

SERIE DI FUNZIONI

Esercizio 1. Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(n+2)!}.$$

Si tratta di una serie di potenze, che possiamo riscrivere come

$$x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{(n+2)!}.$$

Se indichiamo con S la somma della serie, possiamo osservare subito che $S(0) = 0$. Se, invece, $x \neq 0$, sull'insieme di convergenza possiamo scrivere anche

$$S(x) = \frac{1}{x^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^{(n+2)}}{(n+2)!} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(x^2)^m}{m!}.$$

Per ogni naturale m , indicato con a_m il coefficiente $\frac{1}{m!}$, ed essendo

$$\lim_n \left| \frac{a_m}{a_{m+1}} \right| = \lim_n (m+1) = +\infty,$$

si conclude che il raggio di convergenza della serie vale $+\infty$. Quindi la serie data converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$, e converge uniformemente sugli intervalli limitati. Inoltre essendo

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!},$$

WWW.INGONLINE.BIZ

si conclude che la somma della serie è nulla in zero e per $x \neq 0$ vale

$$\frac{1}{x^3} (e^{x^2} - 1 - x^2).$$

Esercizio 2. Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita da

$$f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Soluzione. Fissato $x \in \mathbb{R}^+$, si ha che

$$\lim_n n(\sqrt[n]{x} - 1) = \lim_n n(e^{\frac{\log x}{n}} - 1) = \log x.$$

Dunque c'è convergenza puntuale su $\mathbb{R}^+$ alla funzione f definita da

$$f(x) = \log x.$$

Si osserva, poi, che non può esserci convergenza uniforme su insiemi illimitati di $\mathbb{R}^+$ e neppure su insiemi che hanno lo zero come punto di accumulazione, in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f_n(x) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - f(x)) = +\infty.$$

Se si considerano, invece, insiemi limitati $A = [a, b] \subset (0, +\infty)$, allora si ha convergenza uniforme. Infatti, posto $g_n = f_n - f$, la derivata di g_n vale

$$\frac{\sqrt[n]{x} - 1}{x},$$

e quindi g_n decresce su $(0, 1)$, assume minimo uguale a zero in $x = 1$, e cresce dopo 1. Quindi

$$\sup_{x \in A} |f_n - f| = \sup_{x \in A} g_n = \max(g_n(a), g_n(b)).$$

Per la convergenza puntuale su $\mathbb{R}^+$ vale

$$\lim_n g_n(a) = \lim_n g_n(b) = 0,$$

da cui si deduce la convergenza uniforme su A .

Esercizio 3. Si determini l'insieme X di convergenza puntuale della serie di funzioni definita da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin e^{-nx^2},$$

e si provi che su X non può esserci convergenza uniforme. Trovare poi intervalli di convergenza uniforme.

Soluzione. Se $x = 0$, il termine generale della serie numerica ottenuta non è infinitesimo (vale $\sin 1$), quindi non si ha convergenza. Se, invece, $x \in X = \mathbb{R} - \{0\}$, allora la disuguaglianza

$$0 < \sin e^{-nx^2} \leq e^{-nx^2}$$

implica la convergenza della serie in quanto la serie geometrica di ragione e^{-x^2} converge ($e^{-x^2} < 1$).

Per quanto riguarda la convergenza uniforme, questa non può sussistere su X perché

$$\sup_X |\sin e^{-nx^2}| = 1.$$

Si ha invece convergenza uniforme sugli insiemi A della forma $(-\infty, a] \cup [a, +\infty)$; infatti, per la crescenza della funzione $\sin$ su $[0, \pi/2]$, ed essendo

$$0 < e^{-nx^2} \leq 1 < \frac{\pi}{2},$$

si ha che

$$\sup_{x \in A} |\sin e^{-nx^2}| = \sin^{-na^2}.$$

Quindi la serie converge totalmente su A (è una serie geometrica di ragione e^{-a^2}) e quindi uniformemente.

Esercizio 4. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{n}.$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Si determini l'insieme di convergenza puntuale e uniforme.

Soluzione. Se $x = 0$ la serie diventa la serie armonica di termine generale $1/n$, che è divergente. Se x è maggiore di zero il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie diverge. Se invece x è negativo, allora la disuguaglianza

$$\frac{e^{nx}}{n} \leq e^{nx},$$

implica convergenza (il termine generale e^{nx} definisce una serie geometrica di ragione e^x , che è una ragione minore di 1 perché x è negativo).

Per quanto riguarda la convergenza uniforme, consideriamo insiemi A della forma $(-\infty, a]$ contenuti in $(-\infty, 0)$. Si osserva che

$$\sup_{x \in A} e^{nx} = e^{na},$$

e quindi, dalla convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{na}$$

si conclude che la serie data converge totalmente e quindi uniformemente.

Esercizio 5. Dopo aver determinato l'insieme X di convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + nx^2)}{n^2},$$

provare che in X non può esserci convergenza uniforme e trovare intervalli di convergenza uniforme.

Soluzione. È noto che, per ogni numero reale positivo α ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log t}{t^\alpha} = 0.$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Scelto quindi $\alpha = 1/2$, possiamo affermare che esiste $\bar{t}$ tale che, per $t > \bar{t}$

$$\log t \leq \sqrt{t}.$$

Allora possiamo maggiorare il termine generale della serie data come segue

$$\frac{\log(1 + nx^2)}{n^2} \leq \frac{\sqrt{1 + nx^2}}{n^2},$$

e quindi concludere che si ha convergenza puntuale su $\mathbb{R}$ perché la serie di termine generale

$$\frac{\sqrt{1 + nx^2}}{n^2}$$

converge avendo ordine di infinitesimo $3/2$.

Su $\mathbb{R}$ non ci può essere convergenza uniforme perché

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \log(1 + nx^2) = +\infty.$$

Consideriamo, invece, intervalli $[a, b]$ di $\mathbb{R}$. Poichè la funzione

$$\log(1 + nx^2)$$

è positiva, pari, assume minimo in $x = 0$ e cresce sulla semiretta positiva delle x , si ha che

$$\sup_{x \in [a, b]} \frac{\log(1 + nx^2)}{n^2} = \max\left(\frac{\log(1 + na^2)}{n^2}, \frac{\log(1 + nb^2)}{n^2}\right),$$

e quindi per quanto affermato prima la serie converge totalmente e quindi uniformemente su $[a, b]$.

WWW.INGONLINE.BIZ

Soluzioni esercizi

Martedì 01/06/2004

Di seguito sono riportate le tracce delle soluzioni di tre esercizi non comprese nel file '**Soluzioni esercizi**' del 06/04/2004.

- 2) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni: $f_k(x) = \frac{1}{k} \sin kx$, $x \in \mathbb{R}$.

$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = 0$, essendo $-1 \leq \sin kx \leq 1$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} = 0$. Inoltre:

$\sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{k} \sin kx \right| = \frac{1}{k} \rightarrow 0$ se $k \rightarrow +\infty$, dunque si ha convergenza uniforme e puntuale verso $f(x) = 0$.

- 3) Provare che la successione $f_n(x) = (\sin x)^n + (x+3)^{-n}$ converge puntualmente nell'intervallo $[0, \pi/2]$ ma non uniformemente nello stesso intervallo.

Si può verificare facilmente che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$, con

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 1 & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad \text{WWW.INGONLINE.BIZ}$$

infatti si ricordi che $-1 < \sin x < 1$ quindi $(\sin x)^n$ tende a zero ovunque nell'intervallo di definizione tranne per $x = \frac{\pi}{2}$.

Calcolando l'estremo superiore, che in tal caso è un massimo essendo la funzione continua su un compatto, si ottiene:

$$\max_{[0, \frac{\pi}{2})} |(\sin x)^n + (x+3)^{-n}| = 1 + \frac{1}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0,$$

dunque la successione converge puntualmente ma non uniformemente nell'intervallo assegnato.

- 4) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni: $f_n(x) = \frac{x^n}{n}(1 - x^n)$, $x \in [0, 1]$.

Si può verificare facilmente che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$; inoltre il

$\max_{[0,1]} \left| \frac{x^n}{n}(1 - x^n) \right|$ si ottiene, calcolando la derivata prima, per $x^n = \frac{1}{2}$, dunque sostituendo il valore di x :

$$\max_{[0,1]} \left| \frac{x^n}{n}(1 - x^n) \right| = 0,$$

perciò la successione converge puntualmente ed uniformemente nell'intervallo assegnato.

WWW.INGOM.NE.IT

Esercizi riassuntivi sulla convergenza puntuale e uniforme delle successioni di funzioni

Verificare che le successioni di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (x - n)^2}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} \operatorname{Sh} \left[\left(1 - \frac{x}{n^2}\right) \left(\frac{x}{n^3} - \frac{1}{n^{5/2}}\right) \right] & x \in [\sqrt{n}, n^2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

convergono puntualmente su $\mathbb{R}$ e stabilire se la convergenza è uniforme.

Per le successioni di funzioni

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \log(x + x^n) & x > 0 \\ f_n(x) &= \log(1 + x^2 + x/n) \\ f_n(x) &= (2 + e^{nx})^{1/n} \end{aligned}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

determinare l'insieme E di convergenza puntuale, la funzione limite f e stabilire se la convergenza è uniforme su E .

Determinare l'insieme E di convergenza puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{1 + x^n} \quad x \neq -1$$

e stabilire su quali intervalli $I \subseteq E$ la convergenza è uniforme.

Verificare che la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$$

converge uniformemente su $\mathbb{R}$ alla funzione nulla. Studiare il comportamento della successione $\{f'_n\}$.

ESERCIZI SULLE SUCCESSIONI DI FUNZIONI

- 1) Determinare il limite puntuale delle seguenti successioni di funzioni e stabilire se la convergenza è uniforme:

$$a) f_n(x) = nx e^{-nx}, \quad x \in [0, 1],$$

$$b) f_n(x) = n^{-2} \sqrt{1 - x^{2n}}, \quad x \in [-1, 1],$$

$$c) f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx & \text{se } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$d) f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$e) f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$f) f_n(x) = (1 - x)x^n, \quad x \in [0, 1],$$

$$g) f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1],$$

$$h) f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

- 2) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della seguente successione di funzioni al variare di $p \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = n^p x e^{-nx}, \quad x \in [0, 1].$$

SOLUZIONI

1)

a) converge ma non uniformemente a $f(x) = 0$,

b) converge uniformemente a $f(x) = 0$,

c) converge ma non uniformemente a $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq 1, \end{cases}$

d) converge ma non uniformemente a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

e) converge ma non uniformemente a $f(x) = 0$,

f) converge uniformemente a $f(x) = 0$,

g) converge ma non uniformemente a $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1, \end{cases}$

h) converge ma non uniformemente a $f(x) = 0$.

2) Converge uniformemente a $f(x) = 0$ solo per $p < 1$.

WWW.INGONLINE.BIZ

ESERCIZI SULLE SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

1. Si considerino le funzioni

$$(1) \quad f_n(x) = \operatorname{arctg}(n^2 x) \quad n \in \mathbf{N}$$

$$(2) \quad f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx^2) \quad n \in \mathbf{N}$$

$$(3) \quad f_n(x) = \operatorname{arctg}(x^n) \quad n \in \mathbf{N}$$

- a) Determinare l'insieme S di convergenza puntuale della successione di funzioni $\{f_n\}$ e la funzione limite f (casi (1)-(2)-(3)).
 b) Stabilire se la successione di funzioni $\{f_n\}$ converge uniformemente su S (casi (1)-(2)-(3)).

2. Si considerino le funzioni

$$(1) \quad f_n(x) = nxe^{-n^2 x^2} \quad n \in \mathbf{N}$$

$$(2) \quad f_n(x) = \frac{2e^{nx}}{1 + n^2 x^2} \quad n \in \mathbf{N}$$

$$(3) \quad f_n(x) = xe^{nx} \quad n \in \mathbf{N}$$

$$(4) \quad f_n(x) = (1 + nx)e^{-nx} \quad n \in \mathbf{N}$$

$$(5) \quad f_n(x) = n^2 xe^{-nx} \quad n \in \mathbf{N}$$

$$(6) \quad f_n(x) = (e^{2x} + 2e^x)^n \quad n \in \mathbf{N}$$

- a) Determinare l'insieme S di convergenza puntuale della successione di funzioni $\{f_n\}$ e la funzione limite f (casi (1)-(2)-(3)-(4)-(5)-(6)).
 b) Stabilire se la successione di funzioni $\{f_n\}$ converge uniformemente su S (casi (1)-(2)-(3)-(4)-(5)-(6)).
 c) In caso di risposta negativa al punto b), determinare dei sottoinsiemi di S nei quali la successione di funzioni $\{f_n\}$ converge uniformemente (casi (1)-(2)-(3)-(4)-(5)-(6)).

WWW.INGONLINE.BIZ

3. Si consideri la serie di funzioni

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^n \quad x \neq 0$$

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^n \quad x \neq 0$$

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x} \right)^n$$

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^5 e^{-nx^5}$$

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^3 e^{nx^3}$$

- a) (**PUNTI 3**) Determinare l'insieme S di convergenza puntuale della serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ (casi (1)-(2)-(3)-(4)-(5)).
 b) (**PUNTI 1**) Calcolare la funzione somma $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, definita su S (casi (1)-(2)-(3)-(4)-(5)).
 c) (**PUNTI 2**) Stabilire se la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente su S (casi (1)-(2)-(3)-(4)-(5)).

4. Si consideri la serie di funzioni

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^2 e^{n^2 x}$$

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^4 x^3 e^{-n^2 x}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

- a) (**PUNTI 3**) Determinare l'insieme S di convergenza puntuale della serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ (casi (1)-(2)).
 b) (**PUNTI 2**) Stabilire se la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente su S (casi (1)-(2)).

5. Si consideri la serie di funzioni

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^6 x^3 e^{-9n^2 x}$$

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{2 + n^2 x^2}$$

- a) (**PUNTI 3**) Determinare l'insieme S di convergenza puntuale della serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ (casi (1)-(2)).
 b) (**PUNTI 2**) Stabilire se la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente su S (casi (1)-(2)).
 c) In caso di risposta negativa al punto b), determinare dei sottoinsiemi di S nei quali la serie di funzioni converge uniformemente (casi (1)-(2)).

1.6 Serie di potenze - Esercizi risolti

Esercizio 1.6.1

Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n^2 + 2)2^n}. \quad (1.1)$$

Soluzione Per la determinazione del raggio di convergenza utilizziamo il criterio del rapporto, calcolando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 2)2^n}{((n+1)^2 + 2)2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n^2 + 2}{n^2 + 2n + 3} = \frac{1}{2}.$$

Il raggio di convergenza è quindi $R = 2$. Nel punto $x = 2$ la serie (1.1) si riduce a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 2)},$$

che converge (è equivalente a $\sum 1/n^2$), mentre per $x = -2$ abbiamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 + 2)},$$

che è (assolutamente) convergente. Quindi la serie (1.1) converge in $[-2, 2]$. ■

WWW.INGONLINE.BIZ

Esercizio 1.6.2

Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{x^{3n}}{3^n}. \quad (1.2)$$

Soluzione Con la sostituzione $z = x^3$ ci riconduciamo alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{z^n}{3^n}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto, calcolando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+3} \frac{n+2}{n+1} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}.$$

La serie (nella variabile z) ha raggio di convergenza $R_z = 3$; quindi converge per $|z| < 3$; ricordando la sostituzione fatta, la serie (1.2) converge per $|x^3| < 3$, cioè per $|x| < \sqrt[3]{3}$.

Ponendo nella (1.2) $x = \sqrt[3]{3}$, otteniamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2},$$

che non converge in quanto il suo termine generale non tende a zero (condizione necessaria di convergenza delle serie numeriche). Ponendo invece nella (1.2) $x = -\sqrt[3]{3}$, otteniamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+2};$$

anche questa serie non converge in quanto il suo termine generale non ammette limite (per n pari la successione dei suoi termini tende a 1, mentre per n dispari tende a -1).

L'insieme di convergenza della (1.2) è quindi $(-\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3})$. ■

Esercizio 1.6.3

Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^a}, \quad (1.3)$$

dove a è un numero reale positivo.

Soluzione Determiniamo il raggio di convergenza con il criterio della radice. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^a}}$$

Possiamo scrivere $\sqrt[n]{n^a} = n^{a/n} = \exp \frac{a \ln n}{n}$. Ricordando che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

abbiamo che $\frac{a \ln n}{n} \rightarrow 0$ e quindi $\exp \frac{a \ln n}{n} \rightarrow 1$. Il raggio di convergenza della (1.3) è quindi $R = 1$ per ogni valore $a > 0$.

Studiamo il comportamento nell'estremo $x = 1$; la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

converge se $a > 1$ e non converge se $a \leq 1$,

Sostituendo invece $x = -1$, abbiamo invece la serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$$

Questa serie è convergente per ogni valore di $a > 0$, per il criterio di Leibniz. Infatti il termine generale è decrescente e infinitesimo.

L'insieme di convergenza della (1.3) è quindi $[-1, 1)$ se $a \leq 1$ e $[-1, 1]$ se $a > 1$. ■

Esercizio 1.6.4

Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!} = x + x^2 + x^6 + x^{24} + x^{120} + \dots \quad (1.4)$$

Soluzione La successione dei coefficienti (sempre a partire dal termine costante) è

$$0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, 0, \dots,$$

dove gli zeri non si ripetono con regolarità ma in blocchi “sempre più grandi” all’aumentare di n . Non è quindi possibile quindi operare una sostituzione $z = x^k$ allo scopo di ottenere una serie con coefficienti non nulli.

Per studiare l’insieme di convergenza della serie assegnata bisogna procedere direttamente. È immediato osservare che la serie diverge in $x = 1$ e in $x = -1$, mentre converge per $|x| < 1$. Infatti se $|x| < 1$ possiamo affermare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^{n!}| = |x| + |x^2| + |x^6| + \dots \leq |x| + |x^2| + |x^3| + |x^4| + |x^5| + \dots;$$

la serie maggiorante è la serie geometrica presa in modulo, che sappiamo essere convergente per $|x| < 1$. Dal criterio del confronto discende l’assoluta convergenza della (1.4), che ha quindi raggio di convergenza uguale a uno e insieme di convergenza $(-1, 1)$. ■

Esercizio 1.6.5

Determinare il raggio di convergenza e l’insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n+1}. \quad \text{WWW.INGONLINE.BIZ} \quad (1.5)$$

Soluzione La serie assegnata non è della forma (??); per ricondurla a questa forma scriviamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2(x-1/2))^n}{3^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x-1/2)^n}{3^n+1}.$$

Con la sostituzione $z = x - 1/2$ ci riconduciamo a una serie centrata nell’origine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n z^n}{3^n+1}.$$

Il raggio di convergenza di questa serie è $R = 3/2$, come si verifica con il criterio del rapporto; agli estremi dell’intervallo la serie diverge (in entrambi i casi si ottiene una serie il cui termine generale non è infinitesimo), per cui l’insieme di convergenza risulta $\{z : -3/2 < z < 3/2\}$. Tenendo conto della sostituzione $z = x - 1/2$ la (1.5) ha come insieme di convergenza $\{x : -1 < x < 2\}$. ■

Esercizio 1.6.6

Determinare lo sviluppo in serie di Taylor delle seguenti funzioni, centrato nei punti indicati, indicando il raggio di convergenza:

$$a) \ f(x) = \exp(1-x^2) \quad x_0 = 0 \quad b) \ g(x) = \frac{1}{2x-3} \quad x_0 = 0 \quad c) \ h(x) = \ln(1+x) \quad x_0 = 1$$

Soluzione

a) Poichè $f(x) = \exp(1) \exp(-x^2)$, utilizzando lo sviluppo della funzione esponenziale

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

e operando la sostituzione $z = -x^2$, otteniamo

$$f(x) = \exp(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \exp(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}.$$

La serie esponenziale converge per ogni z reale e quindi la serie data converge per ogni x reale.

b) Possiamo calcolare lo sviluppo di $g(x)$, riconducendoci alla serie geometrica

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \text{per } |z| < 1. \quad (1.6)$$

Scriviamo

$$g(x) = \frac{1}{2x-3} = \frac{1}{-3 \left(1 - \frac{2x}{3}\right)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2x}{3}}$$

e sostituiamo $z = 2x/3$, ottenendo

$$g(x) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x}{3}\right)^n = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{3^n}\right) x^n.$$

Poichè la (1.6) converge per $|z| < 1$, tenendo conto della sostituzione effettuata, la serie che abbiamo ottenuto converge se $|\frac{2x}{3}| < 1$, vale a dire per $|x| < \frac{3}{2}$. È immediato verificare che la serie non converge nei punti $x = 3/2$ e $x = -3/2$.

c) Con la sostituzione $t = x - 1$ ci riconduciamo allo sviluppo centrato in $t_0 = 0$ della funzione $\ln(2+t)$, che scriviamo nella forma

$$\ln(2+t) = \ln\left(2\left(1 + \frac{t}{2}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{t}{2}\right).$$

Utilizzando lo sviluppo della funzione

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}, \quad \text{per } |z| < 1 \quad (1.7)$$

con la sostituzione $z = t/2$, otteniamo

$$\ln(2+t) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{n 2^n},$$

che converge quando $|t/2| < 1$, cioè quando $|t| < 2$, e infine

$$\ln(1+x) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^n}{n 2^n}.$$

Questa serie converge se $|x-1| < 2$, cioè nell'intervallo $(-1, 3)$. Nel punto $x = 3$ converge, in quanto si riduce alla serie armonica a segni alterni. Nel punto $x = -1$ si ottiene invece la serie

$$\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n 2^n}{n 2^n} = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

che è divergente. ■

Esercizio 1.6.7

Sviluppare in serie di McLaurin la funzione

$$f(x) = \frac{2x - 8}{x^2 - 8x + 12}$$

precisando il raggio di convergenza. Utilizzare il risultato ottenuto per calcolare $f^{(n)}(0)$ per n generico.

Soluzione Conviene decomporre la funzione $f(x)$ in fratti semplici e sviluppare le due funzioni ottenute:

$$f(x) = \frac{2x - 8}{x^2 - 8x + 12} = \frac{1}{x - 6} + \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{-6(1 - x/6)} + \frac{1}{-2(1 - x/2)}$$

Utilizzando la serie geometrica (1.6), con le sostituzioni $z = x/6$ e $z = x/2$, rispettivamente, otteniamo

$$f(x) = -\frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{6^n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{6^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{6^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) x^n$$

Ricordando la formula dello sviluppo in serie di Taylor, si ha che

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = -\frac{1}{6^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

e quindi

$$f^{(n)}(0) = -\frac{n!}{6^{n+1}} - \frac{n!}{2^{n+1}}.$$

■

WWW.INGONLINE.BIZ

Esercizio 1.6.8

Determinare l'insieme di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - x^2)^n}{n}.$$

Soluzione Con la sostituzione $z = 1 - x^2$ ci riconduciamo alla serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

che ha raggio di convergenza $R_z = 1$ e converge in $[-1, 1)$. La serie di funzioni converge allora negli x tali che $-1 \leq 1 - x^2 < 1$, vale a dire nell'insieme $[-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}]$; osserviamo che questo insieme NON è un intervallo. ■

Osservazione Nello studio degli integrali si è osservato che esistono delle funzioni elementari le cui primitive non possono essere espresse in termini di funzioni elementari. In alcuni casi, funzioni di questo tipo assumono grande importanza applicativa, ad esempio in elettronica, in ottica o nel calcolo delle probabilità. Risulta quindi conveniente definire delle nuove funzioni appunto come funzioni integrali, senza che sia possibile esprimerle in termini di funzioni note.

Gli sviluppi in serie di potenze ci consentono di calcolare queste funzioni. Vediamo alcuni esempi di funzioni di questo tipo:

1. la funzione seno integrale di x , $\text{Si}(x)$, che è definita come

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt;$$

2. la funzione degli errori, $\text{Erf}(x)$, che è definita come

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt;$$

3. la funzione integrale di Fresnel, $S(x)$, che è definita come

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt.$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Esercizio 1.6.9

Scrivere lo sviluppo in serie di potenze della funzione $\text{Si}(x)$ e calcolare $\text{Si}(1)$ con un errore minore di 10^{-3} .

Soluzione Partiamo dallo sviluppo della funzione seno, che sappiamo essere convergente per ogni z reale:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1.8)$$

Scrivendo questo sviluppo nella variabile t e dividendo per t otteniamo:

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Integriamo per serie (l'operazione è senz'altro possibile, perché lo sviluppo precedente ha raggio di convergenza infinito):

$$\begin{aligned} \text{Si}(x) &= \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} dt \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}. \end{aligned}$$

Questo sviluppo ha raggio di convergenza infinito.

Per calcolare $\text{Si}(1)$, calcoliamo la serie che abbiamo ottenuto per $x = 1$; otteniamo una serie numerica a segni alterni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} = 1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} + \dots$$

Affinché l'errore sia minore di 10^{-3} , per il teorema sulle serie a segno alterno, è sufficiente fermarci al terzo termine. Infatti il primo termine trascurato è minore di 10^{-3} , essendo $7!7 \approx 35000$.

WWW.INGONLINE.BIZ

1.7 Serie di potenze - Esercizi proposti

Esercizio 1.7.1

Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$; [$R = 1$, converge negli estremi]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)^4 x^n}{n!}$ [$R = \infty$]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-1)^n$ [$R = 1$, non converge negli estremi]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{3^n + 7^n} x^n$ [$R = 7/5$, non converge negli estremi]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{6^n + 2} x^n$ [$R = 0$]
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{2^n + 1}$ [$R = 2$, non converge negli estremi]
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1} \sqrt{\frac{n^2 + 1}{n^2}}$ [$R = 1$, non converge negli estremi]
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^{3n}}{2n(2n+2)}$ [$R = 5^{-1/3}$, converge negli estremi]
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n x^{2n+1}}{n(n+1)}$ [$R = 3^{-1/2}$, converge negli estremi]
10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \frac{1 + n2^n}{1 + n^2 2^n}$ [$R = 1$, converge negli estremi].

Esercizio 1.7.2

Data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) x^n$$

WWW.INGONLINE.BIZ

con a parametro reale positivo,

- si determini a in modo che il suo raggio di convergenza valga 3;
- per il valore di a trovato si studi il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo di convergenza.

[$a = 1/3$; per $x = 3$ la serie diverge, per $x = -3$ converge semplicemente]

Esercizio 1.7.3

Data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} b^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+3}}\right) x^n$$

con b parametro reale positivo

- si determini b in modo che il suo raggio di convergenza valga 2;
- per il valore di b trovato si studi il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo di convergenza.

$$[b = 1/2; \text{ per } x = 2 \text{ la serie diverge, per } x = -2 \text{ converge semplicemente}]$$

Esercizio 1.7.4

Il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è $R = 5$. Determinare il raggio di convergenza delle serie

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{2n}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{4n+3}. \quad [a) R = \sqrt{5}, b) R = \sqrt[4]{5}]$$

Esercizio 1.7.5

Sviluppare le seguenti funzioni in serie di McLaurin, indicando il raggio di convergenza degli sviluppi ottenuti.

1. $f(x) = \sin(x^2);$ $[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}, R = \infty]$
2. $f(x) = \ln(1+x^4);$ $[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{4n}}{n}, R = 1]$
3. $f(x) = \arctan(5x);$ $[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1}, R = 1/5]$
4. $f(x) = \frac{2}{3-5x};$ $[2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n x^n}{3^{n+1}}, R = 3/5]$
5. $f(x) = \ln(2+x^2);$ $[\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n 2^n}, R = \sqrt{2}]$
6. $\frac{x}{x^2 - x - 2}$ $[1/3 \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n - 2^{-n}) x^n, R = 1]$
7. $\frac{3-2x}{(1-x)^2}$ $[\sum_{n=0}^{\infty} (n+3) x^n, R = 1]$
8. $\log(x^2 + 5x + 6)$ $[\log 6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}) x^n, R = 2]$

Esercizio 1.7.6

Sviluppare in serie di Taylor, con centro nei punti indicati seguenti funzioni, indicando l'insieme I di convergenza degli sviluppi ottenuti.

1. $f(x) = \frac{1}{x}; \quad x_0 = 2;$ $[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}, I = (0, 4)]$
2. $f(x) = \frac{1}{x}; \quad x_0 = -3;$ $[-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^{n+1}}, I = (-6, 0)]$
3. $f(x) = \sqrt{x}; \quad x_0 = 1;$ $[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (x-1)^n, I = (0, 2)]$
4. $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x}}{4-x} \quad x_0 = 1.$ $[-\ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2} + \frac{1}{3^n} \right) \frac{(x-1)^n}{n}, I = (0, 2)]$

Esercizio 1.7.7

a) Scrivere lo sviluppo in serie di potenze della funzione $\text{Erf}(x)$ e calcolare $\text{Erf}(1/2)$ e $\text{Erf}(-1/2)$ con un errore minore di 10^{-3}

[$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} x^{2n+1}$, $\text{Erf}(1/2) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} \right)$, $\text{Erf}(-1/2) = -\text{Erf}(1/2)$, essendo la funzione $\text{Erf}(x)$ dispari]

b) Scrivere lo sviluppo in serie di potenze della funzione $S(x)$ e calcolare $S(1/3)$ con un errore minore di 10^{-3} .

[$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)! 2^{2n+1} (4n+3)} x^{4n+3}$, $S(1/3) \approx \pi/162$]

c) Calcolare per serie con un errore minore di 10^{-3} i seguenti integrali.

$$1. \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx; \quad [I = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)} \approx 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600}]$$

$$2. \int_0^1 \cos(x^2) dx; \quad [I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)} \approx 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{216}]$$

$$3. \int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x)}{x} dx. \quad [I = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n n^2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{72} - \frac{1}{256} + \frac{1}{800}]$$

Esercizio 1.7.8

Determinare l'insieme I di convergenza delle seguenti serie di funzioni, riconducendole, mediante un'opportuna sostituzione a serie di potenze.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2}; \quad [e^{-x} = t, I = [0, +\infty)]$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n x}{(n^2+1)2^n}; \quad [\ln x/2 = t, I = [e^{-2}, e^2]]$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} (\sin^n x + \cos^n x).$$

[Si studiano separatamente le due serie con le sostituzioni $\sin x = t, \cos x = t$, $I = \mathbf{R} \setminus \{x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$]

WWW.INGONLINE.BIZ

METODI MATEMATICI - IDI - A.A. 2003-2004
5 luglio 2004 - prova scritta primo appello

Risolvere gli esercizi proposti giustificando il ragionamento seguito. Accanto ad ogni esercizio è riportato il punteggio massimo ottenibile. In caso di soluzione corretta ma non adeguatamente giustificata il punteggio può essere inferiore al massimo.

Esercizio 1: (4 punti) Determinare gli $z \in \mathbb{C}$ tali che
$$\begin{cases} z^6 + 1 = 0 \\ \left(z + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Esercizio 2: (4 punti) Determinare raggio di convergenza e somma della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n+1)!}.$$

Esercizio 3:

- a) (6 punti) Determinare la migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati della funzione $f(x) = x$ mediante polinomi del tipo $a + bx^2$, ($a, b \in \mathbb{R}$), nell'intervallo $[0, 1]$.
- b) (2 punti) Calcolare l'errore commesso con l'approssimazione.

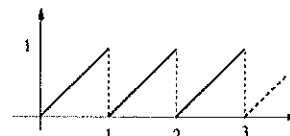
Esercizio 4: *Suggerimento: disegnare il grafico di $f(x)$, $g_1(x)$ e di $g_2(x)$.*

- a) (4 punti) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ e^{1-x} & x > 1 \end{cases}.$
- b) (4 punti) Sfruttare il risultato del punto a) per scrivere la trasformata di Fourier delle funzioni

$$g_1(x) = \begin{cases} e^{x+1} & x < -1 \\ 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ e^{1-x} & x > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g_2(x) = \begin{cases} -e^{x+1} & x < -1 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ e^{1-x} & x > 1 \end{cases}$$

Esercizio 5:

- a) (4 punti) Scrivere la trasformata di Laplace della funzione $f(x)$ disegnata in figura.
- b) (4 punti) Sfruttare il risultato precedente per calcolare la trasformata di Laplace di $g(x) = n$ per $x \in [n, n+1)$, $n > 0$.



Esercizi - Foglio 3 - Analisi complessa

Esercizio 3.1 Calcolare parte reale e parte immaginaria delle funzioni seguenti e stabilire quali di esse sono olomorfe nei loro dominio di definizione:

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------------|--------------------|
| a) $\sin(z)$ | d) $\cot(z)$ | g) $ z $ | j) $\frac{z}{1-z}$ |
| b) $\cos(z)$ | e) z^3 | h) $\arg(z)$ | |
| c) $\tan(z)$ | f) $\bar{z}$ | i) $\bar{z}/ z ^2$ | k) $\ln(z)$ |

Esercizio 3.2 Sia $z = x + iy$. Determinare le funzioni olomorfe $f(z)$ che soddisfano i requisiti seguenti:

- | | |
|---|---|
| a) $\operatorname{Re} f = xy - 1$ e $f(i) = -1$. | c) $\operatorname{Im} f = xy - 1$ e $f(i) = -i$. |
| b) $\operatorname{Re} f = \operatorname{Im} f$. | d) $\operatorname{Re} f = xy - 1$ e $f(i) = -i$. |

Esercizio 3.3 Individuare e classificare le singolarità delle funzioni:

- | | |
|--|--|
| a) $f(z) = \frac{\sin(z)}{(z^2 + 1)(z^2 - i)}$ | c) $f(z) = \frac{\tan(z)(z + i)}{(z^2 + 1)^2}$ |
| b) $f(z) = \frac{z + 2}{(z^2 - 1)(z^2 + z - 2)}$ | d) $f(z) = \frac{1 - z^2/2 - \cos(z)}{z^2(z^2 + z + 1)}$ |

Esercizio 3.4 Per ciascuna delle funzioni dell'esercizio 3.3 calcolare $\int_{\gamma} f(z) dz$ nei casi seguenti:

- 1) $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } |z| = 1/2\}$
- 2) $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } |z| = 3/2\}$
- 3) $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } |z - i| = 1/2\}$
- 4) γ è il rettangolo di vertici $z_1 = -1/2 - i/2$, $z_2 = 3 - i/2$, $z_3 = 3 + i/2$, e $z_4 = -1/2 + i/2$

Esercizio 3.5 Calcolare gli integrali seguenti utilizzando il teorema dei residui.

- | | |
|--|---|
| a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ | d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)} dx$ |
| b) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx)}{5+3\cos x} dx, \quad m \in \mathbb{N}$ | e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx$ |
| c) $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$ | f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$ |

Esercizi - Foglio 2 - Serie di Potenze

Esercizio 2.1 Determinare il raggio di convergenza delle serie

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \text{b) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1} \quad \text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)z^k \quad \text{d) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2k+1}}$$

e calcolarne la somma.

Indicato con ρ il raggio di convergenza delle serie, verificare per ciascuna, se esistono $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = \rho$ per cui le serie convergono. La serie b) è convergente per $z = i$?

Esercizio 2.2 Determinare per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ convergono la serie

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \quad \text{b) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{3^k + 1} \quad \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k^2}}{2^k k}$$

Esercizio 2.3 Verificare che la funzione $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ è derivabile infinite volte in $x = 0$, ma la serie di Taylor di f centrata in zero non converge ad f .

Esercizio 2.4 È possibile determinare dei coefficienti a_k tali che la somma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$

- a) sia uguale a $|z|$ per $|z| < 1$?
b) sia uguale a $\frac{1}{(z-1)^2}$ per $|z| < 2$?
c) sia uguale a $\frac{1}{1-z}$ per $|z-2| < 1$?
d) sia uguale a $|z|$ per $|z-2| < 1$?
e) coincida con la funzione $\begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ per $x \in (0, 2)$?

Esercizio 2.5 Sia $f(x) = \frac{1}{(z-1)(z^2+1)}$.

- a) Verificare che f è analitica in un intorno di $z = -1$;
b) Senza determinare esplicitamente la serie, si può dire quanto vale il raggio di convergenza dello sviluppo di f in serie di potenze di centro $z = -1$?

WWW.INGONLINE.BIZ

ESERCIZI SULLE SERIE DI POTENZE / SERIE DI TAYLOR

- 1) Determinare l'insieme di convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^n} (x-2)^n$$

- 2) Determinare l'insieme di convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{ne^n}{(n+1)^2} x^n$$

- 3) Data la serie di funzioni (osservare che)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right)^n \frac{1}{n}$$

- a) determinarne l'insieme di convergenza puntuale
b) discuterne la convergenza uniforme

WWW.INGONLINE.BIZ

- 4) Data la serie di funzioni (osservare che)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx e^{n(x^2-x)}$$

- a) determinarne l'insieme di convergenza puntuale
b) discuterne la convergenza uniforme

- 5) Calcolare con un'approssimazione inferiore a 10^{-2} il valore di

$$\int_0^{1/2} \frac{\log(1+x^3)}{x} dx$$

Esercizi riguardanti serie di potenze

Esercizio 1

Si determinino gli insiemi di convergenza semplice, assoluta e uniforme della serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(1+n)}$$

Esercizio 2

Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2 + \sin n)^n x^n$$

Esercizio 3

Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin delle funzioni

$$f(x) = (1+x^2)^{-1/2}$$

$$g(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

WWW.INGONLINE.BIZ

e se ne indichi il raggio di convergenza.

Esercizio 4

Si determinino gli insiemi di convergenza semplice, assoluta e uniforme della serie di potenze in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3n + \log n}$$

Esercizio 5

Discutere la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

A.A.2003/2004 ESERCIZI PER IL CORSO DI
COMPLEMENTI DI MATEMATICA II
Seconda Parte

1 Trasf. di Laplace e equazioni differenziali

Esercizio 1.1 Determinare la trasformata di Laplace della soluzione dei seguenti problemi di Cauchy (per $t > 0$). Quanto è l'ascissa di convergenza di ciascuna soluzione?

a)
$$\begin{aligned} x'' + x' &= e^t[u(t) - u(t-2)] \\ x(0) &= 0, \quad x'(0) = 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x'' + 3x' - 2x &= (t+1)u(t-1) \\ x(0) &= -1, \quad x'(0) = 0 \end{aligned}$$

Esercizio 1.2 Determinare la trasformata di Laplace della soluzione (x, y) dei seguenti sistemi differenziali (per $t > 0$)

$$\begin{array}{ll} \begin{aligned} x' &= -4x - y + e^{-t} \\ \text{a) } y' &= x - 2y \\ x(0) &= 0, \quad y(0) = 0 \end{aligned} & \begin{aligned} x' + 2y' &= 2x - y \\ \text{b) } 2x' - y' &= x + y \\ x(0) &= 0, \quad y(0) = 1 \end{aligned} \end{array}$$

La componente $x(t)$ della soluzione soddisfa la condizione

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0?$$

2 Trasformata e antitrasformata Zeta

Esercizio 2.1 Calcolare la trasformata Zeta dei seguenti campionamenti

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f_n = (-1)^n & \text{b) } f_n = (n+4) \cos(5n) \\ \text{c) } f_n = ne^{7n} \sin 4n & \text{d) } f_n = 2^n \\ \text{e) } f_n = \begin{cases} e^{2n} & n \neq 10 \\ 0 & n = 10 \end{cases} & \text{f) } f_n = \begin{cases} \pi & n \text{ pari} \\ e^{-n} & n \text{ dispari} \end{cases} \\ \text{g) } f_n = \begin{cases} 0 & n = 0, 4, 8, 12, \dots \\ e^n & n = 1, 5, 9, 13, \dots \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases} & \end{array}$$

Esercizio 2.2 Quale o quali delle seguenti funzioni è una trasformata Zeta? In caso affermativo, calcolare il raggio di convergenza delle antitrasformate.

$$\begin{array}{ll} F_1(z) = \frac{e^z}{z+4} & F_2(z) = \frac{e^{-z}}{z+4} \\ F_3(z) = \frac{e^{1/z}}{z+4} & F_4(z) = \frac{z^4 + 4z}{z+4} \\ F_5(z) = \frac{z+6}{z^4 + 4z} & F_6(z) = \sin \frac{1}{z} \\ F_7(z) = \frac{\sin z}{z} & F_8(z) = \frac{z+2}{z-2} \end{array}$$

Esercizio 2.3 Calcolare l'antitrasformata Zeta delle seguenti funzioni razionali

$$\begin{array}{l} F_1(z) = \frac{z+6}{z-6}, \quad F_2(z) = \frac{z+6}{z^2+4z+4}, \quad F_3(z) = \frac{z^3+1}{z^4+1}, \\ F_4(z) = \frac{z+6}{z^2-16}, \quad F_5(z) = \frac{z+6}{z^2-6z+5}, \quad F_6(z) = \frac{3z^2+2z+1}{2z^2+z} \end{array}$$

Esercizio 2.4 Quale è il raggio di convergenza delle antitrasformate delle funzioni di cui all'Esercizio 2.3 ?

Esercizio 2.5 E' applicabile il Teorema del valore finale alle le funzioni F_3, F_5, F_6, F_8 . di cui all'Esercizio 2.2?

Risposte Esercizio 2.2. Sono trasformate Zeta le funzioni F_3, F_5, F_6, F_8 . Non lo sono le altre.

3 Trasformata di Fourier

Esercizio 3.1 Le seguenti funzioni razionali sono trasformate di Fourier di funzioni di classe L^1 ?

$$F_1(\omega) = \frac{\omega}{\omega^2 - 2\omega + 1}, \quad F_2(\omega) = \frac{\omega^2 - 1}{\omega^2 + 1}, \quad F_3(\omega) = \frac{2\omega}{\omega + 4}.$$

Esercizio 3.2 Calcolare (se esiste) la trasformata di Fourier delle funzioni

$$f_1(t) = e^{-2t}u(t), \quad f_2(t) = t[u(t) - u(t-1)], \quad f_3(t) = te^t u(t-2).$$

Risposte Esercizio 3.1 Nessuna delle funzioni considerate è la trasformata di Fourier di funzioni $f \in L^1$. Le funzioni F_1, F_3 non lo sono in quanto non continue per ogni ω reale; F_2 non lo è in quanto non infinitesima per $|\omega| \rightarrow \infty$.

INTEGRALI DOPPI

Esercizi svolti

1. Calcolare i seguenti integrali doppi:

(a) $\int_A xy \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;

(b) $\int_A \frac{1}{(x+y)^2} \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2\}$;

(c) $\int_A (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$;

(d) $\int_A (x - 2y) \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$;

(e) $\int_A xy \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1 + x\}$;

WWW.INGONLINE.BIZ

(f) $\int_A (x + y) \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 2x^3 \leq y \leq 2\sqrt{x}\}$;

(g) $\int_A \frac{\sin y}{y} \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, x \leq y \leq \pi\}$;

(h) $\int_A (x + 2y) \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, \min\{x^2, x\} \leq y \leq \max\{x^2, x\}\}$;

(i) $\int_A x \sin |x^2 - y| \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;

(j) $\int_A |\sin x - y| \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1\}$;

(k) $\int_A x^2 \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : y \leq -x^2 + x/2 + 3, y \geq -x^2 - x, y \geq -x^2 + 2x\}$.

2. Sia A la regione di piano racchiusa nel triangolo di vertici $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (1, 1)$ e $A_3 = (2, 0)$ e dotata di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di A rispetto al vertice A_1 .

3. Sia B la regione di piano racchiusa nel triangolo di vertici $B_1 = (0, 0)$, $B_2 = (0, 1)$ e $B_3 = (1, 0)$ e dotata di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di B rispetto al vertice B_3 .

4. Calcolare il baricentro delle regioni di piano dotate di densità unitaria

(a) $A = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 1\}$;

(b) $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

5. Calcolare i seguenti integrali doppi:

(a) $\int_D y^2 \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$;

(b) $\int_D x^2 + y^2 \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$;

(c) $\int_D x^2 \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$;

(d) $\int_D y \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : 4x^2 + 9y^2 \leq 36, y \geq 0\}$.

6. Sia D un disco circolare dotato di densità unitaria, avente centro in $C = (r, 0)$ e raggio r . Verificare la relazione $I_0 = I_C + r^2 A$, dove I_0 e I_C sono i momenti di inerzia di D rispetto a O e a C e A è l'area di D .

7. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'origine degli assi della lamina piana di densità unitaria $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$.

8. Calcolare i seguenti integrali impropri:

(a) $\int_D (x^2 + y^2)^{-\alpha} \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2\}$;

(b) $\int_D \frac{xy}{(x^4 + y^4)} \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$;

(c) $\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$;

(d) $\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)} \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$;

(e) $\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, -x \leq y \leq 0\}$.

WWW.INGONLINE.BIZ

1. Calcolare i seguenti integrali doppi:

(a) $\int_A xy \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

È possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.

Integrando per verticali si ottiene

$$\int_A xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy \, dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

(b) $\int_A \frac{1}{(x+y)^2} \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2\}$.

È possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.

Integrando per orizzontali si ottiene

$$\begin{aligned} \int_A \frac{1}{(x+y)^2} \, dx \, dy &= \int_1^2 \left(\int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2} \, dx \right) dy = \int_1^2 \left[-\frac{1}{x+y} \right]_3^4 dy = \\ &= \int_1^2 \left(-\frac{1}{4+y} + \frac{1}{3+y} \right) dy = [-\log(4+y) + \log(3+y)]_1^2 = \ln\left(\frac{25}{24}\right). \end{aligned}$$

(c) $\int_A (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$.

La regione A è sia orizzontalmente che verticalmente convessa. È quindi possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.

Integrando per verticali si ottiene

$$\begin{aligned} \int_A (2x^2 + 3y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 (2x^2 + 3y) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[2x^2 y + \frac{3}{2} y^2 \right]_{x^2}^1 dx = \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{7}{2} x^4 + 2x^2 + \frac{3}{2} \right) dx = \left[-\frac{7}{10} x^5 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x \right]_0^1 = \frac{22}{15}. \end{aligned}$$

(d) $\int_A (x - 2y) \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$.

La regione A è sia orizzontalmente che verticalmente convessa. È quindi possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.

Integrando per orizzontali si ottiene

$$\begin{aligned} \int_A (x - 2y) \, dx \, dy &= \int_0^2 \left(\int_0^{2-y} (x - 2y) \, dx \right) dy = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} - 2xy \right]_0^{2-y} dy = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{5}{2} y^2 - 6y + 2 \right) dy = \left[\frac{5}{6} y^3 - 3y^2 + 2y \right]_0^2 = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

(e) $\int_A xy \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1+x\}$.

La regione A è sia orizzontalmente che verticalmente convessa, ma per la forma esplicita di A è più conveniente integrare per verticali. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_A xy \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{1+x} xy \, dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{1+x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (-x^5 + x^3 + 2x^2 + x) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3} x^3 + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

(f) $\int_A (x+y) dx dy$, $A = \{(x,y) : 2x^3 \leq y \leq 2\sqrt{x}\}$.

La regione A è sia orizzontalmente che verticalmente convessa. È quindi possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.

Integrando per orizzontali risulta

$$\begin{aligned} \int_A (x+y) dx dy &= \int_0^2 \left(\int_{(y/2)^2}^{(y/2)^{1/3}} (x+y) dx \right) dy = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{(y/2)^2}^{(y/2)^{1/3}} dy = \\ &= \int_0^2 \left(-\frac{x^4}{32} - \frac{y^3}{4} + \frac{y^{2/3}}{2^{5/3}} + \frac{y^{4/3}}{2^{1/3}} \right) dy = \left[-\frac{y^5}{5 \cdot 32} - \frac{y^4}{16} + \frac{3y^{5/3}}{5 \cdot 2^{5/3}} + \frac{3y^{7/3}}{7 \cdot 2^{1/3}} \right]_0^2 = \frac{39}{35}. \end{aligned}$$

(g) $\int_A \frac{\sin y}{y} dx dy$, $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \pi, x \leq y \leq \pi\}$.

Sebbene la regione A sia verticalmente e orizzontalmente convessa, non è possibile calcolare esplicitamente l'integrale per verticali, infatti la funzione $(\sin y)/y$ non è integrabile elementarmente rispetto a y . Integrando per orizzontali si ottiene invece

$$\int_A \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^\pi \left(\int_0^y \frac{\sin y}{y} dx \right) dy = \int_0^\pi \sin y dy = [-\cos y]_0^\pi = 2.$$

(h) $\int_A (x+2y) dx dy$, $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, \min\{x^2, x\} \leq y \leq \max\{x^2, x\}\}$.

L'insieme A può essere visto come l'unione dei due insiemi

$$A_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}, \quad A_2 = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq x^2\}$$

la cui intersezione si riduce ad un punto delle relative frontiere. Possiamo quindi decomporre l'integrale secondo:

$$\int_A (x+2y) dx dy = \int_{A_1} (x+2y) dx dy + \int_{A_2} (x+2y) dx dy$$

dove entrambi gli integrali a secondo membro possono essere risolti integrando per verticali. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{A_1} (x+2y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (x+2y) dy \right) dx = \int_0^1 [xy + y^2]_{x^2}^x dx = \\ &= \int_0^1 (2x^2 - x^3 - x^4) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{13}{60} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{A_2} (x+2y) dx dy &= \int_1^2 \left(\int_x^{x^2} (x+2y) dy \right) dx = \int_1^2 [xy + y^2]_x^{x^2} dx = \\ &= \int_1^2 (-2x^2 + x^3 + x^4) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_1^2 = \frac{317}{60} \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_A (x+2y) dx dy = \frac{13}{60} + \frac{317}{60} = \frac{11}{2}.$$

WWW.INGONLINE.BIZ

(i) $\int_A x \sin |x^2 - y| dx dy$, $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Poichè

$$\sin |x^2 - y| = \begin{cases} \sin (x^2 - y) & \text{se } y \leq x^2 \\ \sin (y - x^2) & \text{se } y > x^2, \end{cases}$$

si ha

$$\int_A x \sin |x^2 - y| dx dy = \int_{A_1} x \sin (x^2 - y) dx dy + \int_{A_2} x \sin (y - x^2) dx dy$$

dove

$$A_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}, \quad A_2 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$$

Integrando per verticali otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{A_1} x \sin(x^2 - y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} x \sin(x^2 - y) dy \right) dx = \int_0^1 x [\cos(x^2 - y)]_0^{x^2} dx = \\ &= \int_0^1 (x - x \cos(x^2)) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \sin(x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{A_2} x \sin(y - x^2) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 x \sin(y - x^2) dy \right) dx = \int_0^1 x [-\cos(y - x^2)]_{x^2}^1 dx = \\ &= \int_0^1 (x - x \cos(1 - x^2)) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \sin(1 - x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 1\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_A (x + 2y) dx dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 1 = 1 - \sin 1.$$

(j) $\int_A |\sin x - y| dx dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1\}$.

Poichè

$$|\sin x - y| = \begin{cases} \sin x - y & \text{se } y \leq \sin x \\ y - \sin x & \text{se } y > \sin x, \end{cases}$$

si ha

$$\int_A |\sin x - y| dx dy = \int_{A_1} (\sin x - y) dx dy + \int_{A_2} (y - \sin x) dx dy$$

dove

$$A_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}, \quad A_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, \sin x \leq y \leq 1\}$$

Integrando per verticali otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{A_1} (\sin x - y) dx dy &= \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin x} (\sin x - y) dy \right) dx = \int_0^\pi \left[y \sin x - \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sin x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{1}{4} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{4} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^\pi = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{A_2} (y - \sin x) dx dy &= \int_0^\pi \left(\int_{\sin x}^1 (y - \sin x) dy \right) dx = \int_0^\pi \left[\frac{y^2}{2} - y \sin x \right]_{\sin x}^1 dx = \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \sin^2 x - \sin x + \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{4} (1 - \cos 2x) - \sin x + \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= \left[\frac{3}{4} x - \frac{1}{8} \sin 2x + \cos x \right]_0^\pi = \frac{3}{4} \pi - 2.\end{aligned}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Quindi

$$\int_A |\sin x - y| dx dy = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4} \pi - 2 = \pi - 2.$$

(k) $\int_A x^2 dx dy$, $A = \{(x, y) : y \leq -x^2 + x/2 + 3, y \geq -x^2 - x, y \geq -x^2 + 2x\}$.

L'insieme A può essere visto come l'unione dei due insiemi

$$A_1 = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 0, -x^2 - x \leq y \leq -x^2 + x/2 + 3\},$$

$$A_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -x^2 + 2x \leq y \leq -x^2 + x/2 + 3\}$$

aventi in comune solo punti delle relative frontiere. Possiamo quindi decomporre l'integrale secondo:

$$\int_A x^2 dx dy = \int_{A_1} x^2 dx dy + \int_{A_2} x^2 dx dy$$

dove entrambi gli integrali a secondo membro possono essere risolti integrando per verticali.

Si ha

$$\int_{A_1} x^2 dx dy = \int_{-2}^0 \left(\int_{-x^2-x}^{-x^2+x/2+3} x^2 dy \right) dx = \int_{-2}^0 \left(\frac{3}{2}x^3 + 3x^2 \right) dx = \left[\frac{3}{8}x^4 + x^3 \right]_{-2}^0 = 2$$

e

$$\int_{A_2} x^2 dx dy = \int_0^2 \left(\int_{-x^2+2x}^{-x^2+x/2+3} x^2 dy \right) dx = \int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x^3 + 3x^2 \right) dx = \left[-\frac{3}{8}x^4 + x^3 \right]_0^2 = 2$$

Quindi

$$\int_A x^2 dx dy = 2 + 2 = 4.$$

2. Sia A la regione di piano racchiusa nel triangolo di vertici $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (1, 1)$ e $A_3 = (2, 0)$ e dotata di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di A rispetto al vertice A_1 .

Essendo

$$A = \{(x, y) : y \leq x \leq 2 - y, 0 \leq y \leq 1\}$$

si ha

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_A (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} (x^2 + y^2) dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_y^{2-y} dy = \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{8}{3}y^3 + 4y^2 - 4y + \frac{8}{3} \right) dy = \left[-\frac{2}{3}y^4 + \frac{4}{3}y^3 - 2y^2 + \frac{8}{3}y \right]_0^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

3. Sia B la regione di piano racchiusa nel triangolo di vertici $B_1 = (0, 0)$, $B_2 = (0, 1)$ e $B_3 = (1, 0)$ e dotata di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di B rispetto al vertice B_3 .

Risulta

$$B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Poichè la distanza del generico punto $(x, y) \in B$ dal vertice B_3 è $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, si ha

$$\begin{aligned} I_{B_3} &= \int_B ((x-1)^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} ((x-1)^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left[y(x-1)^2 + \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} dx = \\ &= -\frac{4}{3} \int_0^1 (x-1)^3 dx = -\frac{1}{3} [(x-1)^4]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4. Calcolare il baricentro delle regioni di piano dotate di densità unitaria

- (a) $A = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 1\}$.

Siano $\bar{x}_A$ e $\bar{y}_A$ le coordinate del baricentro di A .

Per simmetria risulta $\bar{x}_A = 0$.

Invece

$$\bar{y}_A = \frac{1}{M(A)} \int_A y dx dy$$

dove $M(A)$ è la massa di A .

Poichè

$$M(A) = \int_A dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 dy \right) dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$$

e

$$\int_A y dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 y dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{5},$$

risulta $\bar{y}_A = 3/5$.

WWW.INGONLINE.BIZ

- (b) $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

Siano $\bar{x}_B$ e $\bar{y}_B$ le coordinate del baricentro di B .

Per simmetria risulta $\bar{x}_B = 0$.

Invece

$$\bar{y}_B = \frac{1}{M(B)} \int_B y \, dx \, dy$$

dove $M(B)$ è la massa di B .

Poichè

$$M(B) = \int_B dx \, dy = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\int_B y \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^2) \, dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3},$$

risulta $\bar{y}_B = 4/(3\pi)$.

5. Calcolare i seguenti integrali doppi:

- (a) $\int_D y^2 \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

L'integrale può essere calcolato utilizzando coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Poichè $x^2 + y^2 = \rho^2$, la condizione $x^2 + y^2 \leq 1$ diventa $0 \leq \rho \leq 1$, mentre $y \geq 0$ diventa $\sin \theta \geq 0$, ossia $0 \leq \theta \leq \pi$.

L'insieme di integrazione nel piano ρ, θ è quindi il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Essendo ρ lo Jacobiano della trasformazione, si ha:

$$\begin{aligned} \int_D y^2 \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \rho^3 \sin^2 \theta \, d\theta \right) d\rho = \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \, d\theta \right) d\rho = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^3 \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

- (b) $\int_D x^2 + y^2 \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$;

L'integrale può essere calcolato utilizzando coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Poichè $x^2 + y^2 = \rho^2$, la condizione $x^2 + y^2 \leq 1$ diventa $0 \leq \rho \leq 1$, mentre $0 \leq y \leq x$ diventa $0 \leq \sin \theta \leq \cos \theta$, ossia $0 \leq \theta \leq \pi/4$.

L'insieme di integrazione nel piano ρ, θ è quindi il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/4\}.$$

Essendo ρ lo Jacobiano della trasformazione, si ha:

$$\int_D x^2 + y^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} \rho^3 \, d\theta \right) d\rho = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{4} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

- (c) $\int_D x^2 \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.

L'integrale può essere calcolato utilizzando coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Poichè $x^2 + y^2 = \rho^2$, la condizione $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ diventa $1 \leq \rho \leq 2$, mentre $y \geq 0$ diventa $0 \leq \theta \leq \pi$.
L'insieme di integrazione nel piano ρ, θ è quindi il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) : 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Essendo ρ lo Jacobiano della trasformazione, si ha

$$\begin{aligned} \int_D x^2 dx dy &= \int_1^2 \left(\int_0^\pi \rho^3 \cos^2 \theta d\theta \right) d\rho = \int_1^2 \rho^3 \left(\int_0^\pi \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \right) d\rho = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^3 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_1^2 = \frac{15}{8} \pi. \end{aligned}$$

(d) $\int_D y dx dy$, $D = \{(x, y) : 4x^2 + 9y^2 \leq 36, y \geq 0\}$.

Per il calcolo dell'integrale è utile riscrivere la disequazione che definisce D come

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} \leq 1,$$

da cui

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} \leq 1.$$

D risulta quindi essere metà di una ellisse di semiassi $a = 3$ e $b = 2$. Utilizzando la trasformazione

$$\begin{cases} x = 3\rho \cos \theta \\ y = 2\rho \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

l'insieme di integrazione nel piano ρ, θ diventa il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Essendo 6ρ lo Jacobiano della trasformazione, si ha

$$\int_D y dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^\pi 12\rho^2 \sin \theta d\theta \right) d\rho = \int_0^1 12\rho^2 [-\cos \theta]_0^\pi d\rho = 24 \int_0^1 \rho^2 d\rho = 8[\rho^3]_0^1 = 8.$$

6. Sia D un disco circolare dotato di densità unitaria, avente centro in $C = (r, 0)$ e raggio r . Verificare la relazione $I_0 = I_C + r^2 A$, dove I_0 e I_C sono i momenti di inerzia di D rispetto a O e a C e A è l'area di D .

Risulta

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_D (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_D ((x - r + r)^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_D ((x - r)^2 + 2r(x - r) + r^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_D ((x - r)^2 + y^2) dx dy + r^2 \int_D dx dy + 2r \int_D (x - r) dx dy \\ &= I_C + r^2 A + 2r \int_D (x - r) dx dy \\ &= I_C + r^2 A \end{aligned}$$

poichè per simmetria risulta

$$\int_D (x - r) dx dy = 0.$$

7. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'origine degli assi della lamina piana di densità unitaria $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$.

Poiché l'insieme C è invariante rispetto alla simmetria per l'origine e la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ è pari rispetto a tale simmetria risulta

$$I_0 = \int_C (x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_{C'} (x^2 + y^2) dx dy$$

dove

$$C' = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 - 2x \geq 0, y \geq 0\}.$$

L'integrale può ora essere calcolato utilizzando coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

L'insieme di integrazione nel piano ρ, θ è quindi il seguente:

$$\{(\rho, \theta) : 2 \cos \theta \leq \rho \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi/2\} \cup \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 3, \pi/2 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Essendo ρ lo Jacobiano della trasformazione, si ha

$$\begin{aligned} I_0 &= 2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_{2 \cos \theta}^3 \rho^3 d\rho \right) d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_0^3 \rho^3 d\rho \right) d\theta \right) = \left(\int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{2 \cos \theta}^3 d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^3 d\theta \right) = \\ &= 2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\frac{81}{4} - 4 \cos^4 \theta \right) d\theta + \frac{81}{4} \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \right) = 2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\frac{77}{4} - 2 \cos 2\theta - \frac{1}{2} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \right) d\theta + \frac{81}{8} \right) = \\ &= 2 \left[\frac{75}{4} \theta - \sin 2\theta - \frac{1}{8} \sin 4\theta \right]_0^{\pi/2} + \frac{81}{4} \pi = 39\pi. \end{aligned}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

8. Calcolare i seguenti integrali impropri:

(a) $\int_D (x^2 + y^2)^{-\alpha} dx dy$, $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2\}$.
Sia

$$D_R = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad (R > 1)$$

allora

$$\int_D (x^2 + y^2)^{-\alpha} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D_R} (x^2 + y^2)^{-\alpha} dx dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\begin{aligned} \int_{D_R} (x^2 + y^2)^{-\alpha} dx dy &= \int_1^R \left(\int_0^{2\pi} \rho^{-2\alpha+1} d\theta \right) d\rho = 2\pi \int_1^R \rho^{-2\alpha+1} d\rho \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{1-\alpha} (R^{-2\alpha+2} - 1) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ 2\pi \log R & \text{se } \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_D (x^2 + y^2)^{-\alpha} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{\pi}{1-\alpha} (R^{-2\alpha+2} - 1) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ 2\pi \log R & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

e quindi l'integrale diverge positivamente se $\alpha \leq 1$, vale $\pi/(\alpha - 1)$ se $\alpha > 1$.

(b) $\int_D \frac{xy}{(x^4 + y^4)} dx dy$, $D = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$;
Sia

$$D_R = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}, \quad (R > 2)$$

allora

$$\int_D \frac{xy}{(x^4 + y^4)} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D_R} \frac{xy}{(x^4 + y^4)} dx dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\begin{aligned}\int_{D_R} \frac{xy}{(x^4 + y^4)} dx dy &= \int_2^R \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\rho} \frac{\sin \theta \cos \theta}{(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} d\theta \right) d\rho = \\ &= \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} d\theta \right) \left(\int_2^R \frac{1}{\rho} d\rho \right) = \frac{\pi}{4} (\log R - \log 2).\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_D \frac{xy}{(x^4 + y^4)} dx dy = \frac{\pi}{4} \lim_{R \rightarrow +\infty} (\log R - \log 2) = +\infty.$$

Quindi l'integrale diverge positivamente.

(c) $\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Sia

$$D_R = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}, \quad (R > 1)$$

allora

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D_R} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\begin{aligned}\int_{D_R} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy &= \int_1^R \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\rho^2} \cos \theta d\theta \right) d\rho = \int_1^R \frac{1}{\rho^2} [\sin \theta]_0^{\pi/2} d\rho = \\ &= \int_1^R \frac{1}{\rho^2} d\rho = \left[-\frac{1}{\rho} \right]_1^R = 1 - \frac{1}{R}.\end{aligned}$$

WWW.INGONLINE.BIZ

Pertanto

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{R} \right) = 1.$$

(d) $\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)} dx dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.

Sia

$$D_\epsilon = \{(x, y) : \epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}, \quad (\epsilon > 0)$$

allora

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)} dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2 + y^2)} dx dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2 + y^2)} dx dy = \int_\epsilon^1 \left(\int_0^{\pi/4} \cos \theta d\theta \right) d\rho = \int_\epsilon^1 [\sin \theta]_0^{\pi/4} d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_\epsilon^1 d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \epsilon).$$

Pertanto

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)} dx dy = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (1 - \epsilon) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(e) $\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, -x \leq y \leq 0\}$.

Sia

$$D_\epsilon = \{(x, y) : \epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, -x \leq y \leq 0\}, \quad (\epsilon > 0)$$

allora

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\begin{aligned}\int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy &= \int_\epsilon^1 \left(\int_{-\pi/4}^0 \frac{1}{\rho^2} \cos \theta d\theta \right) d\rho = \int_\epsilon^1 \frac{1}{\rho^2} [\sin \theta]_{-\pi/4}^0 d\rho = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_\epsilon^1 \frac{1}{\rho^2} d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[-\frac{1}{\rho} \right]_\epsilon^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right).\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) = +\infty.$$

Quindi l'integrale diverge positivamente.