

24/02/06 (2 ore)

1. febbraio 2006 (esame)

Calcolare i numeri complessi z tali che

$$\begin{cases} \cos \vartheta + i \sin \vartheta = e^{i\vartheta} = \\ = e^{i(\vartheta + 2k\pi)} \end{cases}$$

$$e^z = \frac{e}{2} - i \frac{e\sqrt{3}}{2}, \quad |z| > 12$$

$$e^z = e \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

→ è un numero che ha il modulo unitario, $r=1$

⇒ è del tipo " $\cos \vartheta + i \sin \vartheta$ "

$$\begin{cases} \cos \vartheta = \frac{1}{2} \\ \sin \vartheta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \vartheta = \frac{5}{3}\pi$$

$$e^2 = e\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e e^{i\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)}$$

$$\Rightarrow z = 1 + i\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$|z|^2 = 1 + \left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)^2 > 144 \quad \text{per l'ultima tesi che } k \geq 2$$

$$\Rightarrow z = 1 + i\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right), \quad k \geq 2$$

2. gennaio 2006

$$P(z) = z^3 + 4z^2 + (4+i)z + 3(1+i)$$

Calcolare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (sapendo che) $\alpha = \alpha_1 \in \mathbb{R}$

risolvere $P(z)$ separando "la parte reale"

$$P(z) = \underbrace{z^3 + 4z^2 + 4z + 3}_{R(z)} + i \underbrace{(z + 3)}_{S(z)} \\ = R(z) + iS(z)$$

$$P(\alpha) = 0 \quad \text{id.} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$R(\alpha) + iS(\alpha) = 0 \quad \text{identicamente} \Rightarrow \begin{cases} R(\alpha) = 0 \\ S(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$S(\alpha) = 0 \Rightarrow z + 3 = 0 \Rightarrow z = -3 \quad \alpha = \alpha_1 = -3 \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{verifico che annulli} \\ \text{anche } R(\alpha) \end{array}$$

$$\alpha = \alpha_1 = -3 \quad \text{è soluzione}$$

fattorizzo il polinomio ~~data~~ mettendo in evidenza $(z+3)$

	1	4	4+i	3(1+i)
-3		-3	-3	-3(1+i)
	1	1	1+i	<u>0</u>

$$P(z) = (z+3)(z^2 + z + 1+i)$$

$$\alpha_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(1+i)}}{2} = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{-3+i4} \right)$$

$$\alpha_1 = -3$$

$$\alpha_2 = \frac{-1 - \sqrt{-3-i4}}{2}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{-3-i4} \right)$$

debiamo calcolare le radici quadrate

$$\sqrt{-3-i4}$$

$$z = -3-i4$$

$$|z| = \sqrt{9+16} = 5$$

$$z = 5 \left(-\frac{3}{5} - i\frac{4}{5} \right)$$

$$\sqrt{-3-i4} = a+ib$$

$$-3-i4 = a^2 - b^2 + 2iab$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{2}{b}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{b^2} - b^2 = -3 \\ a = -\frac{2}{b} \end{cases} \Rightarrow 4 - b^4 = -3b^2$$

$$\begin{cases} b^4 + 3b^2 - 4 = 0 \\ a = -\frac{2}{b} \end{cases} \Rightarrow b^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \text{ N.A.} \end{cases}$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} b = \pm 2 \\ a = -\frac{2}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \pm 2 \\ a = \mp 1 \end{cases}$$

essendo $ab = -2$ devo prendere a e b discordi

$$\sqrt{-3-i4} = a+ib = \pm (1-i2)$$

✓ passo primo con

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}(-1 - 1 + i2) = -1 + i$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}(-1 + 1 - i2) = -i$$

H