

~~Quadrato~~

RISOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE QUADRATO utilizzando l'analisi

$Ax = b$ si può estendere anche al campo dei complessi

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ $\det(A) \neq 0$

$\exists x^* \text{ (unico)} \quad Ax^* = b$

$$x_i^* = \frac{\det(a^{(1)}, \dots, a^{(i-1)}, b, a^{(i+1)}, \dots, a^{(n)})}{\det(A)}$$
 al posto della i-esima colonna metto b (vettore dei termini noti)

$i = 1, \dots, n$

devo calcolare

$\rightarrow n+1$ determinanti

il calcolo di un det. richiede circa $n!$ flops $\rightarrow$ operazioni (moltiplicazioni e divisioni)

quanto costa? = quanto ci mette un calcolatore a calcolare un det?

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$

$\tau \approx 10^{-7} \text{ sec}$ 1 flop

$n=20 \leftarrow$ riduce piccolo

$$T = (20!) \tau = 20! \cdot 10^{-7} \text{ sec} = 2,43 \cdot 10^{13} \cdot 10^{-7} \text{ s} = 2,43 \cdot 10^6 \text{ sec} = 2,05 \cdot 10^9 \text{ min}$$

 $= 64500000 \text{ h} = 2812500 \text{ giorni} = 7705 \text{ anni}$

$\uparrow$ se usiamo la legge di Kramer

METODO DI GAUSS o METODO DELLE ^{sostituzioni} ELIMINAZIONI SUCCESSIVE
trasformiamo il sistema in triangolare attraverso passi
per equivalenze → cioè ha la stessa soluzione.

$$Ax = b \equiv A^{(1)}x = b^{(1)} \rightarrow A^{(2)}x = b^{(2)} \rightarrow A^{(3)}x = b^{(3)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \dots \rightarrow A^{(n)}x = b^{(n)} \equiv Rx = c$$

sistema triangolare superiore

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & r_{nn} \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + \dots + r_{1n}x_n = c_1 \\ r_{22}x_2 + \dots + r_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ r_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

$$x_n = \frac{c_n}{r_{nn}}$$

$$x_i = \frac{c_i - \sum_{j=i+1}^n r_{ij}x_j}{r_{ii}}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

per triangolarizzare un sistema e calcolare le componenti, ci vogliono circa

$$\approx n^3 \text{ flops}$$

$$n=20$$

$$8000 \times 10^{-8} \text{ s} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

Come si triangolarizza un sistema:
partendo da un sistema 3×3

$$Ax = b \equiv A^{(1)}x = b^{(1)}$$

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)}x_1 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)} \end{cases}$$

per equivalenza lo trasformo in $A^{(2)}x = b^{(2)}$

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)} \\ a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 = b_3^{(2)} \end{cases}$$

moltiplico la 1ª per $\left(-\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right)$ e sommo alla 2ª
per $\left(-\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right) + 3ª$

trasformo in $A^{(3)}x = b^{(3)}$ $Rx = c$

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)}x_3 = b_3^{(3)} \end{cases}$$

moltiplico la 2ª per $\left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right) + 3ª$

si parte dal basso e si trova la soluzione

$$l_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}}, \quad i > j, \quad 1 \leq j < i \leq n$$

Risultati

1) si è ottenuto x^* in n^3 flops

2) in pct modo si costruiscono 2 matrici:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & & r_{1n} \\ & \ddots & \\ & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ l_{21} & \ddots & \\ & \ddots & 1 \\ l_{n1} & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{triangolare inferiore}$$

si può dimostrare che

$$A = LR$$

$$3) \det(A) = \det(LR) = \det(L) \det(R) = 1 \cdot (r_{11} \cdot r_{22} \cdot r_{33} \dots r_{nn})$$

↓
1

$$4^{\circ}) \quad AX = I \equiv (Ax^{(1)}, Ax^{(2)}, \dots, Ax^{(n)}) = (e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)})$$

$$A^{-1} \quad e^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow i\text{-esima posizione}$$

$$\begin{cases} Ax^{(1)} = e^{(1)} \\ Ax^{(2)} = e^{(2)} \\ \vdots \\ Ax^{(n)} = e^{(n)} \end{cases} \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{= } n \text{ sistemi lineari} \end{matrix}$$

risolvere $\rightarrow$ ci vogliono $\approx n^3$ flops
per invertire una matrice occorrono $\approx n^3$ flops

$$AX = I \rightarrow RX = C \rightarrow IX = A^{-1}$$

si possono invertire le matrici

$$5^{\circ}) \quad l_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}} \quad i > j$$

che succede se $a_{jj}^{(j)} = 0$? $\rightarrow$ si blocca tutto!

per eliminare ciò, si scambiano tra loro le equaz. in modo che $a_{jj}^{(j)}$ sia sempre $\neq 0$

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + \dots \\ a_{21}^{(2)} x_1 + \dots \\ \vdots \\ a_{n1}^{(n)} x_1 + \dots \end{cases}$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

bisogna che $a_{11}^{(1)} \neq 0$

se $a_{11}^{(1)} = 0$, scambio per es. la 1^a con la 2^a

invece di vedere se sono uguali a zero, si esaminano tutti i moduli e si sceglie quello di modulo max

$$\max_{1 \leq k \leq n} |a_{k1}^{(1)}| = |a_{r_1}^{(1)}|$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} \\ a_{r_1}^{(1)} \end{pmatrix}$$

nel sistema successivo ando ad esaminare tutti gli $a_{k2}^{(2)}$

$$\begin{cases} \text{uguale} \\ a_{12}^{(2)} x_1 + \dots \\ a_{32}^{(2)} x_1 + \dots \\ a_{n2}^{(2)} x_1 + \dots \end{cases} \quad \max_{2 \leq k \leq n} |a_{k2}^{(2)}| = |a_{s2}^{(2)}|$$

faccio le stesse cose

questo metodo riesce a ridurre gli errori

nell'usare questo metodo però dobbiamo tenere presente punti
ricambi abbiamo fatto:

$$\det(A) = (-1)^N r_{11} r_{22} \dots r_{nn} \quad N = \text{n° scambi fatti}$$

22/03/06 (3 ore)

$Ax = b$ sistema lineare quadrato non degenero

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$b \in \mathbb{R}^n$$

$$\det(A) \neq 0$$

$$x^* = A^{-1}b \quad \leftarrow \text{soluzione}$$

metodo di Gauss

$$Ax = b \longrightarrow Rx = c \longrightarrow Ix^* = A^{-1}b \approx n^3 \text{ flops}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = LR \quad \det(A) = \det(LR) = \underbrace{\det(L)}_1 \det(R) = r_{11} r_{22} \dots r_{nn}$$

facendo scambi di equaz.

$$\det(A) = (-1)^N \det(R) \quad N = \text{n° scambi equaz.}$$

$AX = I$ è come risolvere n sistemi lineari.

$$AX = I \xrightarrow{\text{triangolarità del sistema}} RX = C \longrightarrow IX^* = A^{-1} \approx n^3 \text{ flops}$$

quindi per risolvere il sistema NON conviene prima calcolare l'inversa

spesso ci troviamo a dover risolvere sistemi dove cambiano solo b

$$Ax = b^{(k)} \quad k = 1, 2, \dots, M$$

ci procuriamo una fattorizzazione di A
 $A = LR$

$$\underbrace{LR}_Y x = b^{(k)}$$

$$Ly = b^{(k)} \xrightarrow{\text{sistema triangolare}} y^*$$

$$Rx = y^* \xrightarrow{\text{sistema triangolare}} x^*$$

La fattorizzazione di A si fa una volta sola

Inconveniente: gli errori di arrotondamento tendono ad accumularsi
di più procedura

Indice di condizione di una matrice $\rightarrow$ num sempre > 1 che è associato alla matrice

$$\mu(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \rightarrow \text{dipende dal tipo di norma}$$

A è malcondizionata se $\mu(A) > 100 \div 200 \rightarrow$ tende a propagare l'errore di arrotondamento

$$Ax = b \quad \text{supponiamo di perturbare}$$

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

$$\delta A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \delta b \in \mathbb{R}^n \quad \text{errori}$$

Teorema

Scelta una norma, si può definire l'errore relativo sul vettore soluzione

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\mu(A)}{1 - \mu(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

errore relativo della matrice A

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\mu(A)}{1 - \mu(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

$$\mu(A) \geq 1$$

$$1 = \|I\| = \|A A^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| = \mu(A)$$

assumiamo sempre che

$$1 > \frac{\|A\| \|A^{-1}\| \|\delta A\|}{\|A\|} \Rightarrow \|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1$$

se ciò NON accade, la formula non la possiamo applicare

se $\mu(A)$ cresce $\Rightarrow$ il fattore di amplificazione cresce perché $\rightarrow$ aumenta il Num $\rightarrow$ diminuisce il Den

$$A = \begin{pmatrix} 1001 & -1000 \\ -1000 & 1001 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mu_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = 2001 \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0,50025 & 0,49975 \\ 0,49975 & 0,50025 \end{pmatrix} \right\|_1 =$$

per dire che uso la norma 1

$$= 2001 \cdot 1 = 2001$$

supponiamo di perturbare A con δA

$$\delta A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\|\delta A\|_1}{\|A\|_1} = \frac{1}{2001} \approx 0,5 \cdot 10^{-3}$$

risolviamo

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \delta b \text{ non c'è}$$

$$x + \delta x = \begin{pmatrix} 2,001 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1} = 1 \quad \text{errore spaventoso}$$

$$A \quad \lambda$$

$$A^{-1} \quad \frac{1}{\lambda} \quad \lambda \text{ sicuramente diverso da zero perché } \det(A) \neq 0$$

prodotto di tutti λ

$$\left. \begin{array}{l} A \quad \lambda \\ A^{-1} \quad \frac{1}{\lambda} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{simmetrica} \\ A = A^T \\ A^{-1} = (A^{-1})^T \end{array} \quad \begin{array}{l} \rho(A) = \|A\|_2 \\ \rho(A^{-1}) = \|A^{-1}\|_2 \end{array}$$

per matrici simmetriche: $A = A^T$

$$\mu_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \rho(A) \rho(A^{-1}) = |\lambda|_{\max} \frac{1}{|\lambda|_{\min}}$$

una matrice in generale, se ha autovettori ortonormali, è malcondizionata