

ESERCIZIO

$$Ax = b \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + \alpha x_2 = 1 \end{cases}$$

Risolvere nel senso dei minimi quadrati

1. vediamo se vale il teorema di Cofetti:

$$\det(A|b) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 - \alpha - 1 - \alpha + 4 = -2\alpha - 4$$

$$\det(A|b) = -2\alpha - 4$$

$$\alpha = -2 \Rightarrow \det(A|b) = 0$$

$$\rightarrow \text{rango}(A|b) = 2$$

$$\rightarrow \text{rango}(A) = 1 \quad \text{perché le colonne sono proporzionali.}$$

$\Rightarrow$ Se $\alpha = -2$ il sistema non ha soluz. perché non è verificato il teorema di Cramer

Se $\alpha \neq -2$

$$\text{rango}(A|b) = 3$$

$$\text{rango}(A) = 2$$

$\Rightarrow \forall \alpha$ il sistema non ha soluz.

quindi lo risolveremo nel senso dei minimi quadrati

$A^T A$ = simmetrica

$$A^T A x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & \alpha \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A^T b$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -2+2\alpha \\ -2+2\alpha & 2+\alpha^2 \end{pmatrix}}_{\hat{A^T A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\hat{A^T b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

è giusto di risolvere:

1 caso: $\alpha = 1$

2 caso: $\alpha = -2$

I) $\alpha = 1$

$$\text{rango}(A) = 2 \rightarrow \text{rango}(A^T A) = 2 = \text{rango}(A^T A | b)$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x_1 = 2 \\ 3x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad x^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\|d(x^*)\|_2^2 = 2$$

$$\text{II) } \underline{\alpha = -2}$$

$$\text{rango}(A^*A) = 1$$

$$\text{rango}(A) + \dim(N(A)) = n$$

$$\alpha \text{ rango}(A) = k < n$$

$$\dim(N(A)) = n - k = 0$$

$$\Rightarrow x^* = x^*(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$$

essendo $m=2$ e $\text{rango}(A^*A)=1 \Rightarrow$ la soluz. dipende da 1 parametro

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 6x_2 = 2 \\ -6x_1 + 6x_2 = -2 \end{cases} \rightarrow \text{sono due eqz. uguali}$$

$$6x_1 = 2 + 6x_2 \rightarrow x_1 = x_2 + \frac{1}{3}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} x_2 + \frac{1}{3} \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + \frac{1}{3} \\ c \end{pmatrix}$$

~~quante~~

$$d(x^*) = \underbrace{Ax^* - b'}_{y=0} - b'' = -b''$$

(dobbiamo verificare che) $d(x^*)$ non dipende dal parametro, ma è un numero fisso

$$\|d(x^*)\|_2^2 = \frac{7}{3} \leftarrow \text{non dipende da } c$$

che valore devo prendere per c ?

$$x^*(c) = \begin{pmatrix} c + \frac{1}{3} \\ c \end{pmatrix}$$

posso prendere $c=0$

$$x^*(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

posso prendere x^* con norma euclidea minima
non metto 4 perché tanto siamo in $\mathbb{R}^2$

$$x^*(c)^T x^*(c) = \|x^*(c)\|_2^2 = c^2 + \frac{1}{9} + \frac{2}{3}c + c^2 = 2c^2 + \frac{2}{3}c + \frac{1}{9}$$

prendo come c il min:

$$f'(c) = 4c + \frac{2}{3}$$

$$f''(c) = 0 \Rightarrow f'(0) = \min \rightarrow 4c + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{6}$$

$$x^*\left(-\frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Luglio 1998

$$\alpha = ? \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\alpha n \approx -n + N, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad \text{approssimare nel senso dei minimi quadrati}$$

$$Ax = b$$

$$\text{impiego che } \alpha n = -n + N, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N$$

$$\alpha n = -n + N$$

$$\begin{cases} \alpha \cdot 1 = -1 + N \\ \alpha \cdot 2 = -2 + N \\ \alpha \cdot 3 = -3 + N \\ \vdots \\ \alpha N = -N + N \end{cases}$$

$\rightarrow$ in generale non vi è una soluz.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} -1 + N \\ -2 + N \\ -3 + N \\ \vdots \\ -N + N \end{pmatrix}$$

$\downarrow \quad \quad \quad \swarrow$
 $Ax = b$

$$\text{rank}(A) = 1$$

$$\text{rank}(A|b) = 2 \Rightarrow \text{non esiste soluz. perché non è verificato il teorema di Cramer}$$

risolviamo quindi nel senso dei minimi quadrati
perché siamo nel campo reale

$$A^T A x = A^T b$$

$$(1, 2, 3, \dots, N) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} x = (1, 2, 3, \dots, N) \begin{pmatrix} -1+N \\ -2+N \\ -3+N \\ \vdots \\ -N+N \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}(A^T A) = 1$$

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + N^2) x = (-1+N - 2^2 + 2N - 3^2 + 3N + \dots + (-N^2) + N^2)$$

$$= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \text{somma dei quadrati dei primi } N \text{ numeri interi}$$

$$\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} x = -\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + N \cdot \frac{N(N+1)}{2}$$

$$\frac{2N+1}{6} x = -\frac{2N+1}{6} + \frac{N}{2}$$

$$(2N+1)x = -(2N+1) + 3N$$

$$x = \frac{N-1}{2N+1}$$

si esamina il caso $N \gg 1$:

per $N \gg 1$

$$x \approx \frac{1}{2}$$

$$c = ?$$

$$c = -\frac{1}{10}n^2 + 10n + 1 \quad , \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$c = -\frac{1}{10}n^2 + 10n + 1$$

$$Ac = b$$

$$\begin{cases} c = -\frac{1}{10} + 10 + 1 \\ c = -\frac{1}{10}(2)^2 + 10 \cdot 2 + 1 \\ \hline c = -\frac{1}{10}N^2 + 10N + 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} + 10 + 1 \\ -\frac{1}{10} \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 1 \\ -\frac{1}{10}N^2 + 10N + 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$\text{rango}(A|b) = 2$$

$\Rightarrow$ non c'è soluz. ~~perché~~

$$A^T A c = A^T b$$

sistema di rango 1

Svolgere

$$\text{soluz. } c = c(N) = -\frac{1}{30}N^2 + \frac{99}{20}N + \frac{359}{60}$$

calcolare il valore di N affinché $c(N)$ sia max.

$$\frac{dc}{dN} = -\frac{1}{15}N + \frac{99}{20}$$

$$\frac{d^2c}{dN^2} = -\frac{1}{15} < 0$$

$\Rightarrow N = \frac{99}{20} \cdot \frac{3}{4} = 18 \frac{3}{4}$ non essendo un numero intero, devo approssimare all'intero più vicino (74)

devo verificare che 74 va bene, quindi calcolo

$$c(73), c(74), c(75) \quad \text{e vedo che } c(73) < c(74) > c(75)$$

21/03/06 (202)

ESERCIZIO

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 1 & 1 \\ \frac{1}{n} & 1 & 1 \\ \frac{1}{n} & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 3}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{n+1}{n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

x^* eventualmente in norma euclidea minima
calcolare $d(x^*)$ e vedere cosa succede per $n \rightarrow \infty$

• $\text{rang}(A) = 1 \leftarrow$ perché le colonne sono tutte l.d. (l.d. = linearmente dipendenti)

$$\text{rang}(A) = 1 = \text{rang}(A^T A)$$

$\text{rang}(A|b) = 2 \rightarrow$ non può essere 3 perché $\forall$ minore di ordine 3 ha due colonne di A , che sono l.d.

$\Downarrow$
soluz.

$$A^T A x = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 1 & 1 \\ \frac{1}{n} & 1 & 1 \\ \frac{1}{n} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 1 & 1 \\ \frac{1}{n} & 1 & 1 \\ \frac{1}{n} & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 1 & 1 \\ 1 & n & n \\ 1 & n & n \end{pmatrix} = A^T A$$

$$A^T b = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 1 & 1 \\ 1 & n & n \\ 1 & n & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{n} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{2}{n} \\ x_1 + n x_2 + n x_3 = 2 \\ x_1 + n x_2 + n x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{rank} = 2$$

$$\frac{1}{n} x_1 = \frac{2}{n} - x_2 - x_3$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 2 - n x_2 - n x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x^* = x^*(x_2, x_3)$$

$$\|x^*\|_2 = \sqrt{x^{*T} x^*}$$

$$x^{*T} x^* = 4 + n^2 x_2^2 + n^2 x_3^2 - 4n x_2 - 4n x_3 + 2n^2 x_2 x_3 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\frac{\partial x^{*T} x^*}{\partial x_2} = 2n^2 x_2 - 4n + 2n^2 x_3 + 2x_2 = 0$$

$$\frac{\partial x^{*T} x^*}{\partial x_3} = 2n^2 x_3 - 4n + 2n^2 x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\begin{cases} 2(n^2 + 1)x_2 + 2n^2 x_3 = 4n \\ 2n^2 x_2 + 2(n^2 + 1)x_3 = 4n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{2n}{2n^2 + 1} = x_3 \\ x_3 = \frac{2n}{2n^2 + 1} \end{cases}$$

$$x^* = \frac{2n}{2n^2+1} \begin{bmatrix} 1 \\ n \\ n \end{bmatrix}$$

$$\|d(x^*)\|_2^2 = \frac{n-1}{n} \quad \text{per } n \rightarrow \infty \quad \|d(x^*)\|_2^2 \rightarrow 1$$