

PROBLEMA AGLI AUTOVALORI (problema pezzoemolo)

Dato una matrice cerchiamo dei vettori tali che, applicata la trasformaz. della matrice, otteniamo dei vettori paralleli a quelli dati.

Cerco, se esistono dei vettori ^{o mi viene} che ~~non vengono trasformati~~ ^{che non vengono trasformati} ~~le direzioni~~ tali che la deformaz. applicata della matrice non varia la loro direz.

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$Ax = \lambda x$ voglio ottenere un vettore λx parallelo a x dopo aver applicato A

$x=0$ è una soluz., ma non è interessante, quindi cercherò sempre vettori del tipo $x \neq 0$

facco passaggio algebrico

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$Ax = \lambda x \Rightarrow Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0$$

è sbagliato perché non ha senso fare una sottrazione tra una matrice e uno scalare perché:

$$\Rightarrow \underbrace{(A - \lambda I)}_B x = 0$$

$$Bx = 0 \quad B \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ perché sottoinsieme di matrici quadrate}$$

$$\boxed{\det(B) = \det(A - \lambda I) = 0}$$

perché se $\det(B) \neq 0 \Rightarrow$ la soluz. è $x = 0$

Se esistono, questi vettori si chiamano **AUTOVETTORI**

λ si chiamano **AUTOVALORI**

$$\boxed{08/03/06 \quad (3 \text{ ore})}$$

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$Ax = \lambda x \Rightarrow Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0$$

$$B = A - \lambda I$$

$$\Rightarrow Bx = 0$$

Se $\det(B) \neq 0 \rightarrow Bx = 0$ ha 1 soluz. : $x = 0$

ma $x = 0$ è una soluzione banale che non interesserà

quindi impongo:

$$\det(B) = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

equazione polinomiale

$\rightarrow \det(A - \lambda I)$ è un polinomio di grado n nella variabile λ



polinomio caratteristico

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \sigma_1 \lambda^{n-1} + \dots + \sigma_{n-1} \lambda + \sigma_n = 0$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA

$\sigma_i \rightarrow$ somma dei det dei minori principali di ordine i estratti da A
matrici che hanno sulla diagonale principale alcuni elementi della diagonale principale di A

TRACCIA

: somma degli elementi che stanno sulle diagonali ~~di~~ delle matrici

$$\sigma_1 = \text{tr}(A)$$

$$\sigma_n = \det(A)$$

proprietà
polinomio caratteristico: per il teorema fondamentale dell'algebra ammette n radici

Teorema di Ruffini

λ_i è soluzione

$$P_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

$$P_A(0) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n = \sigma_n = \det(A)$$

$$\det(A) = 0 \iff \exists \lambda_i = 0$$

autovettore

$\forall \lambda_i$ resta associato un vettore $x^{(i)}$ $\rightarrow$ AUTOVETTORE associato all'autovettore λ_i

$$(A - \lambda_i I) x^{(i)} = 0$$

soluzioni distinte

λ_i è soluzione, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$ $k \leq n$,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ moltiplicatori algebrici

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$$

multiplicità geometrica di λ_i $\rightarrow$ numero di autovettori l.i. associati a λ_i

$$1 \leq f_i \leq \alpha_i \leq n$$

multiplicità
geometrica

multiplicità
algebraica

una volta trovati n autovettori l.i. posso costruire una matrice che applicata al prodotto matriciale ^{alle matrici di partenza}, posso trasformarle in una matrice diagonale

il problema si ha quando $f_i < \alpha_i$ perché perdo autovettori

PROPRIETÀ:

1) x, y autovettori associati ad uno stesso λ

$$\alpha \cdot [Ax = \lambda x] \Rightarrow A(\alpha x) = \lambda(\alpha x)$$

$$\beta [Ay = \lambda y] \Rightarrow A(\beta y) = \lambda(\beta y)$$

$$\underbrace{A(\alpha x) + A(\beta y)}_{\text{somma}} = \lambda(\alpha x) + \lambda(\beta y)$$

$$A(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x + \beta y)$$

una qualunque combinez. lineare di x e y è ancora autovettore di A ^{adesso} associato a λ

2) $Ax = \lambda x$

$$A \cdot Ax = A \lambda x$$

$$A^2 x = \lambda Ax$$

$$A^2 x = \lambda \lambda x$$

$$A^2 x = \lambda^2 x$$

iterando:

$$A^k x = \lambda^k x$$

→ gli autovalori di A^k sono gli autovalori di A elevati alla k , gli autovettori sono gli stessi

3) $A = A^H \Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$

$Ax = \lambda x$

$x^H Ax = x^H \lambda x \Rightarrow x^H Ax = \lambda x^H x \Rightarrow \lambda = \frac{x^H Ax}{x^H x}$
 perché devo premoltiplicare per un vettore ziga
 $\rightarrow$ è un numero reale
 $\rightarrow$ è un numero reale

$\Rightarrow \lambda$ è un numero reale
 matrici simmetriche (sottocaso delle matrici hermitiane)

$(x^H Ax)^H = x^H A^H x = x^H Ax$

il numero il cui complesso coniugato è uguale a se stesso,
 è solo un numero reale

analisi dimensionale

$1 \times m \quad m \times m \quad m \times 1 = 1 \times 1 \leftarrow$ matrice 1×1 è un numero

4) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \neq 0 \quad \forall i$ essendo $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$Ax = \lambda x$

$\frac{A^{-1}Ax}{I x} = \frac{A^{-1}\lambda x}{\lambda A^{-1}x} \Rightarrow Ix = A^{-1}\lambda x \Rightarrow x = \lambda A^{-1}x$
 posso dividere per λ perché $\lambda \neq 0$

$\frac{1}{\lambda} x = A^{-1}x \Rightarrow A^{-1}x = \frac{1}{\lambda} x$

gli autovalori di A^{-1} sono gli inversi di quelli di A
 gli autovettori sono gli stessi

Eti la distribuzione degli autovalori nel piano di Gauss ^(complessi) si chiama SPETTRO delle matrici.

5) TRASLAZIONE DELLO SPETTRO

$Ax = \lambda x$

$Ax + qx = \lambda x + qx$ q è uno scalare

$(A + qI)x = (\lambda + q)x$ se aggiungo sui termini diagonali uno stesso valore q , ottengo autovalori traslati q .

10/03/06 (2 ore)

- 1) Dicesi minore complementare di un elemento a_{ij} un numero M_{ij} tale che sia il det. della matrice di ordine $n-1$ ottenuta dalla matrice di partenza eliminando la i -esima riga e la j -esima colonna

se ho una matrice 4×4 , ogni elemento a_{ij} ha associato un minore complementare di ordine 3 quindi ho 16 minori di ordine 3.

- 2) Si definisce AGGIUNTO DELL'ELEMENTO a_{ij}
 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Dato una matrice A

$\det(A) =$ somma dei prodotti degli elementi di una linea di A per i rispettivi aggiunti. (riga o colonne)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{i3} \cdot A_{i3}$$

ho fissato la riga

la scelta delle righe o delle colonne è arbitraria

metodo "obbligatorio" per calcolare il det. di matrici di ordine > 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ -6 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 17 & -18 \\ 0 & 1 & -4 & 17 \end{bmatrix}$$

se opero delle combinaz. lineari tra righe e colonne, il det non cambia

moltiplico per 6 la 1ª riga e per -3 la 4ª

$$\det(A) = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} + a_{41} A_{41} = a_{11} A_{11} = 1 \cdot A_{11}$$

$$\det A_{11} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & 17 & -18 \\ 1 & -4 & 17 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+1} =$$

$(-1)^2 = 1$

si applica il metodo

$$\det A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 17 & -18 \\ -4 & 17 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -4 & 17 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 17 & -18 \end{vmatrix} = \boxed{616}$$

Calcolo del det di una matrice diagonale

↳ ha tutti gli elementi = 0 tranne quelli sulla diagonale

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = d_1 \cdot \det(\text{matrice di ordine } n-1) = d_1 d_2 \det(\text{matrice di ordine } n-2) = \dots = d_1 d_2 d_3 \dots d_n$$

Matrici triangolari

$$\det \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ x & & \ddots \\ & & & d_n \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{triang.} \\ \text{inferiore} \end{matrix}$$

sviluppo lungo la ~~1~~ 1^a riga

$$\det(A) = d_1 \det(\text{matrice triangolare di ordine } n-1) = d_1 d_2 \det(\text{matrice triang. di ordine } n-2) = \dots = d_1 d_2 d_3 \dots d_n$$

20

20

20

20

20

20

20

20

20

20

20

20

20

20

20

20

20

20

$$B = S^{-1}AS$$

B sia diagonale

si ha che A è diagonalizzabile

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

pre moltiplico e ~~post moltiplico~~ per S

$$S S^{-1} A S = S \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$e^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad e^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cdot [S^{(1)} S^{(2)} S^{(3)} \dots S^{(n)}] = S [\lambda_1 e^{(1)} \lambda_2 e^{(2)} \lambda_3 e^{(3)} \dots \lambda_n e^{(n)}]$$

$$A \cdot S^{(i)} = \lambda_i S^{(i)}$$

1° colonna per 1° colonna

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}\lambda_1 & S_{12}\lambda_2 & S_{13}\lambda_3 \\ S_{21}\lambda_1 & S_{22}\lambda_2 & S_{23}\lambda_3 \\ S_{31}\lambda_1 & S_{32}\lambda_2 & S_{33}\lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$A S^{(1)} = \lambda_1 S^{(1)}$$

$\Rightarrow$ le colonne della matrice S sono autovettori di A

affinché A sia diagonalizzabile, devo costruire una matrice S tale che le sue colonne siano autovettori l.i. di A

perché $\det(S) \neq 0$

se ciò non accade potremmo arrivare al max ad avere forma canonica di

14/03/06 (2 ore)

$$Ax = \lambda x \rightarrow (A - \lambda I)x = 0$$

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$$

$$\lambda \in \mathbb{C}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \sigma_1 \lambda^{n-1} + \dots$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

α m. algebrica n° volte che si presenta come zero di $p_A(\lambda)$

γ m. geometrica $1 \leq \gamma \leq \alpha \leq n$ $\dim(N(A - \lambda I)) + \text{rang}(A - \lambda I) = n$

$$\gamma = n - \text{rang}(A - \lambda I)$$

per definizione $x \in N(A - \lambda I)$

$$B = S^{-1}AS$$

$$S \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$\det(S) \neq 0 \leftarrow \text{alt. zimenti } S^{-1}$$

hanno gli stessi autovettori
con le stesse α e le stesse γ

$$B = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Rightarrow S = X = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \iff \alpha_i = \gamma_i$$

diciamo che A ammette un sistema completo di autovettori l.i.

Una matrice è diagonalizzabile per similitudine $\iff \alpha_i = \gamma_i$

MATRICI NORMALI $\rightarrow$ commutano con la loro coniugata hermitiana

$$AA^H = A^H A$$

proprietà: sono diagonalizzabili per similitudine

$$AA^H = A^H A : \exists U, U^H U = I : U^H A U = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), U = X$$

$$X^H X = \begin{pmatrix} x^{(1)H} \\ \vdots \\ x^{(n)H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)} & \dots & x^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(i)H} x^{(j)} = \delta_{ij}$$

sono ortonormali

$$A = A^H \subset A^H A = A A^H$$

↓
hermo autovetori reali: $\lambda \in \mathbb{R}$

MATRICI HERMITIANE POSITIVE:

$$\forall z \in \mathbb{C}^n, z \neq 0 \quad z^H A z > 0 \iff \lambda > 0$$

POLINOMIO MINIMO

$$\psi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{p_k}$$

$p_1, \dots, p_k \leftarrow$ numeri interi

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \rightarrow$ autovetori distinti
 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$

$$p_i = 1 \iff \alpha_i = \delta_i \quad \leftarrow \text{succede per le matrici normali}$$

$\psi_A(A) = 0$ ci consente a volte di calcolare la matrice inversa

/-----/

raggio spettrale $\rho(A) = \max \{ |\lambda_1|, \dots, |\lambda_n| \}$ max modulo degli autovetori

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normale $AA^H = A^H A$

$$|R_A(z)| \leq \rho(A)$$

$z \in \mathbb{C}^n$

$$R_A(z) = \frac{z^H A z}{\underbrace{z^H z}_{I = UU^H}} = \frac{z^H U D U^H z}{\underbrace{z^H U U^H z}_y}$$

$$(U U^H = I)$$

$$U^H A U = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$A = U D U^H$$

$y = U^H z$ è un vettore

$$y^H = z^H U$$

$$y^H y = \sum_{i=1}^n |y_i|^2$$

$$= \frac{y^H D y}{y^H y} = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \lambda_i}{\underbrace{y^H y}_{\text{numero}}} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{|y_i|^2}{y^H y}}_{w_i} \lambda_i = \quad 0 < w_i \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$= \sum_{i=1}^n w_i \lambda_i$$

non considero il valore ass. perché so che

$w_i > 0$

$$|R_A(z)| = \left| \sum_{i=1}^n w_i \lambda_i \right| \leq \sum_{i=1}^n w_i |\lambda_i| = \sum_{i=1}^n w_i \rho(A)$$

$$|R_A(z)| \leq \rho(A) \underbrace{\sum_{i=1}^n w_i}_1 \Rightarrow |R_A(z)| \leq \rho(A)$$