

I numeri complessi

21/02/06 (2 ore)

✓ Campo: C insieme di oggetti su cui sono definite due operazioni
+ "somma"
può anche $\rightarrow$ $\cdot$ "prodotto"
essere omissa

se applico pst operaz ad elementi d pst insieme devo ottenere
altri elementi dello stesso insieme

PROPRIETÀ

1. $a+b = b+a$, $a, b \in C$ propr. commutativa
2. $a+(b+c) = (a+b)+c$ $c \in C$ propr. associativa
3. $\exists a_0: a+a_0 = a_0+a = a$ sommato a un qualunque elemento
lo lascia tale e quale
 $\forall a \in C$

a_0 elemento nullo o neutro per la somma

4. $\forall a \in C, \exists a_-: a+a_- = a_-+a = a_0$

a_- opposto di a

5. $ab = ba$

6. $a(bc) = (ab)c$

7. $a(b+c) = ab+ac$ propr. distributiva del prodotto
sulla somma

8. $\exists u \in C: au = ua = a \quad \forall a \in C$

u elemento neutro per il prodotto

9. $\forall a \in C, \exists a^{-1}: aa^{-1} = a^{-1}a = u, \quad a \neq a_0$
 a^{-1} inverso di a

Un insieme che gode di pst propr. è un campo

es.

I numeri reali

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_- = -a \\ u = 1 \\ a^{-1} = \frac{1}{a} \end{cases}$$

I numeri complessi sono un ampliamento del campo dei numeri reali.

$$x^2 - 1 = 0$$

$$\alpha_1 = 1$$

$$\alpha_2 = -1$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$\alpha_1 = \sqrt{-1}$$

$$\alpha_2 = -\sqrt{-1}$$

erano accettati come dei numeri

I numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta
osserv. di partenza



$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha u = \alpha$$

$$\alpha > 0$$

$$\vec{OP} = \alpha$$

$$\alpha = 0 \quad p = 0$$

$$\alpha < 0$$

prendo una retta, fisso:

- un punto che chiamo Origine

- un verso di percorrenza

- un segmento che chiamo unità di misura

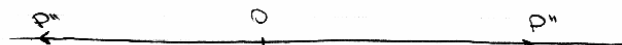
Dato che $\mathbb{R}$ è una corrisp. biunivoca tra i num. reali e i punti di una retta, si può sviluppare un'aritmetica dei segm. orientati

$$\vec{OP} + \vec{OP'} = \vec{OP''}$$

$$a + a' = a''$$

$$|\vec{OP}| = |\alpha|$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{OP'} = \vec{OP''}$$

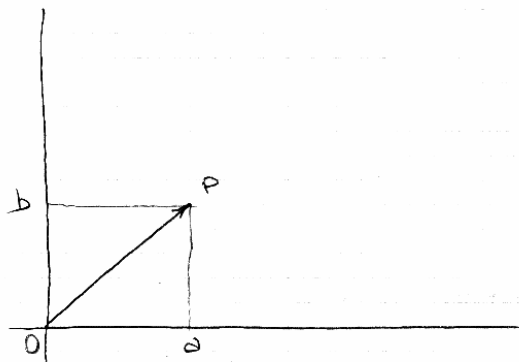


$$|\vec{OP''}| = |\vec{OP}| |\vec{OP'}|$$

se $\vec{OP}$ e $\vec{OP'}$ sono della stessa parte

Chiamiamo numeri complessi: quelli che sono in corrispondenza biunivoca con i punti del piano.

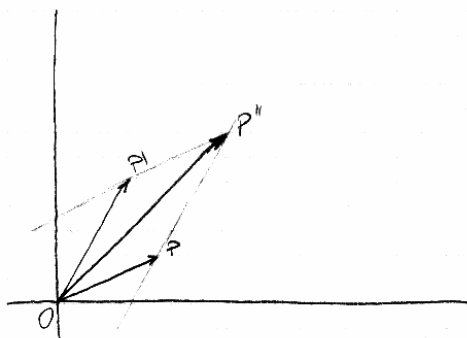
P è individuato univocamente dalle sue coordinate (una coppia di numeri reali)



$$\vec{OP} \equiv (a, b)$$

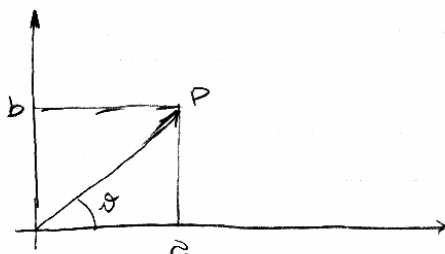
numero complesso

↓
coppia ordinata di numeri reali



$$\vec{OP} \quad \vec{OP'} \quad (a, b) \quad (a', b')$$

$$\vec{OP} + \vec{OP'} = \vec{OP''} \quad (a, b) + (a', b') = (a+a', b+b') = (a'', b'')$$



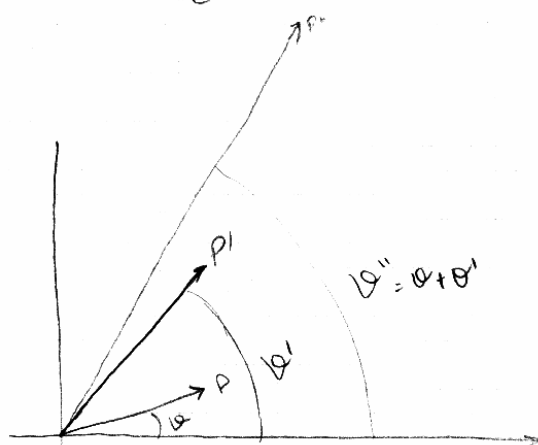
$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |\vec{OP}|$$

modulo del numero complesso

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

$$(a, b) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$



$$|\vec{OP''}| = |\vec{OP'}| |\vec{OP}|$$

$$\theta'' = \theta + \theta'$$

Definizione di prodotto tra vettori

uso la forma trigonometrica

$$\begin{aligned}(a, b)(a', b') &= (r \cos \theta, r \sin \theta)(r' \cos \theta', r' \sin \theta') = \\&= (r r' \cos(\theta + \theta'), r r' \sin(\theta + \theta')) = (a'', b'') = \\&= (r r' [\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'], r r' [\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta']) = \\&= (aa' - bb', ab' + ba') = (a'', b'')\end{aligned}$$

caso particolare:

$$(a, 0)(a', b') = (aa', ab') = (a', b')(a, 0) = a(a', b')$$

$$(a, 0) = a \quad \text{numero reale} \rightarrow \text{num. complesso dove } b=0$$

$$(0, b)(a', b') = (-bb', a'b) = (b, 0)(-b', a') = b(-b', a')$$

$(0, 0)$ zero complesso coincide con l'origine degli assi

$(1, 0)$ unità reale $(1, 0)(a, b) = (a, b)(1, 0) = (a, b)$

$$1^2 = (1, 0)^2 = (1, 0) = (1, 0) = 1$$

$(0, 1)$ unità immaginaria $(0, 1)(a, b) = (-b, a) = (a, b)(0, 1)$

i

$$(0, 1)(0, 1) = (0, 1)^2 = (-1, 0) = -1$$

↑ numero reale

$$i^2 = -1$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Nel campo $\mathbb{C}$

elemento nullo
per la somma $0_0 = (0, 0) = 0$

elemento neutro del prodotto $1 = (1, 0) = 1$

opposto $(a, b) \quad (-a, -b)$

inverso $a^{-1} = \frac{1}{(a, b)} \quad (a, b) \neq (0, 0)$

Possiamo rapp. i num. complessi come una combinaz. lineare delle due unità

$$z = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + ib$$

$$z' = (a', b') = a' + ib'$$

notazione algebrica

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{1}{(a, b)} = \frac{(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{a}{r^2} - i \frac{b}{r^2}$$

↑
inverso

Divisione

$$\frac{a+ib}{a'+ib'} = \frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a'+ib')(a'-ib')} = \frac{aa' - iab' + iab + bb'}{a'^2 + b'^2} = \frac{aa' + bb'}{r'^2} + i \frac{a'b - ab'}{r'^2}$$

$\alpha + i\beta$

adoperare le trigonometrie

$$(a, b) = a + ib = r \cos \theta + i r \sin \theta = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Non è possibile costruire un campo lavorando in $\mathbb{R}^n$ con $n > 2$

in particolare il prodotto non ha più proprietà

$$\boxed{22/02/06 \quad (304)}$$

$$z = (a, b) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = a + ib = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$\bar{z}$ complesso coniugato di z

$$\bar{z} = a - ib$$

$$z \bar{z} = |z|^2$$

$$z + \bar{z} = 2a = 2 \operatorname{Re}(z)$$

↑
parte reale di z

$$z - \bar{z} = zib = i z \overset{0}{\text{Im}(z)}$$

coefficiente della parte immaginaria

$$z z^1 = r r^1 (\cos(\vartheta + \vartheta^1) + i \sin(\vartheta + \vartheta^1))$$

$$z^2 = r^2 (\cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta)$$

$$z^3 = r^3 (\cos 3\vartheta + i \sin 3\vartheta)$$

$$z^4 = r^4 (\cos 4\vartheta + i \sin 4\vartheta)$$

$$z^n = r^n (\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta)$$

$$z^{30} = (1 + i\sqrt{3})^{30}$$

$$z = 1 + i\sqrt{3}$$

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2 = r$$

$$z = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\begin{cases} \cos \vartheta = \frac{1}{2} \\ \sin \vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{3}$$

$$z^{30} = 2^{30} \left[\cos \left(30 \cdot \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(30 \cdot \frac{\pi}{3} \right) \right] = 2^{30} (1 + 0) = 2^{30}$$

$$z^1 = \sqrt[n]{z}$$

$$z^1 = r^1 (\cos \vartheta^1 + i \sin \vartheta^1)$$

$$z^{1n} = r (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

$$(r^1)^n (\cos(n\vartheta^1) + i \sin(n\vartheta^1)) = r (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = r (\cos [\vartheta + 2k\pi] + i \sin [\vartheta + 2k\pi])$$

$$\begin{cases} (r^1)^n = r \\ n\vartheta^1 = \vartheta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^1 = \sqrt[n]{r} \\ \vartheta^1 = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

$$z^1 = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \right) \right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$$

Le radici n -esime distinte di un numero complesso sono esattamente n .

$$\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2}$$

$$|z| = r = 2$$

$$z = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\begin{cases} \cos \vartheta = -\frac{1}{2} \\ \sin \vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \vartheta = \frac{2}{3}\pi$$

controlla calcoli

$$z_0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} \right) = \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{2\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi + 2\pi}{4} \right) = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right)$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$z_0 + z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

La somma di tutte le radici n -esime di un numero è zero.

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$$

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad k=0, 1, \dots, n-1 \quad r=1, \quad \vartheta=0$$

$$\sqrt[n]{-1} = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{n} \quad k=0, 1, \dots, n-1 \quad r=1, \quad \vartheta=\pi$$

$$\sqrt[n]{i} = \quad r=1, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt[n]{-i} =$$

ESPOENZIALE NEL CAMPO COMPLESSO

Sviluppo in serie di Taylor

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a \left[1 + \frac{1}{1!}ib + \frac{1}{2!}(ib)^2 + \frac{1}{3!}(ib)^3 + \frac{1}{4!}(ib)^4 + \frac{1}{5!}(ib)^5 + \dots \right] =$$

$$= e^a \left[1 + \frac{1}{1!}ib - \frac{1}{2!}b^2 - i\frac{1}{3!}b^3 + \frac{1}{4!}b^4 + i\frac{1}{5!}b^5 - \frac{1}{6!}b^6 + \dots \right] =$$

$$\begin{matrix} \text{sviluppo di Taylor} \\ \text{sviluppo in serie di Taylor di } \cos(b) \end{matrix}$$

$$= e^a [\cos(b) + i \sin(b)]$$

$$e^z = e^a \underbrace{[\cos b + i \sin b]}_{e^{ib}}$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$z = r e^{i\theta}$$

Eulero

$$\theta = \pi$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

contiene i 5 numeri più strani

$$\sqrt[n]{1} = e^{\frac{i 2k\pi}{n}}$$

LOGARITMO NEL CAMPO COMPLESSO

$$z = r e^{i\theta} = r e^{i(\theta + 2k\pi)} \quad \text{al variare di } k \text{ il numero complesso non varia}$$

$$\log z = \log [r e^{i(\theta + 2k\pi)}] = \log r + i(\theta + 2k\pi)$$

funzione a infiniti valori
perché al variare di k
varia anche il log

$$\sqrt{5+6i}$$

$$z = 5+6i$$

$$r = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$$

$$z = \sqrt{61} \left(\frac{5}{\sqrt{61}} + i \frac{6}{\sqrt{61}} \right)$$

$$\sqrt{5+6i} = a+ib$$

elevo al quadrato

$$5+6i = a^2 - b^2 + i2ab$$

$$\begin{cases} 5 = a^2 - b^2 \\ 6 = 2ab \end{cases} \Rightarrow 3 = ab$$

$$a = \frac{3}{b}$$

$$5 = \frac{9}{b^2} - b^2 \Rightarrow b^4 + 5b^2 - 9 = 0$$

$$b^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{25+36}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{61}}{2}$$

essendo $b \in \mathbb{R}$

$$b^2 = \frac{-5 - \sqrt{61}}{2} \quad \text{N.A.}$$

$$b = \pm \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{61}}{2}}$$

$$a^2 = 5 + b^2 = 5 + \frac{-5 + \sqrt{61}}{2} = \frac{5 + \sqrt{61}}{2}$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{5 + \sqrt{61}}{2}}$$

$$b = \pm \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{61}}{2}}$$

essendo il prodotto positivo $\Rightarrow a$ e b sono concordi
quindi considero a e b sono entrambi
positivi o entrambi negativi:

$$a+ib = \pm \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{61}}{2}} + i \sqrt{\frac{-5+\sqrt{61}}{2}} \right) = \sqrt{5+6i}$$

Polinomi algebrici

$$f(z_1, z_2, \dots, z_k)$$

legati dalle 4 operaz. aritmetiche

Teorema:

$$f(z_1, z_2, \dots, z_k) = f(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_k)$$

Polinomi algebrici:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad a_i \in \mathbb{C} \quad i = 0, \dots, n$$

Teorema fondamentale dell'algebra: Ruffini (Bastel) Gauss

$$\exists \alpha_i, i=1, \dots, n \quad \alpha_i \in \mathbb{C} : P(\alpha_i) = 0 \quad i=1, \dots, n$$

α_i zeri di $P(z)$

radici di $P(z) = 0$

Un polinomio ha esattamente n zeri, quanto è il suo grado

$$a_1 z + a_0 \quad \alpha_1 = -\frac{a_0}{a_1}$$

$$a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad \alpha_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{III} \\ a \in \mathbb{C} \end{array} \right\}$$

(trovare le soluzioni legando i coeff. con le 4 operazioni ed estraz. di radici)

$$a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad \text{lunga } 1,5 \text{ m}$$

1555 Scipione del Ferro

$$a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad \text{lunga } 2 \text{ m}$$

1570 Cardano

$$a_5 z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

1800 Gauss
dimostrò che non esiste

$$P(z) =$$

$$a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$$

$$Q(z) = \frac{1}{a_n} P(z)$$

$$a_i \in \mathbb{R}$$

$$P(\alpha) = 0$$

$$\overline{P(\alpha)} = 0 \quad \text{essendo } \alpha \text{ il complesso coniugato di un numero reale, il numero stesso}$$

$$P(\bar{\alpha}) = 0 \quad \text{essendo } a_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{coniuga solo le potenze di } z$$

Se un polinomio ammette un numero complesso coniugato, ammette sempre il suo complesso coniugato ($a_i \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} -\frac{a_{n-1}}{a_n} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \\ (-1)^n \frac{a_0}{a_n} &= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \end{aligned}$$

Permette di dimostrare che la somma delle radici n -esime $= 0$

$$z^n - w = 0$$

$$a_n z^n + 0z^{n-1} + \dots + 0z + w = 0$$

$$a_{n-1} = 0 \quad -\frac{a_{n-1}}{a_n} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$$

Gli zeri possono essere multipli e spesso si desidera evidenziare cio-

$$z^2 + 2z + 1$$

$$\alpha_1 \quad \nu_1 \leftarrow \text{multiplicità}$$

$$\alpha_2 \quad \nu_2$$

⋮

$$\alpha_k \quad \nu_k$$

n è il numero degli zeri distinti

$$z^2 + 2z + 1$$

$$(z - \alpha_1)^{\nu_1} (z - \alpha_2)^{\nu_2} \dots (z - \alpha_k)^{\nu_k}$$

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k = n$$