

Metodi iterativi

si considera una partizione di A

$$A = M - \overbrace{(M - A)}^N$$

$$\det(M) \neq 0$$

$$A = M - N$$

$$Ax = b$$

$$(M - N)x = b$$

$$Mx - Nx = b$$

$$Mx = Nx + b \quad \text{essendo } \det(M) \neq 0 \quad \exists M^{-1}$$

$$\underbrace{M^{-1}M}_I x = \underbrace{M^{-1}N}_H x + \underbrace{M^{-1}b}_C$$

$$x = Hx + c$$

$$x = Hx + c \equiv Ax = b$$

$$x^* = Hx^* + c \quad \text{identicamente}$$

$$\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

$$x^{(1)} = Hx^{(0)} + c$$

$$x^{(2)} = Hx^{(1)} + c$$

$$x^{(3)} = Hx^{(2)} + c$$

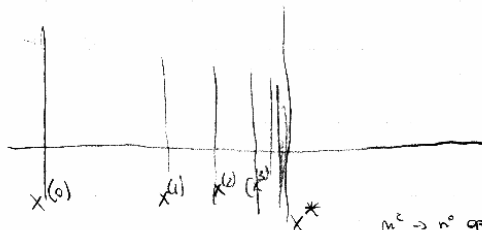
$$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + c \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

genero una successione di vettori

$$\{x^{(k)}\}_{k=0}^{k=\infty}$$

sceglia opportunamente M

$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$ cioè la successione converge verso la soluz. del sistema



criterio di arresto potrebbe essere

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon \quad \leftarrow \text{lo fisso prima} \quad (\text{Es. } \varepsilon = 10^{-14})$$

$$x^{(k+1)} \approx x^*$$

e assumo come soluz. del sistema $x^{(k+1)}$

$m^2 \rightarrow n^2$ operaz. richieste per il prodotto Hx

costo computazionale : kn^2 flops $\Rightarrow$ in generale $k \ll n$
 $kn^2 < n^3$

se $n \approx 10^3$ $\rightarrow$ Gauss $n^3 = 10^9$ flops
 $\searrow$ iterativo $50 n^2 = 50 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^7$ flops

$H \rightarrow$ matrice di iterazione

$$x^{(k)} = Hx^{(k-1)} + c$$

$$x^* = Hx^* + c$$

$$x^* - x^{(k)} = H(x^* - x^{(k-1)})$$

$e^{(k)}$ $\rightarrow$ errore che commetto al k -esimo passo

$$e^{(k)} = He^{(k-1)} = H(He^{(k-2)}) = H^2 e^{(k-2)} = H^3 e^{(k-3)} = \dots = H^k e^{(0)}$$

$$e^{(k)} = H^k e^{(0)}$$

Teorema

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H^k = 0 \iff \rho(H) < 1 \quad \text{condiz. necessaria e sufficiente}$$

se vale il teorema $\Rightarrow e^{(k)} \xrightarrow{\text{tende}} 0$ cioè $x^{(k)} \rightarrow x^*$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^* \iff \rho(H) < 1 \quad \text{condiz. necess. e suff.}$$

$e^{(k)} = H^k e^{(0)}$ $\rightarrow$ devo prendere una norma matriciale indotta

$$\|e^{(k)}\| = \|H^k e^{(0)}\| \leq \|H^k\| \|e^{(0)}\| \leq \|H\|^k \|e^{(0)}\|$$

$$\|e^{(k)}\| \leq \|H\|^k \|e^{(0)}\|$$

se $\|H\| < 1 \rightarrow \|e^{(k)}\| \Rightarrow 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^* \implies \exists \|H\| < 1 \quad \text{condiz. sufficiente}$$

per il Teorema di Hirsch $\rho(H) \leq \|H\|$

se trovo una norma $< 1 \implies$ converge sicuramente

se non la trovo non è detto che non converge

velocità di convergenza

$$\|e^{(k)}\| \leq \|H\|^k \|e^{(0)}\|$$

$$\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} \leq \|H\|^k$$

$$\rho(H) \leq \|H\|$$

$$\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} \approx \rho^k(H)$$

dopo k iterazioni, di quanto si è ridotto $e^{(0)}$?

suppongo che dopo k iterazioni $\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} = 10^{-m}$

$$10^{-m} \approx \rho^k(H)$$

$$-m \approx k \log(\rho(H))$$

$$\frac{m}{k} = -\log(\rho(H))$$

quando $\rho \rightarrow 0$ $\log \rightarrow -\infty$

m cifre significative conquistate in k iterazioni

se m grande $\Leftrightarrow k$ piccolo $\Rightarrow$ velocità grande

$$\frac{m}{k} = -\log(\rho(H)) = V \rightarrow \text{velocità di iterazione}$$

$$A = D - E - F$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix}$$

$$-E = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ d_{21} & & \\ & \ddots & \\ d_{n1} & & d_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

triangolare inf.
in senso stretto

$$-F = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

triangolare sup.

① Metodo Jacobi

$$M = D$$

$$N = (E + F)$$

$$\det(D) \neq 0$$

→ deve avere
tutti gli elementi
sulla diag. $\neq 0$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

sistema iterativo

$$x^{(k+1)} = \underbrace{D^{-1}(E+F)}_{H_J} x^{(k)} + D^{-1}b \quad \text{prendo la } i\text{-esima componente}$$

$$x^{(k+1)} = H_J x^{(k)} + D^{-1}b$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right] \quad i=1,2,\dots,n$$

metodo iterativo di Jacobi

poi

ρ_J è sempre < 1 → posso usare come $x_j^{(k)}$ quelle che ho già calcolato

Metodo di Gauss-Seidel

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right]$$

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} = \left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right]$$

è la i -esima equez. di:

$$Dx^{(k+1)} = Ex^{(k+1)} + Fx^{(k)} + b$$

$$Dx^{(k+1)} - Ex^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b$$

$$(D-E)x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b$$

M

$$M = D - E$$

$$N = F$$

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(D-E)^{-1}F}_{H_{GS}} x^{(k)} + (D-E)^{-1}b$$

$$D-E = \begin{pmatrix} * & & \\ & \ddots & \\ * & & * \end{pmatrix}$$

$\det(D-E) \neq 0$ → deve avere tutti gli
elementi delle diag.
 $\neq 0$

metodi
Convergono $\Leftrightarrow \rho(H) < 1$

Teoremi $\rightarrow$ danno condiz. solo sufficienti

1. se $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| \quad i=1, \dots, n$ (osservo solo A)

A è diagonalmente dominante in senso forte d.d.f.

$\Rightarrow \rho(H_2), \rho(H_5) < 1$ cioè convergono

2. se $|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| \quad i=1, \dots, n$ (no tutti $=$, no tutti $>$)
cioè ci devono essere $>$ e $=$

A è diagonalmente dominante in senso debole d.d.d.

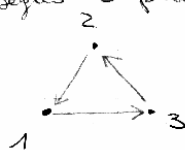
e $G(A)$ fortemente connesso f.c.

$\Rightarrow \rho(H_2), \rho(H_5) < 1$

grafo orientato

Grafo: considero una matrice 3×3 (non 0)
segno 3 punti, li numero arbitrariamente.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

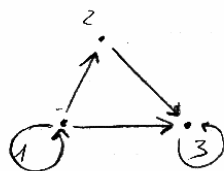


$\leftarrow$ grafo orientato di A

è fortemente connesso se, partendo da un nodo, posso arrivare da un qualunque altro nodo seguendo il cammino

$G(A)$ è f.c.

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$



$G(A)$ non è f.c.

non tutti i nodi sono raggiungibili in qualunque modo

codiagonale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 4 & & \\ & & 4 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

d.d.f. $\rho(H_J), \rho(H_{GS}) < 1$

1-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & & & \\ & & & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

d.d.d.

grafo



saliscia

$G(A)$ è f.c.

$$\rho(H_J), \rho(H_{GS}) < 1$$

metodo di Jacobi

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{2} \left(x_{i-1}^{(k)} + x_{i+1}^{(k)} + b \right) \quad i=1, \dots, n$$

per ogni indice c'è 1 flop $\Rightarrow$ n flop per 1 iterazione.

per K iterazioni $\rightarrow kn$

$$50 \times 10^3 = 5 \cdot 10^4$$

~~metodo~~ Jacobi

10^9 metodo diretto
di Gauss

25/03/06 (2 ore)

$Ax = b$ quadrato non degenerato

$x = Hx + c$

$x^{(0)} \neq 0$ (per es. $x^{(0)} = 0$)

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + c \\ k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^* (= A^{-1}b)$

$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon$ (es. 10^{-14})

$x^* \approx x^{(k+1)}$

$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^* \iff \rho(H) < 1$ condiz. neces. e suff

$\exists \|H\| < 1 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$ condiz. suff. ma non necess.

soluzione $A = D - E - F$

Jacobi

$Ax = b$

$a_{ii}x_i + \dots + a_{in}x_n = b_i$

$a_{ii}x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j + b_i$

$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + b_i \right]$

$x^{(k+1)} = \underbrace{D^{-1}(E+F)}_{H_J} x^{(k)} + \underbrace{D^{-1}b}_c$

$\left. \begin{aligned} &\bullet \text{ se } A \text{ d.d.f. } \rho(H_J) < 1 \\ &\bullet \text{ se } A \text{ d.d.d. + } G(A) \text{ f.c. } \rho(H_J) < 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{convergono}$

Gauss-Seidel

$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + b_i \right]$

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(D-E)^{-1}F}_{H_{Jac}} x^{(k)} + \underbrace{(D-E)^{-1}b}_L$$

Volgarmente i teoremi che valgono per il metodo di Jacobi

Velocità di convergenza

$$V = -\log(p(H)) \quad \text{la vel. aumenta al diminuire di } p(H)$$

In generale Jacobi e Gauss-Seidel si comportano indipendentemente l'uno dall'altro, cioè possono divergere entrambi, convergere entrambi o uno divergere e l'altro convergere.

Per matrici TRIDIAGONALI: Teorema

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & \diagup & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} p(H_{GS}) = p^2(H_J) \\ V_{GS} = 2V_J \end{array} \right\} \text{matrici tridiagonali}$$