

SPAZIO VETTORIALE

V è un insieme di oggetti all'interno del quale sono definite due operazioni

+ somma (fra oggetti di V)

• prodotto di uno scalare per un oggetto di V ← importante

(in generale non è dato il prodotto tra due oggetti di V)
 queste operazioni devono chiudere V , cioè "il risultato" deve appartenere a V .

$$u, v \in V \Rightarrow u + v \in V$$

$$\alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha u \in V$$

Devono soddisfare 8 proprietà

proprietà della somma

$$1. u + v = v + u \quad u, v \in V$$

$$2. (u + v) + z = u + (v + z) \quad , z \in V$$

$$3. \exists 0 \in V : u + 0 = 0 + u = u$$

↑
 elemento nullo per la somma

non deve necessariamente essere il numero zero

$$4. \forall u \in V, \exists (-u) \in V : u + (-u) = 0$$

proprietà prodotto

$$5. \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$6. \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

$$7. (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$$

$$8. 1 \cdot u = u$$

$$0 \cdot u = 0$$

↑
 numero
 uno

↑
 numero
 zero

↑
 elemento
 nullo

(è un vettore perché è un elemento di V)

Spazio
 vettoriale
 su $\mathbb{C}$

(se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
 è uno spazio
 vettoriale su
 $\mathbb{R}$)

- $\mathbb{C}$ è uno s.v. su $\mathbb{C}$ $\leftarrow$ i numeri complessi sono uno s.v.
↑ spazio vettoriale

- $\Pi_n = \{ p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \mid a_i \in \mathbb{C} \}$

L'insieme dei polinomi $p(z)$ è uno s.v. su $\mathbb{C}$

$0 = 0z^n + 0z^{n-1} + \dots + 0$
↑ elemento nullo ↑ numero zero

- $F = \{ f(x) : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \in C^0[a, b] \}$ su $\mathbb{R}$

$\alpha f(x) = (\alpha f)(x)$

- $f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

Spazio vettoriale di matrici a elementi complessi

Matrice $\rightarrow$ si indice con lettere maiuscole

$\hookrightarrow$ tabelle di numeri con m righe
 n colonne

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $a_{ij} \in \mathbb{C} \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

Le matrici vivono entro uno spazio vettoriale

matrici $\in \mathbb{C}^{m \times n}$

se $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$

$C = A + B \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \leftarrow$ somma

$a_{ij} = (A)_{ij}$

$b_{ij} = (B)_{ij}$

$c_{ij} = (C)_{ij}$

$$\alpha \in \mathbb{C}$$

$$\alpha A \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij} \quad \leftarrow \text{prodotto} \quad \text{moltiplica tutti gli elementi di } A \text{ per } \alpha$$

$$A = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

↑
elementi nulli

opposta A:

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{cambio di segno tutti gli elementi di } A$$

$$A + (-A) = O$$

$$\text{se } m=n \Rightarrow A \text{ è quadrata}$$

Trasposizione o co

$$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

matrice trasposta di A

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{si ottiene scambiando le righe con le colonne}$$

$$A^T \in \mathbb{C}^{n \times m} \quad \leftarrow \text{non in uno spazio vettoriale diverso da quello di } A$$

se la matrice è quadrata:

$$A, A^T \in \mathbb{C}^{m \times m}$$

$$\text{se } a_{ij} \in \mathbb{R} \rightarrow A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

↑ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

V s.v. qualunque

Prodotto scalare

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

$$u, v \in V \quad \langle u, v \rangle \in \mathbb{C}$$

$$1. \langle u, u \rangle \in \mathbb{R}, \quad \langle u, u \rangle \geq 0, \quad \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u \text{ è l'elemento nullo di } V$$

$$2. \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

$$3. \langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$$

$$\alpha \in \mathbb{C}$$

se li coniugo entrambi
posso scrivere

$$\left[\langle \alpha v, u \rangle = \overline{\alpha} \langle v, u \rangle \right]$$

se lo scalare moltiplica il primo
termine, posso uscirlo dal prodotto
"segnaletico"

$$4. \langle u, v+z \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, z \rangle \quad \text{proprietà di linearità del prodotto scalare}$$

$$\left[\langle v+z, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle z, u \rangle \right]$$

$$\langle u+v, z+w \rangle = \langle u, z \rangle + \langle u, w \rangle + \langle v, z \rangle + \langle v, w \rangle$$

proprietà di linearità completa

Pancharna come s.v.

$$F = \left\{ f(x) : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) \in C^0[a, b] \right\} \quad \text{qui è possibile definire un prodotto scalare}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx$$

$$\begin{cases} p(x) \in F \\ p(x) > 0 \end{cases} \quad p, f, g \in F$$

↙ non può mai essere ident. nullo

Pseudoprodotto s.v.

$$V = \mathbb{C}^m$$

$$u, v \in \mathbb{C}^m$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

definiamo

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^m \bar{u}_k v_k = u^H v$$

u^H oppure $\bar{u}^T$

$$\bar{u}^H = \bar{u}^T$$

25/02/06 (2 ore)

$$V \quad u, v \in V$$

$$\langle u, v \rangle \in \mathbb{C}$$

$$1. \langle u, u \rangle \geq 0, \quad \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$2. \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

$$3. \langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$4. \langle u, v + z \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, z \rangle$$

es: di prodotto scalare su F

$$F = \left\{ f(x) : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \in C^0[a, b] \right\} \quad \text{s.v. su } \mathbb{R}$$

$$f, g, p \in F, \quad p(x) \geq 0 \quad \xrightarrow{\text{funzione peso}}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx$$

in $\mathbb{C}^n$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^n \bar{u}_k v_k$$

$$\begin{array}{c} \text{vettore nullo} \quad \text{numero zero} \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \langle u, 0 \rangle = \langle u, 0 \cdot v \rangle = 0 \langle u, v \rangle = 0 \end{array} \quad \forall u \in V$$

$\langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u \in V \Rightarrow v = 0 \leftarrow \text{vettore nullo}$
 se trovo che il prodotto ~~sc~~ scalare viene zero, $\forall u \in V$, segue
 che il secondo termine v è il vettore nullo

Consideriamo lo s.v. dei polinomi algebrici a coeff. reali
 (di grado al più n)

$$\Pi_n = \left\{ p(t) \mid p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

bisogna far vedere che $\langle p, q \rangle$ è un prodotto scalare "cioè"

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^n p(k)q(k) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + \dots + p(n)q(n) \in \mathbb{R}$$

verifico la prima proprietà
 devo far vedere che:

$$\langle p, p \rangle = p(0)^2 + p(1)^2 + \dots + p(n)^2 \geq 0$$

che è ≥ 0 è sicuro perché somma di quadrati

devo far vedere che è $= 0 \Leftrightarrow p = 0$

se prendo come

Disuguaglianza di Cauchy - Schwarz

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

$$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle \geq 0 \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{per definizione}$$

$$0 \leq \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

essendo λ arbitrario scelgo

$$\lambda = - \frac{\langle v, u \rangle}{\langle v, v \rangle}$$

considero $v \neq 0$

$\leftarrow$ sviluppare con la 2^a proprietà

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad n \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \quad \leftarrow \text{dimostrare}$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k = \sum_{k=1}^n x_k y_k \quad \text{perché } x \in \mathbb{R} \Rightarrow x_k = \bar{x}_k$$

come scrivere la disuguaglianza di C-S in $\mathbb{R}$

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n y_k^2$$

non serve mettere il modulo / / perché è un numero reale
per ricondurre a $\Rightarrow$ scelgo

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot n$$

Dipendenza lineare fra vettori

$V \ni v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ espressioni $\leftarrow$ prendiamo k vettori di V

facciamo una comb. lineare

$$\alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \dots + \alpha_k v^{(k)} \in V \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$$

se constatato che

$$\alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \dots + \alpha_k v^{(k)} = 0 \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \text{ non tutti nulli}$$

$$\Rightarrow \left\{ v^{(i)} \right\}_{i=1}^k \text{ sono linearmente dipendenti}$$

$$V = \mathbb{C}^3$$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot v^{(1)} + \frac{1}{2} v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow v^{(1)}$ e $v^{(2)}$ sono l.d. $\rightarrow$ linearmente dipendenti

Se $\alpha_1 v^{(1)} + \dots + \alpha_k v^{(k)} \neq 0 \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \Rightarrow$ linearmente indipendenti

se $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ sono l.i.

$$\Rightarrow \alpha_1 v^{(1)} + \dots + \alpha_k v^{(k)} = 0 \quad \text{solo se} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

esempio

$$V = \mathbb{C}^3$$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \alpha_3 v^{(3)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$$

$\nearrow$ può essere il vettore nullo
solo se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$\Rightarrow v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ sono l.i.

Sottospazio vettoriale

W è un sottospazio vettoriale di V se

- $W \subseteq V$
- W è uno spazio vettoriale

esempio

• $V = \mathbb{C}^{n \times n}$

• $W \subseteq V, A \in W: A = A^T$ Verifichiamo di tutte le matrici simmetriche se si dice che W è un sottospazio vettoriale

la 1^a prop. è verificata

devo verificare che W sia uno spazio vettoriale

essendo gli elementi di W appartenenti a V , le 8 proprietà sono quasi tutte verificate

• $\exists A = 0 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è verificato che c'è l'elemento nullo

• $A, B \in W \quad A+B \in W$ verifico che se sommo due elementi di W trovo un altro elemento di W

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+e \\ b+e & c+f \end{pmatrix}$$

• $\alpha A \in W$

$(\alpha A)^T$ si verifica che ottengo un'altra matrice simmetrica

• $(\alpha A)^T = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha b & \alpha c \end{pmatrix}$ che è simmetrica

vediamo un caso in cui W non è un sottospazio vettoriale

• $V = \mathbb{C}^{n \times n}$

$W \subseteq V, A \in W, A = A^H$ $\leftarrow$ W contiene le matrici hermitiane

• $\exists 0?$ sì $0^H = 0$

• verifico che

$B = B^H, (A+B)^H = A+B$ si verifica

$$\bullet \alpha A \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\alpha A \in W?$$

$$(\alpha A)^H = \bar{\alpha} A^H = \bar{\alpha} A \neq \alpha A \Rightarrow \alpha A \text{ non è hermitiana}$$

$$\Rightarrow \text{NON È S.V. di } V$$

$$W: A = A^T \quad W \text{ è un s.s.v. di } \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$W = \{0\} \quad \text{è s.s.v. di } V \quad \left(\text{non è l'insieme vuoto, perché un elemento c'è, ed è l'elemento nullo} \right)$$

un insieme vettoriale ha sempre almeno un elemento

$$W = \left\{ w \in V \mid w = \alpha_1 v^{(1)} + \dots + \alpha_k v^{(k)}, v^{(i)} \in V, \alpha_i \in \mathbb{C} \right\} \text{ è un s.s.v. di } V$$

1. vedere se c'è l'elemento nullo
2. vedere se la somma dei fa rimanere in W
3. " " moltiplicando per $\alpha \in \mathbb{C}$ sto ancora in W

si dice che:

$$W \text{ è generato da } v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)}$$

28/02/06 (202)

Base di un sottospazio vettoriale

perché vale anche per gli spazi

V s.v.

$$W = \left\{ w \in V \mid w = \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \dots + \alpha_k v^{(k)}, v^{(i)} \in V \right\}$$

$$\left\{ v^{(i)} \right\}_{i=1}^{i=k} \in V$$

Se $v^{(i)}, i=1, \dots, k$ sono l.i.

$\left\{ v^{(i)} \right\}_{i=1}^{i=k}$ sono una base per W

$$\forall w \in W, w = \sum_{i=1}^k \alpha_i v^{(i)}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_k$ coordinate di w rispetto alla base
 $B = (v^{(1)}, \dots, v^{(k)})$

$$w = \alpha_1 v^{(1)} + \dots + \alpha_k v^{(k)}$$

$$w = \beta_1 v^{(1)} + \dots + \beta_k v^{(k)}$$

supponiamo di esprimere w con una altra combinat. lineare degli stessi vettori

se facciamo differenza ho

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1) v^{(1)} + \dots + (\alpha_k - \beta_k) v^{(k)} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i - \beta_i = 0 \quad i=1, \dots, k$$

perché sono linearmente indip.

$$\alpha_i = \beta_i$$

• $\forall$ s.s.v. ha almeno una base

• B e B' sono due basi di W

$$B = (v^{(1)}, \dots, v^{(k)})$$

$$B' = (v'^{(1)}, \dots, v'^{(l)})$$

$\Rightarrow k = l$ ← cioè due basi dello stesso insieme hanno lo stesso numero di vettori

• $\forall$ insieme di k vettori l.i. di W sono una base per W

Eccezione:

$$W = \{0\} \quad \leftarrow \text{non ha base}$$

$$k = \dim(W) \quad \leftarrow \text{dimensione di } W$$

$$\dim(\{0\}) = 0$$

Esempi:

$$V = \mathbb{C}^n \quad \dim(\mathbb{C}^n) = n$$

$$v \in \begin{pmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

in totale questi vettori sono n

$$v = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

← generico vettore di $\mathbb{C}^n$

gli elementi della base sono l.i., infatti, se impongo che v sia il vett. nullo
ho che da' equazione $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

$$\dim(C^n) = n$$

$$\Pi_n = \left\{ p(x) \mid p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, a_i \in C \right\}$$

$$B = \left(\underbrace{1, x, x^2, \dots, x^n}_{n+1} \right) \quad \text{base di Hilbert}$$

$$p(x) = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n \quad \text{combinat. lineare degli elementi di } B$$

è un generico polinomio di grado $n \Rightarrow$ quei vettori generano un elemento di Π_n

$$p(x) = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n$$

$$\Downarrow \quad \alpha_0 = 0 \quad \alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 0 \quad \dots \quad \alpha_n = 0 \quad \Rightarrow \text{sono l.i.}$$

$$\dim(\Pi_n) = n+1$$

$$C^{m \times n}$$

base possibile deve avere : elementi di $C^{m \times n}$

devono essere linear. ind.

$\forall$ elemento di $C^{m \times n}$ deve potersi esprimere come combinat. lineare di

$$E^{(11)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$E^{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$E^{(mn)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$m \times n$

$$\alpha_1 E^{(11)} + \alpha_2 E^{(12)} + \dots + \alpha_N E^{(nn)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \alpha_N \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{generica matrice} \\ \text{di } m \text{ righe e } n \text{ colonne} \end{array}$$

$N = m \cdot n$

data la matrice nulla se $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 0 \rightarrow$ sono linearmente i.

$$\dim(C^{m \times n}) = m \cdot n$$

$$(E^{ij})_{jk} = \delta_{ij} \delta_{jk} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$C^{n \times n} \quad S \subseteq C^{n \times n}, \quad A \in S \text{ e } A = A^T \quad \text{matrici simmetriche}$$

prendiamo $n=3$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_3 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_6 = 0 \rightarrow \text{b.i.}$$

$$\dim(S^{3 \times 3}) = 6$$

nel caso generico $n \times n$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & * \end{pmatrix}$$

n

matrici triangolari superiori

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\dim(S^{n \times n}) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

01/03/06 (3 ore)

V s.v.

S, T s.s.v. di V

definiamo
 $\hookrightarrow$ s.s.v. somma $S+T = \{v \in V \mid v = s+t, s \in S, t \in T\}$

Verifico che è un s.s.v. e vedo che la somma non ci fa
 $v = s+t$ $s, s' \in S$ notizia da $S+T$
 $v' = s'+t'$ $t, t' \in T$

$$\underline{v+v' = \underbrace{s+s'}_{\sigma} + \underbrace{t+t'}_{\tau} = \sigma + \tau}$$

la stessa si verifica per il prodotto per uno scalare

$$S+T = \{v \in V \mid v \in S \text{ e } v \in T\} \text{ è un s.s.v.}$$

$$S \cup T = \{v \in V \mid v \in S \text{ oppure } v \in T\} \text{ NON è un s.s.v.}$$

~~te~~ dimostro $\rightarrow$ cerco un controesempio

$$V \cong \mathbb{C}^3 \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix} \text{ possono essere anche degli zeri}$$

$$S \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix}$$

$$T \equiv \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S \cup T \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

prendo

$$v \equiv \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ * \end{pmatrix} \in S \in SUT$$

$$v' \equiv \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in T \in SUT$$

$$v + v' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ * \end{pmatrix} \notin SUT$$

$\dim(S+T)$

Formula di Grassmann

$$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

Caso particolare che si può verificare

$$S \cap T = \{0\} \quad \dim(S \cap T) = \dim(\{0\}) = 0$$

$$\dim(S \oplus T) = \dim(S) + \dim(T) \quad \text{somma diretta} \quad S \oplus T$$

$$S \cap T = \{0\}$$

$$v \in S \oplus T \Rightarrow v = s + t \quad \text{in un modo solo}$$

s e t sono univocamente determinati

per assurdo
supponiamo che

$$v = s + t$$

$$v = s' + t'$$

$$0 = s - s' + t - t' \quad \text{faccio la differenza}$$

$$s' - s = t - t'$$

$$s' - s \in S$$

$$s' - s \in T \quad \text{poiché}$$

$$\text{ma } S \cap T = \{0\}$$

quindi

$$s - s' = 0$$

$$s = s' + 0 \Rightarrow s = s'$$

con lo stesso ragionamento trovo che $t=t'$

V W s.s.v. di V $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su V

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0, w \in W\} \quad \text{s.s.v. ortogonale a } W$$

$$W \cap W^\perp = \{0\}$$

$$v \in W \cap W^\perp \quad \langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$$

$$W \oplus W^\perp \quad \text{somma diretta}$$

$$\dim(W \oplus W^\perp) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$$

Teorema:

$$\dim(W \oplus W^\perp) = \dim(V)$$

$$W \oplus W^\perp = V$$