

$$A \in \mathbb{C}^{m \times k}$$

$$B \in \mathbb{C}^{k \times n}$$

è possibile definire un prodotto tra matrici?
 sì, ma non si può fare tra matrici
 dello stesso spazio vettoriale

Prodotto righe per colonne : AB

$$(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} b_{lj} \quad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n \quad A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

↑
 elementi
 delle i -esime righe
 di A

↑
 elementi
 delle j -esime colonne
 di B

$${}_m A_k \quad {}_k B_n = {}_m C_n \quad \leftarrow \text{per vedere se si può fare}$$

$${}_k B_1 = {}_k b_1$$

$$Ab = {}_m A_k \quad {}_k b_1 = {}_m c_1$$

$$c_i = \sum_{\ell=1}^k a_{i\ell} b_{\ell} \quad 1 \leq i \leq m$$

$${}_1 A_k \quad {}_k B_n$$

$${}_1 A_k = (a^T)$$

$$a^T A = {}_1 C_n$$

$${}_1 A_k \quad {}_k B_n = c$$

i vettori colonne se li traspongo diventano righe

$$a^T b = \sum_{\ell=1}^k a_{\ell} b_{\ell}$$

$$a^* b = \sum_{\ell=1}^k \bar{a}_{\ell} b_{\ell} = \langle a, b \rangle \quad \text{in } \mathbb{C}^k$$

$$A \in \mathbb{C}^{m \times k}$$

$$B \in \mathbb{C}^{k \times n}$$

$${}_m A_k \quad {}_k B_n = {}_m C_n$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (b_1, \dots, b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \dots & a_m b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

$$= a b^T$$

Prodotto esterno

$$a b^* = \begin{pmatrix} a_1 \bar{b}_1 & a_1 \bar{b}_2 & \dots & a_1 \bar{b}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m \bar{b}_1 & a_m \bar{b}_2 & \dots & a_m \bar{b}_n \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathbb{C}^{m \times k} \quad B \in \mathbb{C}^{k \times n}$$

$$B = (b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(n)})$$

ogni vettore $b^{(i)}$ è un vettore colonna che ha k righe

$$AB = (Ab^{(1)}, Ab^{(2)}, \dots, Ab^{(n)})$$

$$A = \begin{pmatrix} a^{(1)T} \\ a^{(2)T} \\ \vdots \\ a^{(m)T} \end{pmatrix}$$

ogni vettore $a^{(i)T}$ è un vettore riga con k colonne

$$AB = \begin{pmatrix} a^{(1)T} B \\ a^{(2)T} B \\ \vdots \\ a^{(m)T} B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(1)T} b^{(1)} & \dots & a^{(1)T} b^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ a^{(m)T} b^{(1)} & \dots & a^{(m)T} b^{(n)} \end{pmatrix}$$

altro modo di vedere i prodotti tra due matrici:

$${}_m A_{k \times 1} b =$$

se noi pensiamo ${}_m A_k$ organizzata per colonne:

$${}_m A_{k \times 1} b = (a^{(1)}, \dots, a^{(k)}) b = a^{(1)} b_1 + a^{(2)} b_2 + \dots + a^{(k)} b_k$$

$\mathbb{C}^{n \times n}$ matrici quadrate

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

matrice identica

ha tutti zeri tranne sulla diagonale che ha tutti 1

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$A I_n = A$$

$$I_n A = A$$

$$I_n a = a$$

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$A \text{ è ortogonale se } A^T A = I$$

$$\text{es. } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$A \text{ è unitario se } A^H A = I$$

$$\text{es. } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

03/03/06 (2 ore)

$$\text{In generale } AB \neq BA$$

il prodotto di due matrici non è commutativo

$${}_3 A_2 {}_2 B_4$$

$$\cancel{{}_2 B_4 {}_3 A_2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

in questo caso BA si può fare, ma è diverso

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{prima riga} \cdot \text{prima colonna} & \text{prima riga} \cdot \text{seconda colonna} \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Vale invece la proprietà associativa

• $(AB)C = A(BC)$ sempre se c'è compatibilità degli indici

Regola della trasposizione (vale anche per la coniugazione hermitiana)

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$${}_m A_k \quad {}_k B_n = {}_m C_n$$

$$(AB)^T = B^T A^T = {}_n B_k \quad {}_k A_m = {}_n C_m = C^T$$

$$(AB \text{ --- } Z)^T = Z^T \text{ --- } B^T A^T$$

$\alpha AB = A\alpha B = AB\alpha$

$$x, y \in \mathbb{C}^n$$

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$x^H A y$$

$$\underbrace{x^H}_1 \underbrace{A}_n \underbrace{y}_1 = c_1 \in \mathbb{C} \quad \begin{array}{l} \text{in generale} \\ \text{è un numero complesso} \end{array}$$

$$x^H A x \in \mathbb{C}$$

$$\text{se } A = A^H \quad x^H A x \in \mathbb{R}$$

$$(AB)^H = B^H A^H$$

voglio dimostrare che è un numero reale, quindi, dico che in generale è complesso, lo coniugo:

$$\overline{x^H A x} = (x^H A x)^H = x^H A^H x = \overline{x^H A x} \quad \text{essendo } A = A^H$$

↑
applico la regola della trasposizione

essendo un numero che coniugato è uguale a se stesso, esso è un numero reale.

Determinante: numeri associati a matrici quadrate

numero che si calcola ricorsivamente

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$n=1 \quad A = a_{11} \quad \det(A) = a_{11}$$

guardare sul libro

$$n=2 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \text{cancello } i\text{-esima riga e } j\text{-esima colonna} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = a_{11} \det(A_{11}) - a_{21} \det(A_{21})$$

cancello 1° riga e 1° colonna

cancello 2° riga e 1° colonna

sono det. di ordine 1

$$n=n \quad \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})$$

è sviluppato per la 1° colonna, ma è uguale se lo facciamo per una qualunque colonna

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

vale anche se lo sviluppo per una qualunque riga

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Teorema

$$\exists A^{-1} : AA^{-1} = A^{-1}A = I \iff \det(A) \neq 0 \quad A^{-1} \text{ matrice inversa di } A$$

$$\text{Es: } A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

si verifica che

$$A^{-1} = \frac{1}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$$

Teorema di (Binet - Cauchy)

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

$$\det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$$

$$\det(I) = \det(AA^{-1}) = 1 \rightarrow \det(A) \det(A^{-1}) = 1$$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

matrice triangolare superiore: sotto la diagonale principale ha tutti zeri

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

matrice triangolare inferiore

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow a_{ii} \neq 0 \quad \leftarrow \text{vale solo per matrici triangolari}$$

$$\det(a^{(1)}, \dots, a^{(k)}, \dots, a^{(k)}, \dots, a^{(n)}) = -\det(a^{(1)}, \dots, a^{(k)}, \dots, a^{(k)}, \dots, a^{(n)})$$

se scambiavo fra loro due colonne, il det. cambia segno

$$\det(a^{(1)}, \dots, \alpha a^{(k)}, \dots, a^{(n)}) = \alpha \det(a^{(1)}, \dots, a^{(k)}, \dots, a^{(n)})$$

se una matrice ha una colonna con tutti zeri, ha il det = 0

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

$$\det(a^{(1)}, \dots, a^{(k)} + \alpha a^{(l)}, \dots, a^{(l)}, \dots, a^{(n)}) = \det(a^{(1)}, \dots, a^{(k)}, \dots, a^{(l)}, \dots, a^{(n)})$$

combinazione lineare di due colonne

se trovo che:

$$a^{(k)} + \alpha a^{(l)} = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$$

le colonne sono linearmente dipendenti $a^{(k)} = -\alpha a^{(l)}$

$$a^{(k)} + \alpha a^{(l)} + \beta a^{(k)} = 0$$

matrici che hanno colonne l. d. hanno $\det = 0$

Rango $\rightarrow$ num. intero

La definizione di rango non necessita che la matrice sia quadrata, ma è legata al $\det$.

$$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

$$A_{(m-k) \times (n-k)} \in \mathbb{C}^{k \times k}$$

tagli $m-k$ righe e tagli $n-k$ colonne

$\rightarrow$ minore di ordine k estratto da A

$\text{rango}(A) =$ ordine massimo dei minori non degeneri

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(A) \leq 2$$

basta trovare un ~~ore~~ minore di ordine 2 non degeneri, per dire che $\text{rango}(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rango}(A) \leq 2$$

l'unico minore di ordine 2 non degeneri è $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, posso dire che $\text{rango}(A) = 2$

perché ne ho trovato almeno uno

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

non trovo minori di ordine 2 non degeneri.

prendo quelli di ordine 1

$$\text{rang}(A) = 1$$

poiché la prima riga è proporzionale alla 2^a, tutti i minori di ordine 2 hanno $\det = 0$

$$\text{rang}(0) = 0$$

$$\det(A) = \det(A^T) \quad \leftarrow \text{per matrici quadrate}$$

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$$

$$\det(A'') = \det(\overline{A^T}) = \det(A^T) = \det(A) \quad \leftarrow \text{essendoci nel det solo operazioni aritmetiche algebriche}$$

$$\text{rang}(A'') = \text{rang}(A)$$

$$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

$$b \in \mathbb{C}^m$$

ad A gli aggiungo b

$$A|b$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

$$\text{rang}(A|b) \geq \text{rang}(A) \quad \text{perché aumenta il numero delle colonne,}$$

$$\text{e } m > n \quad \text{e } \text{rang}(A) = n \quad \left(\begin{array}{l} \text{matrice ha} \\ \text{rang} \\ \text{massimo} \end{array} \right)$$

$$\text{rang}(A|b) = \text{può aumentare}$$

se b è una combinazione lineare delle colonne di A il rang non può aumentare perché le matrici che comprendono le colonne di b, hanno $\det = 0 \Rightarrow \text{rang}(A|b) = n$

Scaricato da www.ingonline.biz – la pubblicazione su altri siti è vietata. Ciascuna copia cartacea deve essere realizzata a fronte di un download.

Teorema

$$\text{rango}(A) = \text{n}^\circ \text{ righe di } A \text{ l.i.} = \text{n}^\circ \text{ colonne di } A \text{ l.i.}$$