinale della meccanica

MOMENTO ANGOLARE : componente del momento delle
quantità di moto, $\parallel \hat{z}$: L_z



$$\vec{r} = \vec{OO'} + \underbrace{\vec{O'P}}_{\vec{r'}}$$

polo $\rightarrow O$
 $O \in \hat{z}$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{L} &= \vec{r} \wedge \Delta m \vec{v} = (\vec{OO'} + \vec{r'}) \wedge \Delta m \vec{v} = \\ &= \underbrace{\vec{OO'} \wedge \Delta m \vec{v}}_{\perp \hat{z}} + \underbrace{\vec{r'} \wedge \Delta m \vec{v}}_{\parallel \hat{z}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta L_z \hat{z} = \vec{r'} \wedge \Delta m \vec{v}}$$

$\vec{r'} \perp \vec{v}$ istante per istante
perché $\vec{v}$ è tangente
 $v = \omega r'$

$$\begin{aligned} \Delta L_z &= r' \Delta m v \cdot 1 = \\ &= \Delta m r'^2 \omega = \\ &= \Delta I_z \omega \end{aligned}$$

momento angolare = momento d'inerzia
rispetto all'asse z
e al vel. angolare

$$L_z = \sum \Delta L_z = I_z \omega$$

complessivo
momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione

15/03/06 (2 ore + 1 ora)

MOMENTO ANGOLARE DI UN CORPO RIGIDO



$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$$

$$L_z = I_z \omega_z$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I \alpha$$

$$\vec{M}^{ext} = \frac{d}{dt} \vec{L} \quad \text{II eq. coordinate}$$

$$M_z^{ext} = \frac{d}{dt} L_z = I \alpha$$

$$L_z = I \omega_z$$

$$\vec{L} = I \vec{\omega} \quad \text{è vera anche per le componenti } x \text{ e } y?$$

In generale è falsa.

$\vec{L}$ non è necessariamente $\parallel \vec{\omega}$

es. qnd le ruote delle macchine "non sono equilibrate"

cio si fa mette dei piombini nel cerchio della ruota "sbilanciata" per ridistribuire le masse e rendere $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

Fig 11.12 p 353 ← SBAGLIATA

$$\vec{L} \neq I \vec{\omega}$$

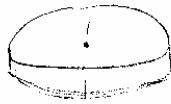
ma in certi particolari è vera

Condizioni sufficienti: (all'incirca sia vera $\vec{L} = I\vec{\omega}$)

1) asse $\hat{e}$ contiene cm

2) asse $\hat{e}$ è asse di simmetria (io 2 implica la 1^a)

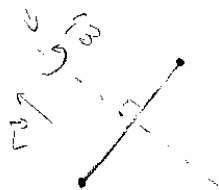
↓ distribuzione di
relativo alle/massa, non alla forma



asse di simmetria sia per il corpo che per la
distribuzione di massa perché il disco è omogeneo

se metto in rotazione il disco rispetto all'asse trattenuto,
vale $\vec{L} = I\vec{\omega}$

monobrio

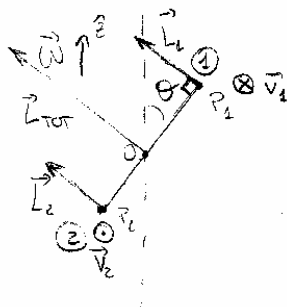


m, l

stretta rigida e priva di massa

se faccio ruotare attorno a quest'asse,

trovo che $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$



$m, l, \theta = \text{cost} \neq \frac{\pi}{2}, 0$

mettiamo in rotazione rispetto a quest'asse

supponiamo che a un certo istante t , il piano
individuato sia p.e. del foglio
in p.e. istante $\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \otimes \vec{v}_1$

vediamo come sono diretti i ~~momenti~~ $\vec{L}$ rispetto
al polo O

$$\vec{L}_1 = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{v}_1$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_1 &\perp \overrightarrow{OP_1} \\ \vec{L}_1 &\perp \vec{v}_1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ giace sul piano del foglio

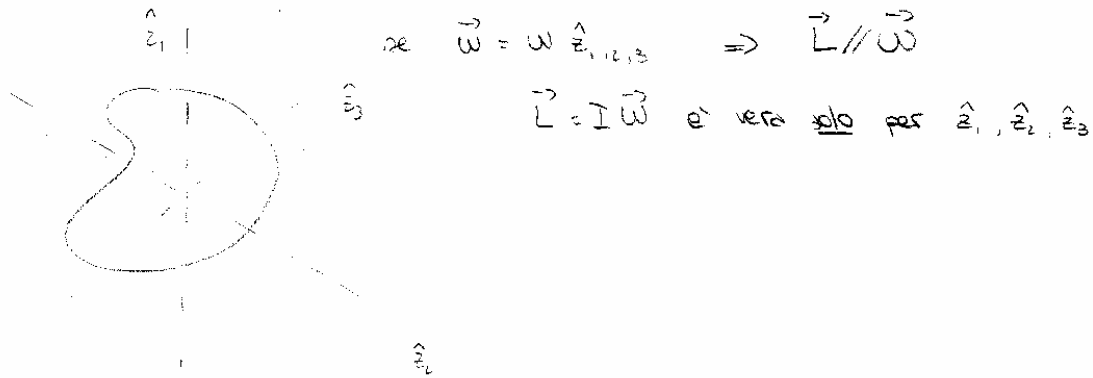
$$\vec{L}_2 = \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{v}_2$$

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

dato un oggetto non si può dire a priori se $\vec{L} = I\vec{\omega}$ vale o
meno, perché dipende dall'asse di simmetria.

se pongo un corpo in rotazione attorno ad un suo asse di simmetria $\Rightarrow \vec{L} \parallel \vec{\omega}$

Prendo un corpo rigido arbitrario. Si può provare che esistono tre assi ortogonali tra di loro, per i quali, se scelti come assi di rotazione, $\vec{L} = I\vec{\omega}$ è vero.



$\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3 \rightarrow$ ASSI PRINCIPALI DEL CORPO

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

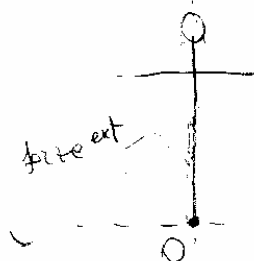
$$\vec{M}_0^{\text{ext}} = \frac{d}{dt} \vec{L}_0 \leftarrow \text{vero per un qualunque sistema fisico}$$

supponiamo che $\vec{M}_0^{\text{ext}} = 0 \rightarrow$ o non ci sono forze ext.
o se ci sono, non applicano un momento rispetto al polo scelto

$$\vec{M}^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} \leftarrow \text{nulla se } \vec{F}_i = 0 \text{ oppure se } \vec{r}_i \parallel \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

$$\text{se } \vec{M}_0^{\text{ext}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{L}_0 = 0 \Rightarrow \vec{L}_0 = \text{cost}$$

esempio $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ *rotazione attorno ad un asse fisso*



$$\left. \begin{aligned} \vec{M}_0^N &= \vec{r} \wedge \vec{N} = 0 \\ \vec{M}_0^{mg} &= \vec{r} \wedge \vec{M}_0^g = 0 \\ \vec{M}_0^{F_{\text{ext}}} &= \vec{r} \wedge \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{M}_0^{\text{ext}} = 0$$

CM si può pensare come il punto di applicaz. delle forze per il calcolo del momento

polo scelto di calcolo

$$L_z = \text{cost} = I_{\text{PERIA}} \omega_A$$

$$L_z = I_{\text{CM/CA}} \omega_C$$

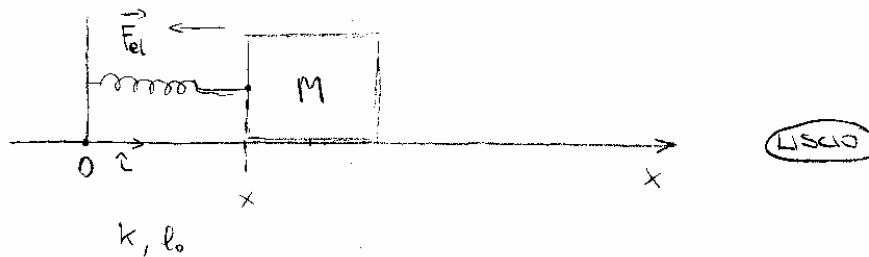
per la 2^a equaz. cardinale

$$I_{APERTA} > I_{CHIUSA} \Rightarrow \omega_A < \omega_C$$

$$\omega_C = \omega_A \frac{I_A}{I_C} > 1$$

la pallina non è un corpo rigido, infatti la distanza dei punti cambia durante la rotaz.

MOTO ARMONICO



per il 2° principio della dinamica

$$\vec{F}_{el} = -k(x - l_0)\vec{e}$$

$$\vec{F}_{el} + M\vec{g} + \vec{N} = M\vec{a}$$

si proietta lungo l'asse $\vec{x}$

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \vec{e}$$

$$-k(x - l_0) = M \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

equaz. del moto $\rightarrow$ equaz. che ha come soluz. la legge oraria

moto armonico: soluz. di 2^a equaz.
(o moto matematico)

In particolare nel moto armonico si considera $l_0 = 0$
oppure si definisce

$$X(t) = x(t) - l_0 \quad \leftarrow \text{allungamento}$$

quindi

$$-kX(t) = M \frac{d^2}{dt^2} X(t)$$

l'acceleraz. cioè risulta ogni istante prop. alla spostamento cambiato di segno

Eqvez. diff. $\rightarrow$ legame tra la funzione e le sue derivate (t)
La soluz. di un'eqvez. diff. $\rightarrow$ è una funzione (che soddisfa l'eqvez. diff. per t)

Le eqvez. diff. per essere risolte, hanno bisogno delle condiz. iniziali.

Esempio: se ho un'eqvez. del 2° ordine, devo avere ~~due~~ 2 condiz. iniziali:

CONDIZIONI INIZIALI

$$\begin{cases} X(t_0) = X_0 \\ \left. \frac{d}{dt} X(t) \right|_{t=t_0} = V_0 \end{cases}$$

determinismo: se so X e V in un dato istante, posso descrivere il moto dell'oscillatore anche negli istanti successivi.

soluz. di più eqvez. diff.

$$X(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Ampiezza
dipende dalle
condiz. iniziali

fase

pulsazione

determina ω è la fisica del problema
 $\rightarrow$ NON dipende dalle condiz. iniziali

come si determina ω ? si sostituisce $X(t)$ e la sostituisce nell'eqvez. diff.

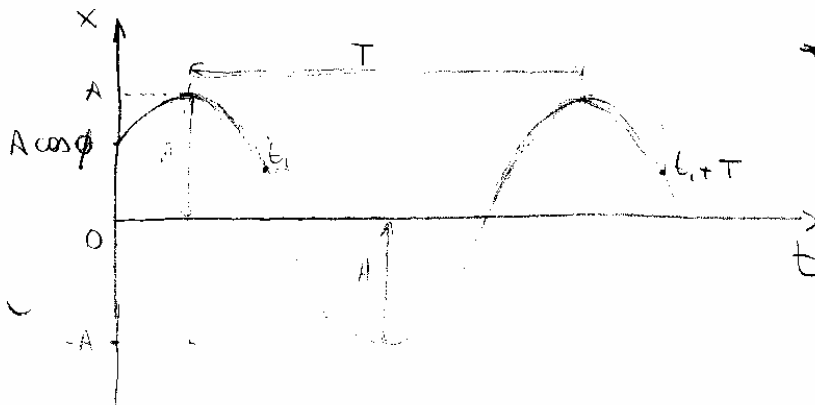
$$\frac{d^2}{dt^2} X(t) = -\omega^2 X(t)$$

$$-k X(t) = M [-\omega^2 X(t)]$$

$$\omega^2 = \frac{k}{M} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

dipende dalle costanti fisiche del problema.

NON dalle condiz. iniziali



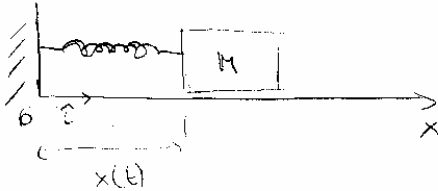
$T \rightarrow$ tempo che deve trascorrere per tornare nello stesso valore di x in un altro periodo dell'oscillazione (alla partenza)

$$\omega t_1 + \phi = \omega(t_1 + T) + \phi \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega} = T$$

(1 ora)

MOTO ARMONICO

$$X(t) = x(t) - l_0$$



$$M \frac{d^2}{dt^2} X(t) = -k X(t)$$

$$X(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Supponiamo che

$$X(0) = X_0 = 0$$

$$\left. \frac{d}{dt} X(t) \right|_{t=0} = V_0 \neq 0$$

$$M \frac{d^2}{dt^2} X(t) = -k X(t)$$

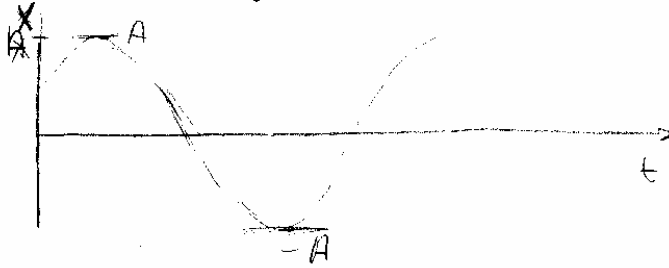
$$X(0) = A \cos \phi = 0 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \quad \text{non ha senso } A=0$$

$$\left. \frac{d}{dt} X(t) \right|_{t=0} = -A\omega \sin(\omega t + \phi) = -A\omega = V_0 \rightarrow \boxed{A = -\frac{V_0}{\omega}}$$

$$X(t) = -\frac{V_0}{\omega} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$X(t) = \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t$$

quanto vale l'energia di un oscillatore armonico



$$E = \frac{1}{2} M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} k x^2, \quad X = (x - l_0)$$

la forza è conservativa $\Rightarrow E$ si conserva

$$X(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d}{dt} X(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$E = \frac{1}{2} M A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi) =$$

$$\downarrow$$

$$\frac{k}{m}$$

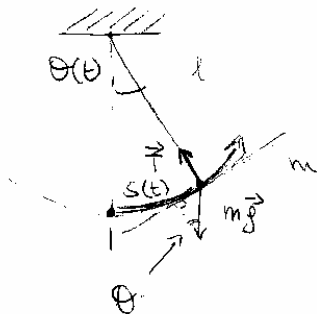
$$= \frac{1}{2} k A^2 [\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)] = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \text{cost.}$$

$\downarrow$ energia potenziale elastica nel punto di max elongazione

$\downarrow$ in istanti $v=0 \Rightarrow$ en. cinetica $= 0$

MOTO DI UN PENDOLO SEMPLICE CON PICCOLE OSCILLAZIONI
pendolo semplice



applichiamo il metodo delle forze

$\vec{T}$ non compie lavoro perché lo spostamento è sempre $\perp$ a $\vec{T}$

$\Rightarrow$ posso applicare la conservazione dell'energia meccanica

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$F_t = m a_t$$

→ componente di T lungo $\hat{t}$ è zero

→ ciò che mi dà a_t è la forza peso

$$F_t = -mg \sin \theta$$

↑
imp.

$$s(t) = l \theta$$

moto circolare vario

$$a_t \neq 0 \quad v \neq \text{cost.}$$

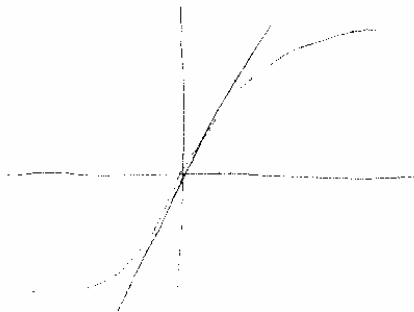
$$m l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

$$\boxed{l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \sin \theta} \quad \left(\text{la soluz. è una serie infinita di sin e cos.} \right)$$

non dipende dalla massa

caso particolare: per piccole oscillazioni ($5^\circ - 10^\circ$)

$$\sin \theta \approx \theta \quad \theta \ll 1$$



$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

per piccole oscillazioni → il pendolo si muove di moto armonico

$$l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \sin \theta \approx -g \theta$$

↑
 $\theta \ll 1 \text{ rad.} \approx 5^\circ - 10^\circ$

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}} \quad \begin{array}{l} \text{legge dell'isocronismo} \\ \text{delle piccole oscillazioni} \end{array}$$