

Giugno 2002

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

calcolare autovalori e autovettori

① costruire $A - \lambda I$

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & 1-\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Teorema di LAPLACE

si sceglie una riga o una colonna (preferibilmente quella con + zeri)

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha \\ \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - \alpha^2] - \alpha[\alpha(1-\lambda)] =$$

$$= (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 2\alpha^2] = (1-\lambda) \left[(1-\lambda + \sqrt{2}\alpha)(1-\lambda - \sqrt{2}\alpha) \right] = 0$$

fine

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 & \alpha_1 &= 1 \rightarrow \gamma_1 = 1 & \text{autovettori} & \text{per } \alpha \neq 0 \\ \lambda_2 &= 1 - \sqrt{2}\alpha & \alpha_2 &= 1 \rightarrow \gamma_2 = 1 & \text{reali e distinti} & \\ \lambda_3 &= 1 + \sqrt{2}\alpha & \alpha_3 &= 1 \rightarrow \gamma_3 = 1 & & \end{aligned}$$

per $\alpha = 0$
matrice I ha
n autovettori tutti
uguali a 1

mi aspetto di trovare 3 autovettori l.i.

autovettori associati ad autovalori diversi sono fra loro l.i.

$$\lambda_1 = 1$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I) v_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{la 1ª e la 3ª mi dicono che:} \\ &\alpha v_{1y} = 0 \Rightarrow v_{1y} = 0 \\ &\alpha v_{1x} + \alpha v_{1z} = 0 \Rightarrow v_{1x} = -v_{1z} \end{aligned}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

quasi essere richiesto il vettore a norma 1, cioè l'autovettore

$$\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}\alpha$$

$$(A - \lambda_2 I) v_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \sqrt{2}\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & \sqrt{2}\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\alpha v_{2x} + \alpha v_{2y} = 0 \\ \alpha v_{2x} + \sqrt{2}\alpha v_{2y} + \alpha v_{2z} = 0 \\ \alpha v_{2y} + \sqrt{2}\alpha v_{2z} = 0 \end{cases}$$

dalla 1ª e la 3ª trovo che:

$$v_{2x} = v_{2z} \quad \text{lo sostituisco nella seconda}$$

$$v_{2y} = \frac{-2v_{2x}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}v_{2x}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} \mu \\ -\sqrt{2}\mu \\ \mu \end{bmatrix}$$

v_1 e v_2 sono l.i.

$$\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}\alpha$$

$$(A - \lambda_3 I) v_3 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}\alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & -\sqrt{2}\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & -\sqrt{2}\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{3x} \\ v_{3y} \\ v_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} \varphi \\ \sqrt{2}\varphi \\ \varphi \end{bmatrix}$$

per vedere che v_1 , v_2 e v_3 sono l.i., costruisco la matrice che ha come colonne i 3 vettori e vedo se ha rango 3. Se è così, v_1, v_2, v_3 sono l.i.

Esercizio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

togliendo la 1ª riga e l'n-esima colonna ottengo la matrice identica

indichiamo con λ un autovettore

calcoliamo il corrispondente autovettore

$$n \geq 2$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

sviluppo rispetto alla 1ª riga

$$(-1) \cdot \det \begin{matrix} \uparrow \\ \text{matrice triang. sup} \end{matrix} (-1)^{1+n} + \underbrace{(-\lambda)(-\lambda)^{n-1}(-1)^{1+1}}_{(-\lambda)^n}$$

$$(-1)(1)(-1)^{1+n} + (-\lambda)^n$$

$$(-1)^{n+2} + (-\lambda)^n$$

$$(-\lambda)^n + (-1)^{n+2} \begin{cases} n \text{ pari} & \lambda^n + 1 \\ n \text{ dispari} & -\lambda^n - 1 \end{cases}$$

per il nostro problema è lo stesso caso perché

$$\lambda^n + 1 = 0 \quad \text{è equivalente di} \quad -\lambda^n - 1 = 0$$

$$\lambda^n + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^n = -1 \Rightarrow \lambda = \sqrt[n]{-1}$$

$$\lambda_{k+1} = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n} \quad k=0,1,\dots,n-1$$

$$= e^{i \frac{(2k+1)\pi}{n}}$$

~~Altra~~

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \dots & -1 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{cases} -\lambda x_1 - x_n = 0 & \rightarrow x_1 = -\frac{x_n}{\lambda} \\ x_1 - \lambda x_2 = 0 & \rightarrow x_2 = \frac{x_1}{\lambda} = -\frac{x_n}{\lambda^2} \\ x_2 - \lambda x_3 = 0 & \rightarrow x_3 = \frac{x_2}{\lambda} = -\frac{x_n}{\lambda^3} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-1} - \lambda x_n = 0 & \rightarrow x_{n-1} = -\frac{x_n}{\lambda^{n-1}} \\ & \rightarrow x_n = -\frac{x_n}{\lambda^n} \end{cases}$$

← vale solo per $\lambda^n = -1$
che è il mio $P_A(\lambda)$

normalmente ai parametri si danno dei numeri
quindi diamo $x_n = -1$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda^2} \\ \frac{1}{\lambda^3} \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda^{n-1}} \\ \frac{1}{\lambda^n} \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO

$$A_n = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & p & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & p \end{pmatrix}$$

$A_n \in \mathbb{C}^{n \times n}$
 $n \geq 2$

$p \in \mathbb{R}$

A_n non degenera

1. Calcolare per quali valori di p $\det(A_n) \neq 0$

sviluppo rispetto alla 1^a riga

$$\det(A_n) = p \det(A_{n-1}) + (-1)^{n+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & p & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & p \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (-1)^n & p^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= p \det(A_{n-1}) + (-1)^{n+1} p^{n-2} = p \det(A_{n-1}) - p^{n-2} =$$

$\downarrow$
dispari

$$\begin{aligned}
 & p[p \det(A_{n-2}) - p^{n-3}] - p^{n-2} = p^2 \det(A_{n-2}) - p^{n-2} - p^{n-2} = \\
 & = p^2 \det(A_{n-2}) - 2p^{n-2} = p^2 [p \det(A_{n-3}) - p^{n-4}] - 2p^{n-2} = \\
 & = p^3 \det(A_{n-3}) - 3p^{n-2} = \dots = \\
 & = p^{n-2} \det(A_{\overset{n-n-2}{2}}) - (n-2)p^{n-2} = p^{n-2} [\det(A_2) - n+2] = \\
 & \left(A_2 = \begin{pmatrix} p & 1 \\ 1 & p \end{pmatrix} \quad \det(A_2) = p^2 - 1 \right) \quad \downarrow \quad p^2 - 1 \\
 & = p^{n-2} [p^2 - n + 1]
 \end{aligned}$$

$$\det(A_n) = p^{n-2} [p^2 - (n-1)]$$

$$p^{n-2} [p^2 - (n-1)] = 0$$

$$p = \begin{cases} 0 & n-2 \text{ volte} \\ \pm \sqrt{n-1} \end{cases}$$

2. Calcolare gli autovalori di A_n

$$P_{A_n}(\lambda) = \det(A_n - \lambda I) = (p-\lambda)^{n-2} [(p-\lambda)^2 - (n-1)]$$

essendo $A_n - \lambda I$ la matrice A dove sulla diagonale ho $p-\lambda$

$$\lambda_1 = p \quad \alpha_1 = n-2$$

$$\lambda_2 = p + \sqrt{n-1} \quad \alpha_2 = 1$$

$$\lambda_3 = p - \sqrt{n-1} \quad \alpha_3 = 1$$

A_n è reale e simmetrica $\Rightarrow A$ è hermitiana $\Rightarrow \alpha_i = \beta_i$

$$\text{quindi } \alpha_1 = n-2 = \beta_1 \quad \alpha_2 = 1 = \beta_2 \quad \alpha_3 = 1 = \beta_3$$

è diag. per similitudine

3. Calcolare gli autovettori associati all'autovalore di molteplicità massima.

$$\lambda_1 = p \quad \alpha_1 = \beta_1 = n-2$$

$$(A_n - \lambda_1 I)x = 0$$

$$(A_n - pI)x = 0$$

$$A_n - pI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad x^{(n-2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$n-2$ aut. l.i. associati a $\lambda = p$

$$\lambda_1 = p$$

$$\lambda_2 = p + \sqrt{n-1}$$

$$\lambda_3 = p - \sqrt{n-1}$$

$$\Psi_A(\lambda) = (\lambda - p)^{\frac{1}{2}} (\lambda - (p + \sqrt{n-1})) (\lambda - (p - \sqrt{n-1}))$$

$$\Psi_A(A) = 0$$

$$\Psi_A(A) = (A - pI)(A - [p + \sqrt{n-1}]I)(A - [p - \sqrt{n-1}]I) = 0 \quad \text{risale } I \text{ e poi calcolo la matrice } A^{-1}$$