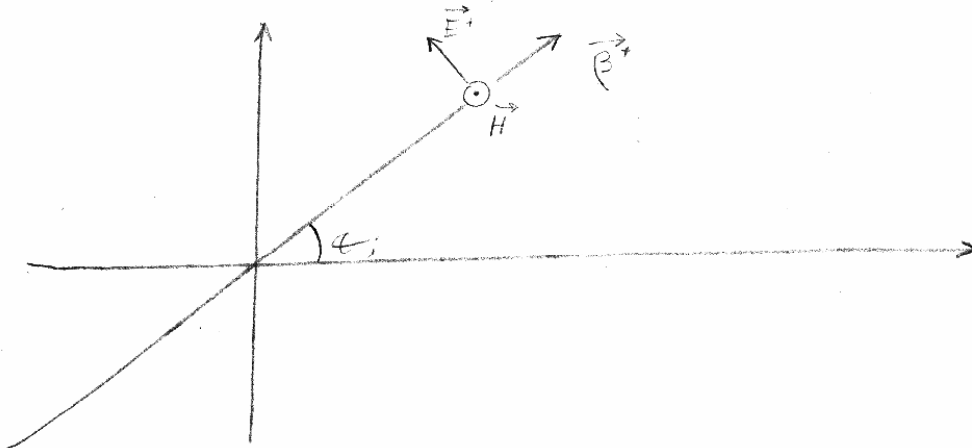


LEZIONE DEL 07/03/2007

21

RIEPILOGO:

SIA DATA UN'ONDA DI MODO TE⁸ RISPETTO AL RIFERIMENTO CARTESIANO DI SEGUITO RAFFIGURATO:



CON RIFERIMENTO ALLA SOLA ONDA PROGRESSIVA POSSIAMO SCRIVERE:

$$\vec{E}^+ = E^+ (\vec{a}_x \cos \theta_i - \vec{a}_z \sin \theta_i) \cos(\omega t - \vec{\beta}^+ \cdot \vec{z})$$

DOVE:

$$\vec{\beta}^+ = \beta^+ (\vec{a}_x \sin \theta_i + \vec{a}_z \cos \theta_i)$$

$$\vec{z} = \vec{a}_x x + \vec{a}_z z$$

$$\text{PER IL MOD TE} \Rightarrow \vec{\beta}^+ \cdot \vec{z} = \beta^+ (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)$$

CON NOTAZIONE FASORIALE:

$$\vec{E}^+ = E^+ (\vec{a}_x \cos \theta_i - \vec{a}_z \sin \theta_i) e^{-j \vec{\beta}^+ \cdot \vec{z}}$$

LA LEGGE DI D'ALAMBERT, PER IL MOD TE SI ESPRIME COME:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 f}{dt^2} = 0$$

$$\text{CON: } \begin{cases} f = H \\ c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{u}{\beta} \end{cases}$$

(22)

OVVERO:

$$\vec{E}^+ = E_{\text{SCALARE}}^+ = E^+ \cos(\omega t - \beta z) = E^+ \cos\left(\left(-z + \frac{\omega t}{\beta}\right) \cdot \beta\right)$$

E' STATO DETTO CHE, NELLO SPAZIO LIBERO, LA DIVERGENZA DEL VETTORE DI POYNTING E NULLA:

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \left\{ \vec{S} \right\} = 0$$

PIANO DI INCIDENZA:

SIA, PER IL MODO TEM RAPPRESENTATO NELLA PAGINA PRECEDENTE, IL PIANO xy UNA PARETE DI SEPARAZIONE TRA DUE MATERIALI DIVERSI.

POSSIAMO RAPPRESENTARE QUESTO PIANO PER MEZZO DI DUE VERSORI:

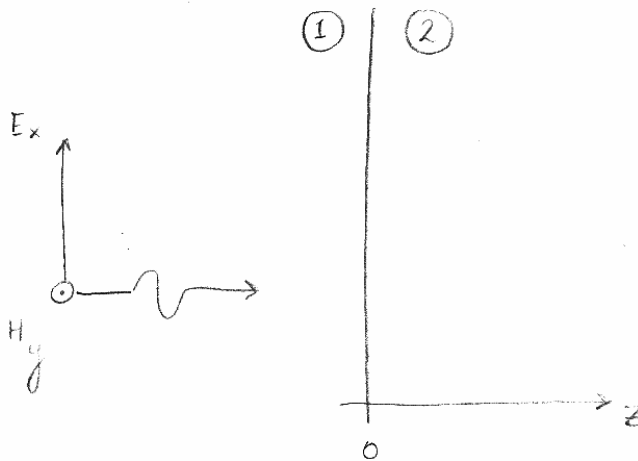
- UN VERSORE NORMALE ALLA PARETE DI SEPARAZIONE
- UN VERSORE CONCORDE ALLA VELOCITA' DI PROPAGAZIONE DELL'ONDA

RISPETTO A QUESTO GENERE DI RAPPRESENTAZIONE SI PUO' PARLARE DI POLARIZZAZIONE PARALLELA O PERPENDICOLARE.

QUESTO STUDIO TROVA APPLICAZIONE, AD ESEMPIO, NELLE CAMERE SEMIANECOTICHE, REALIZZATE CON PARETI DI MATERIALE E FORMA TALI DA NON RIFLETTERE I CAMPI ELETTROMAGNETICI.

UN PRIMO APPROCCIO PUO' ESSERE EFFETTUATO STUDIANDO IL CASO DI UN'ONDA TEM CHE INCIDE PERPENDICOLARMENTE AD UN PIANO DI SEPARAZIONE.

23



SIA IL PIANO DI SEPARAZIONE FERMO.
SIANO I DUE MEZZI ① E ② TALI DA NON
COMPORTARE PERDITE. NELLE IPOTESI FATTE
POSSIAMO ASSERTIRE CHE SI CONSERVA LA COMPONENTE
TANGENZIALE AL PIANO DEL CAMPO ELETTRICO:



$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{1}{\omega \epsilon} \frac{d}{dt} \iint_{S} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

IL PERCORSO
DI INTEGRAZIONE
HA LUNGHEZZA
FINITA

TENDE A ZERO
PERCHÉ IL PERCORSO
 Γ SOTTENDE UN'AREA
INFINITESIMA

$\Rightarrow$ LA
COMPONENTE
TANGENZIALE DI
 $\vec{E}$ SI
CONSERVA

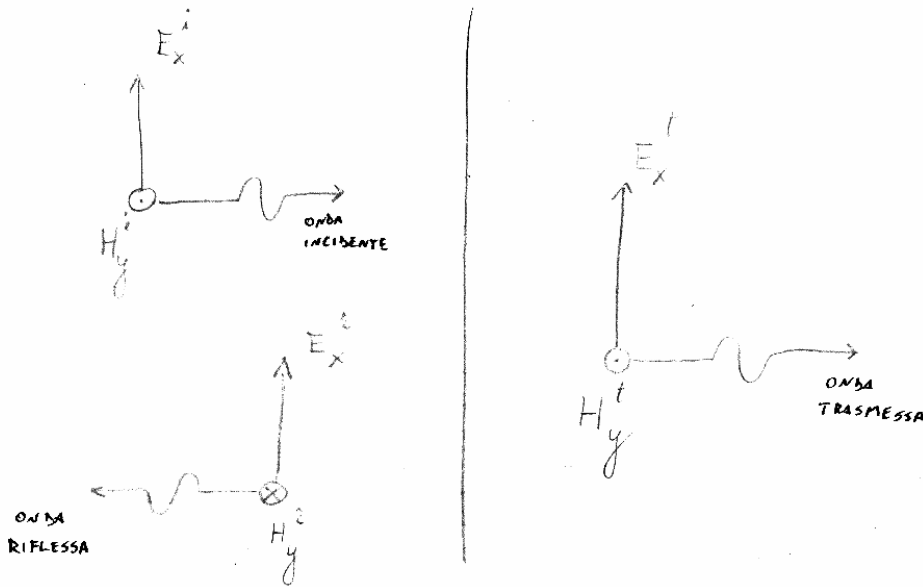
DA CIO' NE CONSEGUE: $E_x^+ = E_{x1}^+ \cos(\omega t - \beta_1 z)$

IL FATTO CHE IL MEZZO NON INTRODUCE PERDITE E
CHE VI SIA LA SOLA ONDA PROGRESSIVA COMPORTA:

$$H_y^+ = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_{y2}}, \quad \frac{\dot{E}^+}{\dot{H}^+} = \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$$

PERTANTO $\dot{E}_{x2} \neq \dot{E}_{x1} \Leftrightarrow \eta_2 \neq \eta_1$

IL CHE È IMPOSSIBILE $\Rightarrow$ ESISTE UN'ONDA RIFLESSA (24)



$$E^i = E_{x10}^+ \cos(\omega t - \beta_1 z)$$

$$E^r = \rho E_{x10}^+ \cos(\omega t + \beta_1 z)$$

DOVE

$$\rho \triangleq \frac{\dot{E}_r}{\dot{E}_i}$$

$$E^t = \gamma E_{x10}^+ \cos(\omega t - \beta_2 z)$$

DOVE

$$\gamma \triangleq \frac{\dot{E}_t}{\dot{E}_i}$$

RISPETTIVAMENTE SI AVRANNO, PER IL CAMPO MAGNETICO:

$$H^i = \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} \cos(\omega t - \beta_1 z)$$

$$H^r = -\rho \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} \cos(\omega t + \beta_1 z)$$

$$H^t = \gamma \frac{E_{x10}^+}{\eta_2} \cos(\omega t - \beta_2 z)$$

(25)

PER QUANTO DETTO SULLA CONSERVAZIONE DELLA
COMPONENTE TANGENZIALE DEL CAMPO ELETTRICO :

$$\dot{E}^i + \dot{E}^r = \dot{E}^t \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{1 + \rho = \tau}$$

PER QUANTO RIGUARDA L'INDICE DI RIFLESSIONE :

$$\left. \begin{aligned} E_{x20}^+ &= (1 + \rho) E_{x10}^+ \\ H_{y20}^+ &= (1 - \rho) H_{y10}^+ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \eta_2 = \frac{E_{x20}^+}{H_{y20}^+} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \cdot \eta_1$$

NOTE LE IMPEDENZE NEI DUE MEZZI, E' POSSIBILE
CALCOLARE L'INDICE DI RIFLESSIONE:

$$\eta_2 (1 - \rho) = \eta_1 (1 + \rho) \Rightarrow \eta_2 - \eta_1 = (\eta_2 + \eta_1) \rho$$
$$\Rightarrow \boxed{\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}}$$

PER VERIFICARE LA VALIDITA' DI QUESTO RISULTATO
E' SUFFICIENTE SUPPORRE CHE I DUE MEZZI
SIANO UGUALI :

$$\eta_2 = \eta_1 \Rightarrow \rho = 0$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE

(26)

DISTURBO DELL'ONDA RIFLESSA:

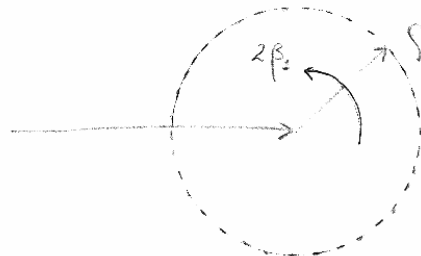
AVVALENDOCI DEI RISULTATI OTTENUTI E DELLA NOTAZIONE FASORIALE

$$\dot{E}_x^i = E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z}$$

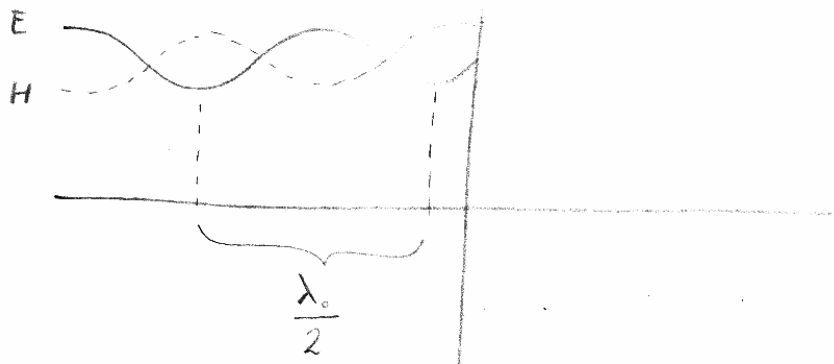
$$\dot{E}_x^r = \rho E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z}$$

$$E_{x1} = E_{x1}^i + E_{x1}^r = E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} \cdot \left(1 + \rho e^{2j\beta_1 z} \right)$$

SI NOTA CHE AL CAMPO DELLA SOMMA INCIDENTE SI SOMMA IL CAMPO DELL'ONDA RIFLESSA GENERANDO UN DISTURBO AVENTE PULSAZIONE DOPPIA.
UNA UTILE RAPPRESENTAZIONE E' DATA DAL DIAGRAMMA DI CRANK



CON PULSAZIONE DOPPIA OTTENIAMO UN'ONDA CHE SI COMPONE CON QUELLA INCIDENTE UNA VOLTA IN MANIERA COSTRUTTIVA E UNA VOLTA IN MANIERA DISTRUTTIVA.



(27)

RAPPORTO D'ONDA STAZIONARIO (ROS)

IL RAPPORTO D'ONDA STAZIONARIO ROS, INDICATO ANCHE CON L'ACRONIMO SVWR E', PER DEFINIZIONE, IL RAPPORTO

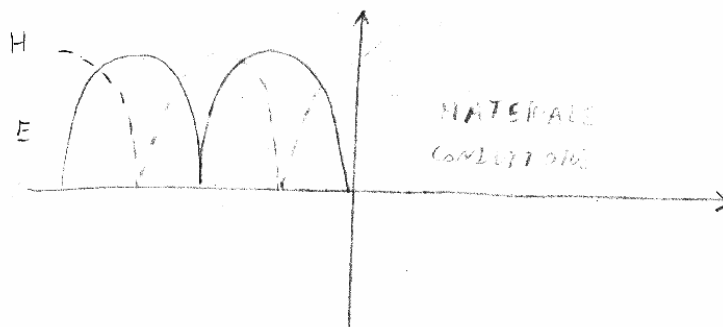
$$ROS \triangleq \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$$

OVVERO IL RAPPORTO TRA IL VALORE MASSIMO E IL VALORE MINIMO DELL'ONDA.

SE, PER IPOTESI, E' DATO UN MATERIALE CHE SI COMPORTA COME UN CONDUTTORE PERFETTO, SARA' :

$$E_2^+ = 0 \Rightarrow \rho = -1$$

IN ALTRE PAROLE OTTENIAMO UNA RIFLESSIONE TOTALE. PER QUANTO RIGUARDA IL CAMPO MAGNETICO, PUO' NON CONSERVARSI, DAL MOMENTO CHE IL CONDUTTORE AMMETTE L'ESISTENZA DI UNA CORRENTE SUPERFICIALE.

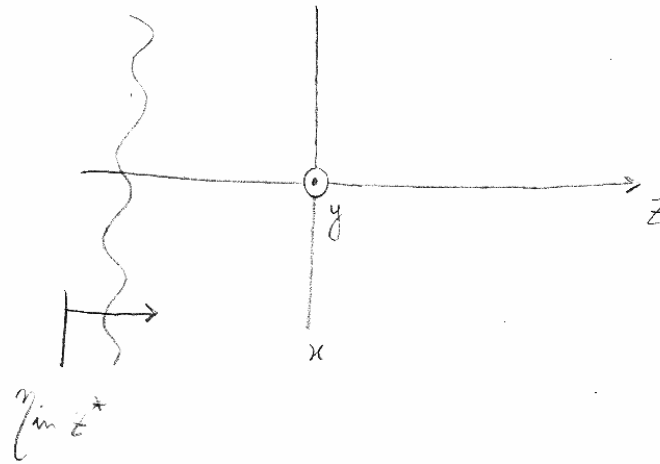


PER IL CAMPO INCIDENTE SI HA:

$$H_y^i = \frac{E_{x20}^+}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}$$

POSSIAMO CALCOLARCI L'IMPIEDENZA ASSOCIATA AD UNA SEZIONE (IMPIEDENZA INCIDENTE)

impedenza
ricettività



$$\begin{aligned} \eta_{in} &= \frac{E_{x10}^+ \cdot e^{-j\beta_1 z} + \int E_{x10}^+ \cdot e^{j\beta_1 z}}{\frac{E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z}}{\eta_1} + \int \frac{E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z}}{\eta_2}} = \\ &= \eta_1 \frac{e^{-j\beta_1 z} + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} e^{j\beta_1 z}}{e^{-j\beta_1 z} - \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} e^{j\beta_1 z}} = \\ &= \eta_1 \frac{(\eta_2 + \eta_1) e^{-j\beta_1 z} + (\eta_2 - \eta_1) e^{j\beta_1 z}}{(\eta_2 + \eta_1) e^{-j\beta_1 z} - (\eta_2 - \eta_1) e^{j\beta_1 z}} = \\ &= \eta_1 \frac{\eta_2 (e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z}) + \eta_1 (e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z})}{\eta_1 (e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z}) + \eta_2 (e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z})} = \end{aligned}$$

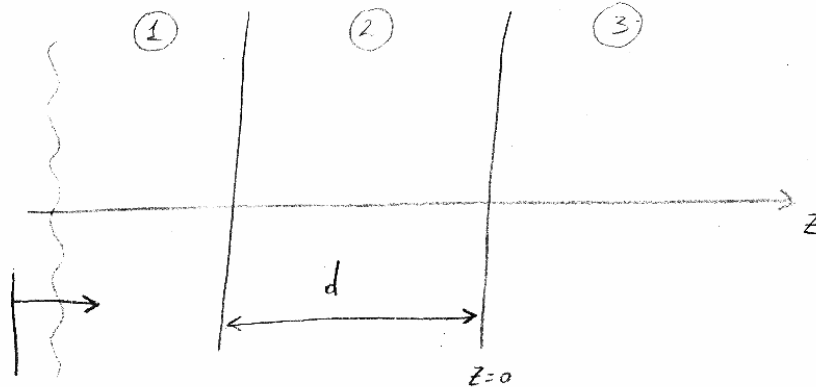
USANDO LE FORMULE DI EULERO E TRIGONOMETRIA DI BASE:

$$= \eta_1 \frac{\eta_2 - j \eta_1 \tan(\beta_1 z)}{\eta_1 - j \eta_2 \tan(\beta_1 z)}$$

DOPPIA INTERFACCIA

(29)

STUDIAMO IL CASO DI UN'ONDA ELETTROMAGNETICA CHE INCIDE IN UNA SUPERFICIE DI SEPARAZIONE TRA DUE MATERIALI E, QUINDI, IN UN TERZO MATERIALE.



OVVIAMENTE LE DUE INTERFACCIE SARANNO, IN GENERALE, SEDE DI UNA SERIE DI RIFLESSIONI MULTIPLE. TUTTAVIA, SE L'IMPEDENZA CARATTERISTICA VISTA DAL PRIMO STRATO È UGUALE ALL'IMPEDENZA DEL PRIMO STRATO STESSO E IL MATERIALE ① E IL MATERIALE ③ SONO UGUALI, ALLORA NON C'È ALCUNA RIFLESSIONE E SI DICE CHE È STATA ADATTATA UNA SUPERFICIE:

$$\eta_1 = \eta_{in(1,2)}^+ \Rightarrow \text{NO RIFLESSIONE.}$$

UTILIZZANDO IL RISULTATO OTTENUTO PER CALCOLARE UNA IMPEDENZA EQUIVALENTE, ABBIAMO:

$$\eta_{in(1,2)}^+ = \eta_2 \cdot \frac{\eta_3 - j \eta_2 \tan(\beta_2 d)}{\eta_2 - j \eta_3 \tan(\beta_2 d)}$$

PONIAMO TALE IMPEDENZA UGUALE AD η_3

(30)

$$\eta_2 \cdot \frac{\eta_3 - j \eta_2 \tan(\beta_2 d)}{\eta_2 - j \eta_3 \tan(\beta_2 d)} = \eta_3 \quad (*)$$

TROVIAMO DUE SOLUZIONI. LA PRIMA, OVVIA, È

PER $\tan(\beta_2 d) = 0$. IL SIGNIFICATO FISICO DI

QUESTA SOLUZIONE È QUELLO DI NON INTERPORRE ALCUN
MATERIALE TRA (1) E (3) $\Rightarrow d = 0$.

L'ALTRA SOLUZIONE È π E TUTTI I MULTIPLI DI TALE
ANGOLO:

$$\pi \Rightarrow \beta_2 d = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow d = \frac{\lambda}{2}$$

IN GERGO SI DICE CHE È STATO ADATTATO IL
MEZZO (1) AL MEZZO (3) PER MEZZO DI UN
TRASFORMATORE A $\lambda/2$

SE, INVECE, FACCIAMO TENDERE LA (*) AL LIMITE
PER $\beta_2 d$ CHE TENDE A $\frac{\pi}{2}$, OTTENIAMO:

$$\eta_{in} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \eta_2 \cdot \frac{\eta_3 - j \eta_2 \tan(x)}{\eta_2 - j \eta_3 \tan(x)} = \frac{\eta_2^2}{\eta_3}$$

SE PONIAMO $\eta_{in} = \eta_1$, OTTENIAMO:

$$\frac{\eta_2^2}{\eta_3} = \eta_1 \Rightarrow \eta_2 = \sqrt{\eta_1 \cdot \eta_3}$$

CIO' SIGNIFICA CHE, NEL CASO PIU' GENERALE IN CUI I TRE MATERIALI SONO DIVERSI TRA LORO E' POSSIBILE EFFETTUARE UN ADATTAMENTO A $\frac{\lambda}{4}$. (31)

ATTENUAZIONE E PERDITE.

NEL TRATTARE LA PROPAGAZIONE DELLE ONDE, DUALMENTE A COME DEFINITO NEI CIRCUITI ELETTRICI, SI ASSOCIA LA PARTE IMMAGINARIA DELL'IMPIEDENZA ALLE PERDITE.

PARTENDO DALLE LEGGI DI MAXWELL:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} = -\mu \frac{dH}{dt} \\ \nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{d\vec{E}}{dt} \end{cases}$$

PER LA SOLA COMPONENTE $\vec{z}$, IN REGIME SINUSOIDALE, ABBIAMO:

$$\begin{cases} \frac{dE_x}{dz} = -\mu \frac{dH_y}{dt} \\ -\frac{dH_y}{dz} = (\sigma + j\omega\epsilon) E_x \end{cases}$$

DEFINIAMO UN OPERATORE γ CHE EQUIVALE A FARE LA DERIVATA RISPETTO A z :

$$\gamma = -\frac{d}{dz} \Rightarrow \begin{cases} \gamma E_x = \mu j\omega H_y \\ \gamma H_y = (\sigma + j\omega\epsilon) E_x \end{cases} \quad (*)$$

(32)

CON RIFERIMENTO ALLA SOLA ONDA PROGRESSIVA ABBIAMO:

$$\eta = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\mu j\omega H_y}{(\sigma + j\omega \epsilon) E_x} \Rightarrow \eta^2 = \frac{\mu j\omega}{\sigma + j\omega \epsilon}$$

INOLTRE, SEMPRE DAL SISTEMA (*) SI TROVA CHE:

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{\mu \cdot j\omega}{\gamma} = \frac{\gamma}{\sigma + j\omega \epsilon}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \gamma^2 &= \mu j\omega \cdot (\sigma + j\omega \epsilon) = \\ &= \mu j\omega \cdot j\omega \epsilon \left(\frac{\sigma}{j\omega \epsilon} + 1 \right) = -\mu \omega^2 \cdot \epsilon \left(\frac{\sigma}{j\omega \epsilon} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \gamma = j\omega \cdot \sqrt{\mu \epsilon} \cdot \sqrt{1 + \frac{\sigma}{j\omega \epsilon}}$$

RICONOSCIAMO NELL'OPERATORE γ LA SEGUENTE FORMA:

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

└──────────┐
└──────────┘ COSTANTE DI FASE

└──────────┘ PERDITE

CHIAMIAMO γ COSTANTE DI PROPAGAZIONE

SIA DATO, PER IPOTESI, UN BUON MEZZO CONDUTTORE:

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$$

NOTA: DA QUESTO PUNTO DI VISTA, PER UN ELETTRICO, (33)
OGNI CONDUTTORE PUÒ ESSERE CONSIDERATO UN
BUON CONDUTTORE ESSENDO:

$$\sigma \sim 10^7 \text{ V CONDUTTORE}$$

$$\omega < 10^5 \text{ X UN ELETTRICO}$$

NELL'IPOTESI, COME DETTO, DI MATERIALE PERFETTAMENTE
CONDUTTORE, SI HA:

$$\begin{cases} \eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \\ \sigma \gg \omega\epsilon \end{cases} \Rightarrow \eta \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$$

DA CUI CONCLUDIAMO CHE NEI CONDUTTORI I CAMPI
ELETTICO E MAGNETICO SONO SFASATI TRA LORO DI $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{j\omega\epsilon}} = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{\omega\mu\sigma} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \gamma = \sqrt{\pi f \mu \sigma} + j \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \alpha + j\beta$$

DOVE

$$\boxed{\alpha = \beta}$$

LE DIMENSIONI DI α SONO L'INVERSO DI UNA
LUNGHEZZA.

DEFINIAMO LO SPESSORE DI PENETRAZIONE COME:

$$\delta = \alpha^{-1} \quad [\delta] = [m]$$

QUESTO PARAMETRO, LEGATO A FENOMENI COME L'EFFETTO PELLE,
VIENE USATO, AD ESEMPIO, PER DIMENSIONARE I LAMIERINI DI UN TRASFORMATORE

(34)

Esercizio:

DATA UN'ONDA CHE SI PROPAGA NELLO SPAZIO LIBERO, AVENTE UNA FREQUENZA DI 1 GHz, DETERMINARNE LA LUNGHEZZA D'ONDA:

$$\lambda = c \cdot \frac{1}{f}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{w}{B_0}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \cdot f} \approx 33 \text{ cm}$$

LA STESSA ONDA, NEL RAME, HA UNA LUNGHEZZA D'ONDA PARI A:

$$\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}, \quad \mu_r = 1, \quad f = 1 \text{ GHz}$$

$$\lambda \approx 10^{-5}$$

AD UNA FREQUENZA DI 50 Hz LA LUNGHEZZA D'ONDA SAREBBE PARI A 1 cm

PERMITTIVITA' COMPLESSA:

$$\nabla \times \vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \vec{E} = j\omega \left[\epsilon \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \epsilon \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon} \right)$$