

## **- Cenni Teorici “Scienza delle Costruzioni” -**

*(Praticò Andrea)*

24 marzo 2003

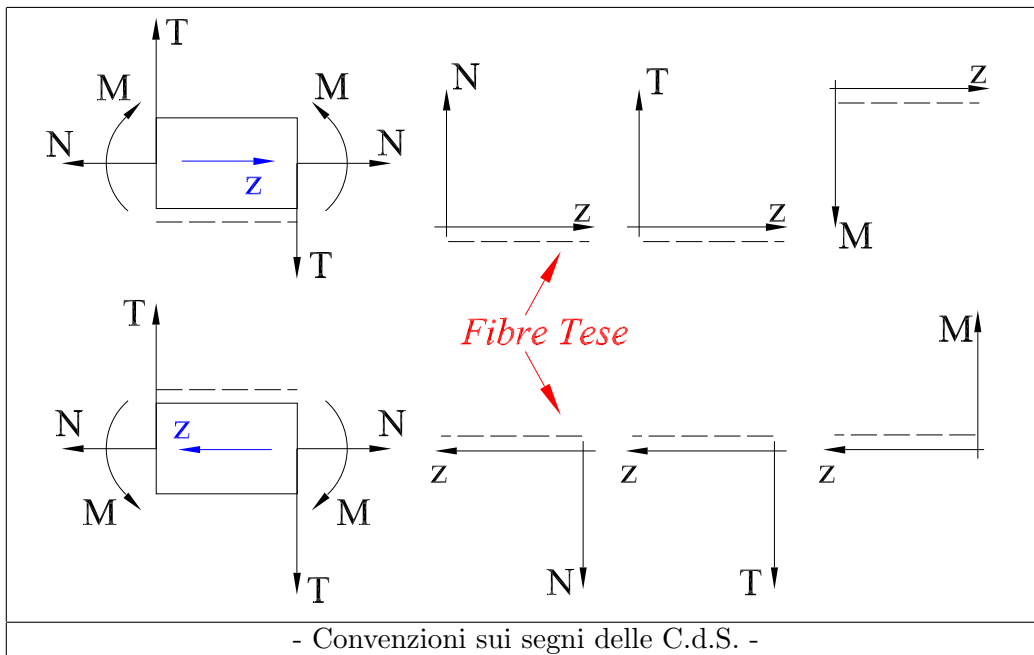
# Indice

<b>1</b>	<b>Convenzioni sulle Caratteristiche di Sollecitazione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Equazioni Indefinite di Equilibrio di Cauchy</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Vincoli Esterni e Molteplicità</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Carico distribuito Triangolare</b>	<b>8</b>
4.1	Metodo del Baricentro . . . . .	8
4.2	Metodo della Funicolare . . . . .	9
4.3	Calcolo del momento flettente . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Carico distribuito Trapezoidale</b>	<b>12</b>
5.1	Metodo del Baricentro . . . . .	12
5.2	Metodo della Funicolare . . . . .	13
5.3	Calcolo del momento flettente . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Proiezioni di Carichi distribuiti</b>	<b>15</b>
<b>7</b>	<b>Centri assoluti e Relativi di Istantanea Rotazione</b>	<b>18</b>
<b>8</b>	<b>Analisi della Tensione</b>	<b>19</b>
8.1	Equazioni Indefinite di Equilibrio di Cauchy . . . . .	19
8.2	Tensioni Principali e direzioni principali della Tensione . . . . .	20
8.3	Equazioni al Contorno . . . . .	21
<b>9</b>	<b>Geometria della Deformazione</b>	<b>22</b>
9.1	Condizione per la Rigidezza del Moto . . . . .	24
<b>10</b>	<b>Equazioni di Congruenza o di Saint-Venant</b>	<b>25</b>
<b>11</b>	<b>Equazioni di Vincolo</b>	<b>26</b>
<b>12</b>	<b>Materiali Elastici ed Omogenei</b>	<b>27</b>
12.1	Lavoro Elementare delle Forze Elastiche . . . . .	27
12.2	Energia Potenziale Elastica . . . . .	27
<b>13</b>	<b>Materiali Isotropi</b>	<b>29</b>
13.1	Coefficiente di Dilatazione Cubica . . . . .	30
13.2	Energia Potenziale Elastica . . . . .	30
<b>14</b>	<b>Riepilogo Equazioni</b>	<b>31</b>
<b>15</b>	<b>Problema di Saint-Venant</b>	<b>32</b>

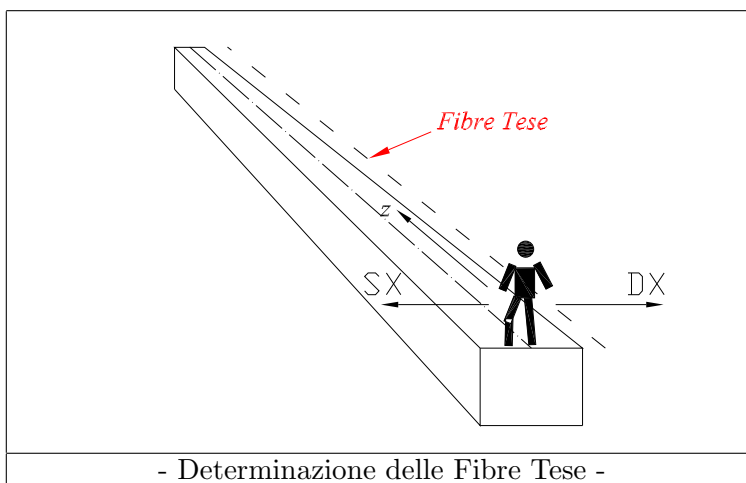
<b>16 Metodo Semi-inverso</b>	<b>34</b>
16.1 Sforzo Normale Semplice . . . . .	34
<b>17 Equazioni della Linea Elastica</b>	<b>35</b>
17.1 Linea elastica in presenza di discontinuità . . . . .	36
17.1.1 DISCONTINUITÀ DEL TAGLIO . . . . .	37
17.1.2 DISCONTINUITÀ DEL MOMENTO . . . . .	37
17.1.3 DISCONTINUITÀ DEL CARICO . . . . .	38
17.1.4 DISCONTINUITÀ DI VINCOLO . . . . .	38
<b>18 Equazioni di Muller-Breslau</b>	<b>39</b>
18.1 Travature Reticolari . . . . .	40
18.2 Caso di una sola incognita Iperstatica . . . . .	40
18.3 Caso di due incognite Iperstatiche . . . . .	41

## Capitolo 1

# Convenzioni sulle Caratteristiche di Sollecitazione



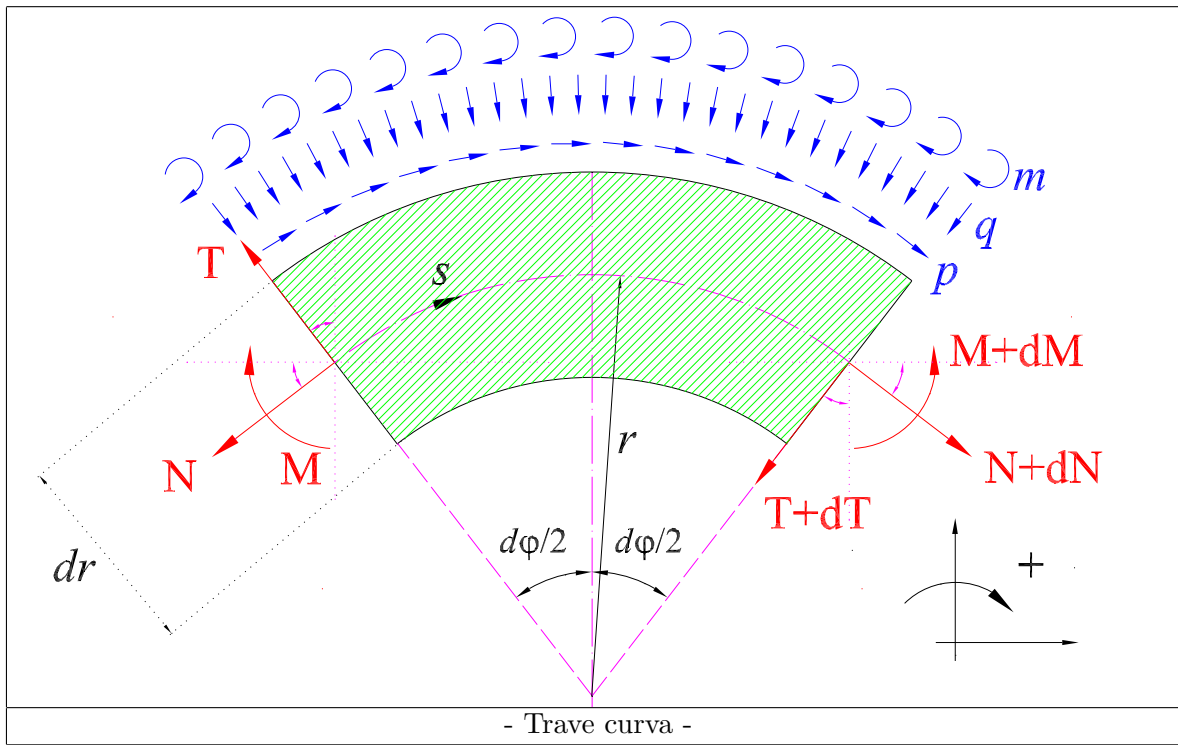
Notare che il Momento Flettente positivo è sempre tale da “tirare” le fibre tese, queste ultime stanno **sempre** a destra dell’osservatore che percorre la linea d’asse della trave in direzione delle  $z$  positive.



## Capitolo 2

# Equazioni Indefinite di Equilibrio di Cauchy

Si ricavano le equazioni che descrivono l'equilibrio di una trave con raggio di curvatura  $r$ , soggetta a carichi distribuiti:



Equilibrio lungo l'asse  $x$ :

$$-N \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - T \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + p \cdot ds - (T + dT) \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + (N + dN) \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0$$

Equilibrio lungo l'asse  $y$ :

$$T \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - N \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - q \cdot ds - (T + dT) \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - (N + dN) \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0$$

Equilibrio del Momento:

$$-N \cdot r + (N + dN)r + M - (M + dM) + m \cdot ds + p \cdot r \cdot ds = 0$$

Considerando un angolo infinitesimo  $d\varphi$ , si può porre:

$$\cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \simeq 1 \quad \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \simeq \frac{d\varphi}{2}$$

da cui, considerando che  $d\varphi = \frac{ds}{r}$ :

$$-N - T \frac{d\varphi}{2} + p \cdot ds - T \frac{d\varphi}{2} + N + dN = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dN}{ds} = \frac{T}{r} - p \quad (\text{Eq. asse } x)$$

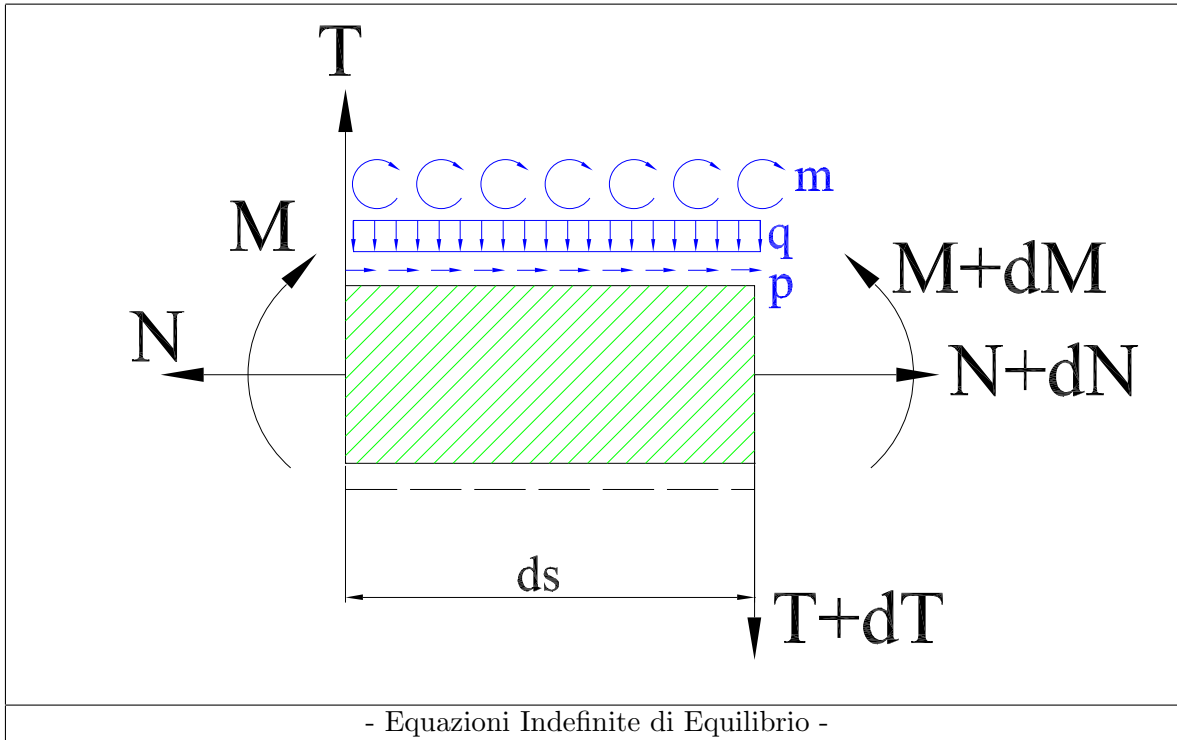
Analogamente per l'equilibrio lungo l'asse  $y$ :

$$\frac{dT}{ds} = -\left(\frac{N}{r} + q\right) \quad (\text{Eq. asse } y)$$

Per l'equilibrio al Momento:

$$\frac{dM}{ds} = T + m$$

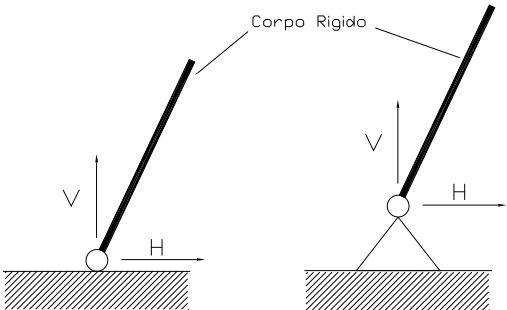
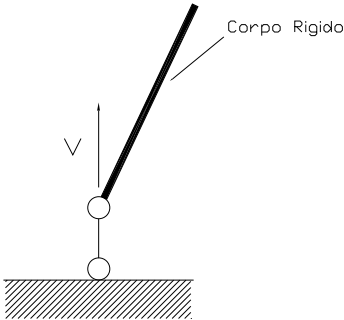
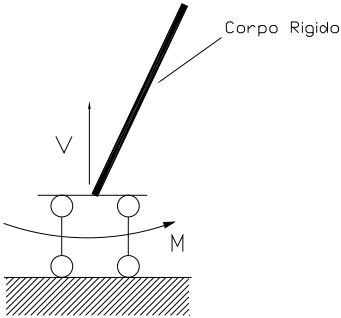
Si osservi che, quando  $r \rightarrow \infty$ , ovvero la trave tende ad essere rettilinea, si abbia:

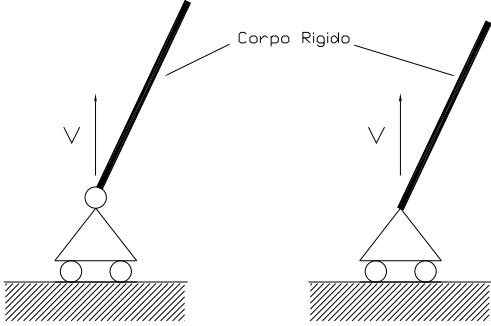
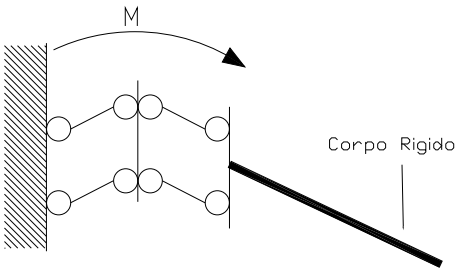
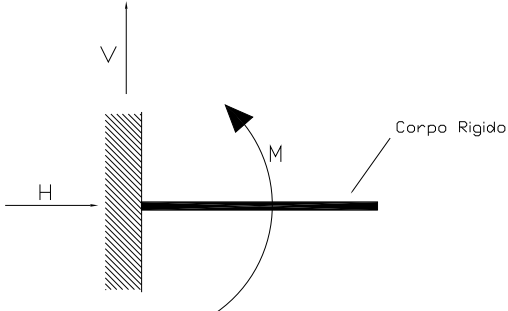
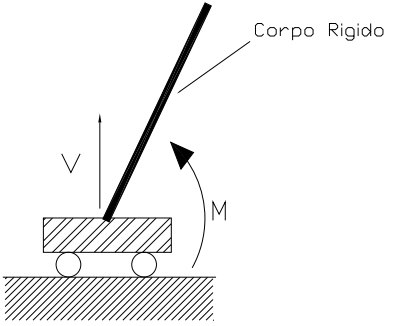


$$\frac{dN}{ds} = -p \quad \frac{dT}{ds} = -q \quad \frac{dM}{ds} = T + m$$

# Capitolo 3

## Vincoli Esterni e Molteplicità

Simbolo	Denominazione	Prestazioni Statiche	Prestazioni Dinamiche	Molteplicità
	CERNIERA	$H \neq 0$ $V \neq 0$ $M = 0$	$dx_A = 0$ $dy_A = 0$ $d\varphi \neq 0$	m=2
	PENDOLO	$H = 0$ $V \neq 0$ $M = 0$	$dx_A \neq 0$ $dy_A = 0$ $d\varphi \neq 0$	m=1
	BIPENDOLO	$H = 0$ $V \neq 0$ $M = 0$	$dx_A \neq 0$ $dy_A = 0$ $d\varphi = 0$	m=2

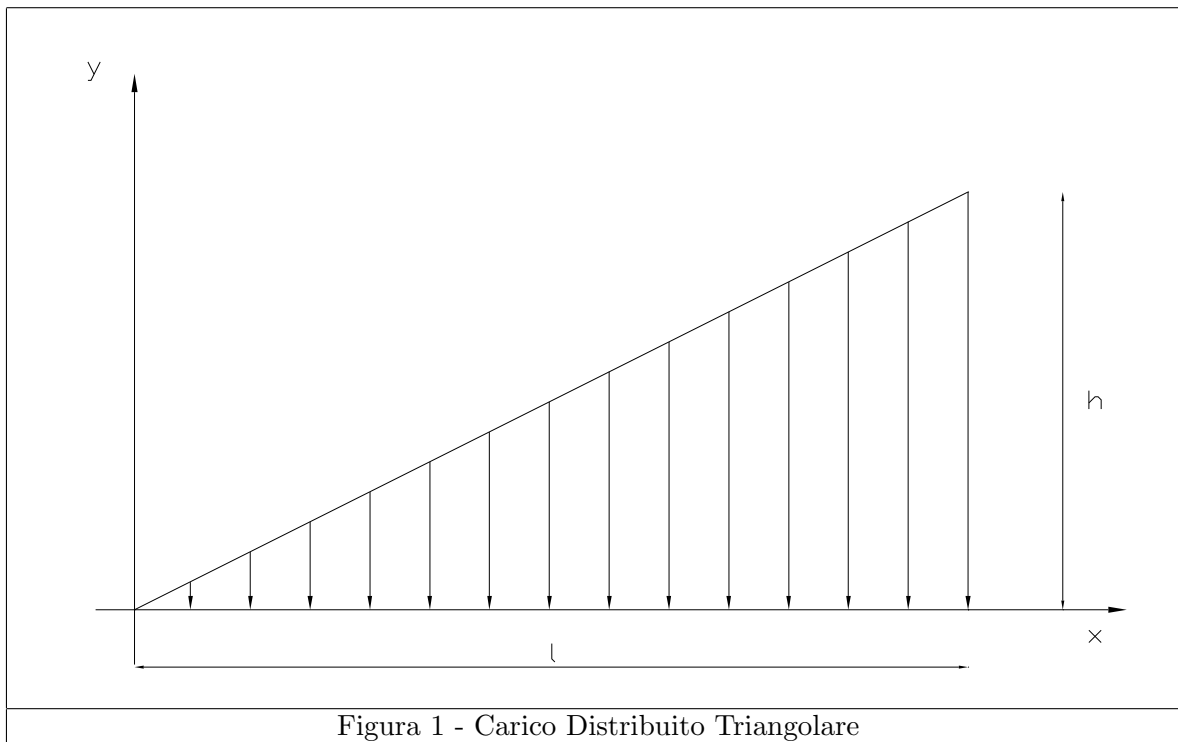
Simbolo	Denominazione	Prestazioni Statiche	Prestazioni Dinamiche	Molteplicità
	CARRELLO	$H = 0$ $V \neq 0$ $M = 0$	$dx_A \neq 0$ $dy_A = 0$ $d\varphi \neq 0$	m=1
	PENDOLO IMPRO-PRIO	$H = 0$ $V = 0$ $M \neq 0$	$dx_A \neq 0$ $dy_A \neq 0$ $d\varphi = 0$	m=1
	INCASTRO	$H \neq 0$ $V \neq 0$ $M \neq 0$	$dx_A = 0$ $dy_A = 0$ $d\varphi = 0$	m=3
	INCASTRO SCORREVOLE	$H = 0$ $V \neq 0$ $M \neq 0$	$dx_A \neq 0$ $dy_A = 0$ $d\varphi = 0$	m=2



## Capitolo 4

# Carico distribuito Triangolare

Sia dato un carico distribuito triangolare indicato in figura:



Lo scopo della presente trattazione è quello di determinare la risultante di tale carico ed il corrispondente punto di applicazione.

Esistono vari metodi per tali determinazioni, qui ne verranno esposti due:

### 4.1 Metodo del Baricentro

La risultante del carico distribuito vale:

$$Q = \int_0^l q(x) dx$$

mentre il punto di applicazione ha ascissa pari a quella del baricentro della superficie triangolare.

Per determinare le coordinate del baricentro di una superficie qualsiasi si adottano le formule:

$$x_G = \frac{\iint_A x dA}{A} \quad y_G = \frac{\iint_A y dA}{A}$$

Se la superficie in esame può essere scomposta in  $n$  superfici, ciascuna delle quali ha coordinate baricentriche  $x_{Gi}$   $y_{Gi}$ , allora le coordinate del baricentro della superficie totale, sono date da:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_{Gi} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_{Gi} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

Nel caso di superficie triangolare, è risaputo che l'ascissa del baricentro è posta a  $\frac{2}{3}l$ ; a scopo dimostrativo si calcola comunque tale ascissa applicando il metodo suddetto:

$$\begin{aligned} dA &= y \cdot dx & y &= \frac{h}{l}x \Rightarrow dA = \frac{h}{l}x dx \\ A &= \frac{h \cdot l}{2} \\ x_G &= \frac{\int_0^l \frac{h}{l}x^2 dx}{\frac{hl}{2}} = \frac{\frac{h}{l} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^l}{\frac{hl}{2}} = \frac{2}{3}l \quad \text{C.V.D.} \end{aligned}$$

## 4.2 Metodo della Funicolare

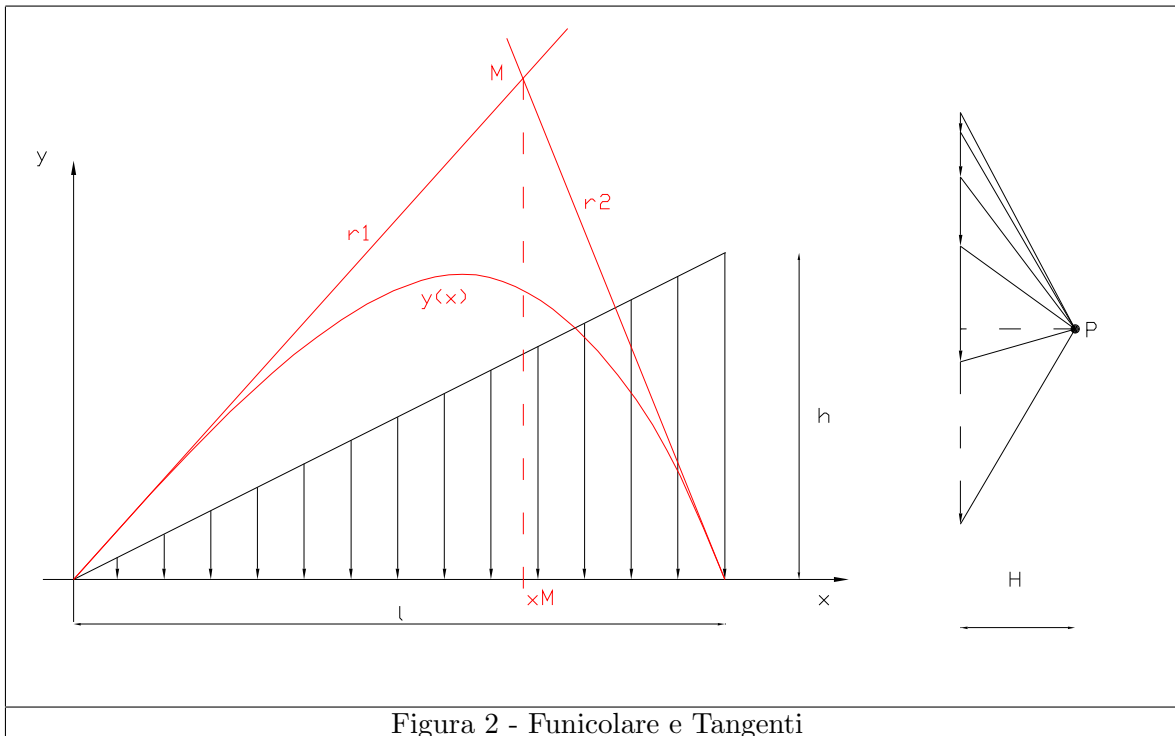
L'equazione del carico unitario, è:  $q(x) = \frac{h}{l}x$  da cui si deduce che la risultante vale:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^l q(x) dx = \int_0^l \frac{h}{l}x dx = \frac{h}{l} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^l = \frac{h \cdot l^2}{2l} \Rightarrow \\ Q &= \frac{h \cdot l}{2} \end{aligned}$$

Per determinare il punto di applicazione di tale risultante, si fa ricorso alla definizione di **Funicolare**, per la quale, vale la relazione:

$$y'' = -\frac{q(x)}{H}$$

dove  $y(x)$  è la funzione che esprime la Funicolare, ed  $H$  è la minima distanza della poligonale dal Polo.



Dalla precedente relazione, deriva:

$$\begin{aligned}y'' &= -\frac{h \cdot x}{l \cdot H} \\y' &= -\frac{h \cdot x^2}{2l \cdot H} + C_1 \\y &= -\frac{h \cdot x^3}{6l \cdot H} + C_1 x + C_2\end{aligned}$$

Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

da cui si ricavano le costanti  $C_1$  e  $C_2$ :

$$\begin{aligned}C_2 &= 0 \\C_1 &= \frac{h \cdot l}{6H}\end{aligned}$$

Le rette  $r_1$  ed  $r_2$  tangenti la funicolare, hanno rispettivamente equazione:

$$\begin{aligned}r_1 : \quad y &= \frac{h \cdot l}{6H} x \\r_2 : \quad y &= -\frac{h \cdot l}{3H} x + \frac{h \cdot l^2}{3H}\end{aligned}$$

dalle quali si ricava l'ascissa del punto di intersezione:

$$x_m = \frac{2}{3}l$$

### 4.3 Calcolo del momento flettente

Dato il solito carico distribuito triangolare, si intende ricavare l'espressione del momento flettente al variare dell'ascissa curvilinea presa coincidente con la linea d'asse della trave. E' risaputo (e facilmente dimostrabile) che, dato un carico distribuito  $q(x)$ , il momento flettente in un generico punto di ascissa  $x$ , è dato da:

$$M(x) = - \int_0^x q(\xi) \cdot (x - \xi) d\xi$$

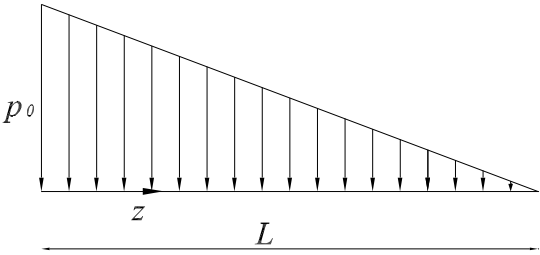
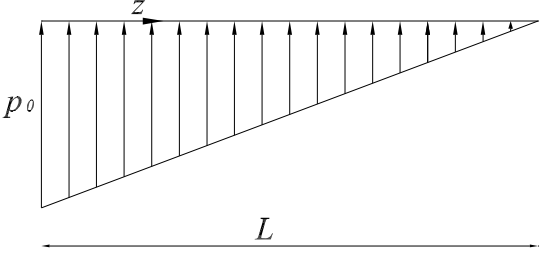
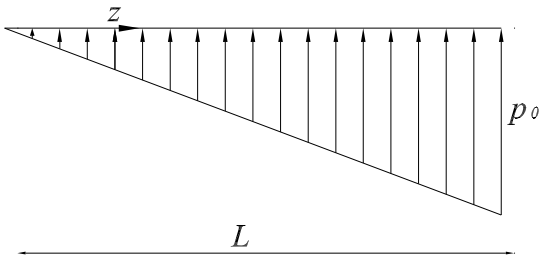
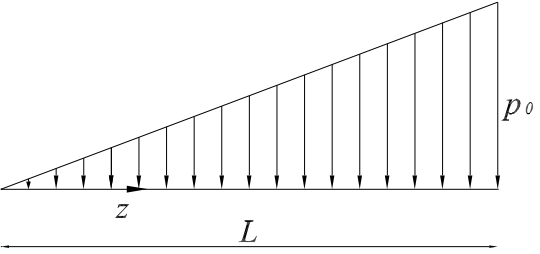
quindi

$$M(x) = - \int_0^x \frac{h}{l} \xi (x - \xi) d\xi = - \int_0^x \frac{h \cdot x}{l} \xi d\xi + \int_0^x \frac{h}{l} \xi^2 d\xi$$

Risolvendo, si ottiene:

$$M(x) = -\frac{h \cdot x^3}{6l}$$

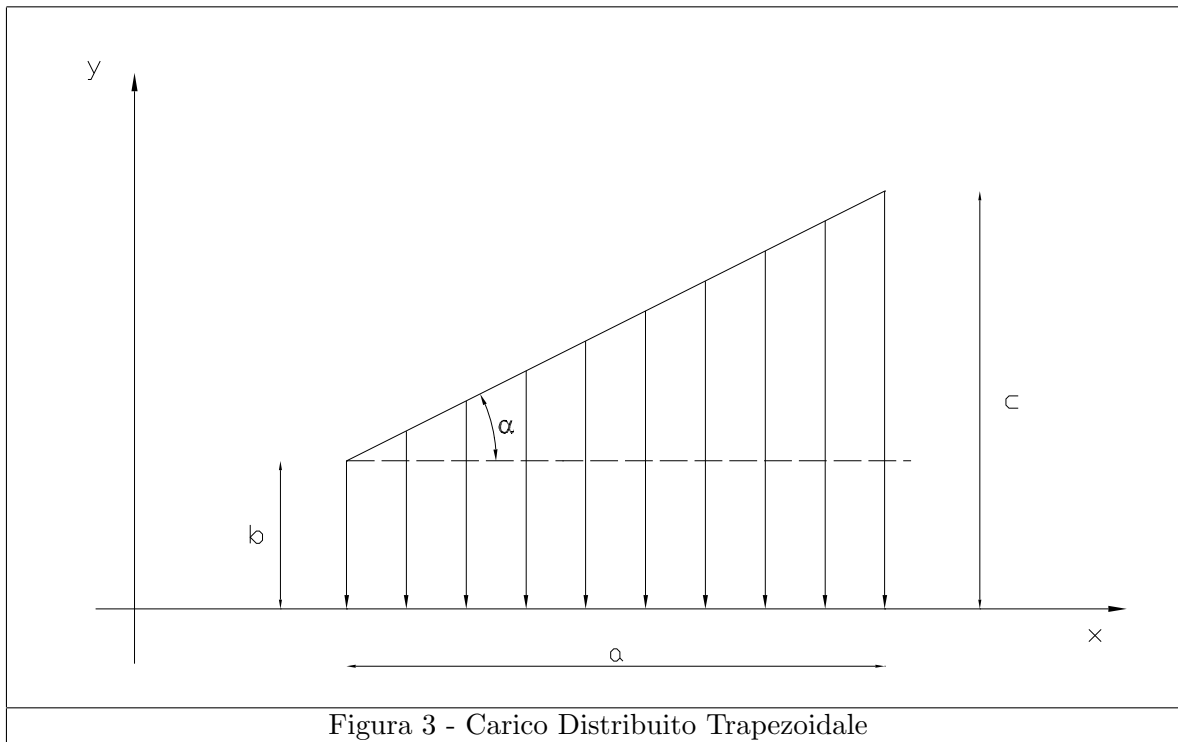
Possibili casi di Carico Triangolare

Distribuzione	Momento Flettente
	$M(z) = \frac{p_0 \cdot z^2 (z - 3L)}{6L}$
	$M(z) = -\frac{p_0 \cdot z^2 (z - 3L)}{6L}$
	$M(z) = \frac{p_0 \cdot z^3}{6L}$
	$M(z) = -\frac{p_0 \cdot z^3}{6L}$

## Capitolo 5

# Carico distribuito Trapezoidale

Sia dato un carico distribuito trapezoidare indicato in figura:



Lo scopo è quello di determinare la risultante di tale carico ed il corrispondente punto di applicazione, ed in seguito l'espressione del momento flettente al variare dell'ascissa curvilinea coincidente con l'asse della trave.

Anche in questo caso verranno esposti i due metodi visti precedentemente:

### 5.1 Metodo del Baricento

La superficie trapezoidale può essere scomposta in un triangolo ed un rettangolo, i cui baricentri hanno ascissa rispettivamente:  $x_{G1} = \frac{2}{3}a$   $x_{G2} = \frac{a}{2}$ , quindi il baricentro della superficie complessiva è dato da:

$$x_G = \frac{x_{G1} \cdot A_1 + x_{G2} \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{2}{3}a \cdot \frac{(c-b)a}{2} + \frac{a}{2}ab}{\frac{(c-b)a}{2} + ab} = \frac{(2c+b)a}{3(b+c)}$$

## 5.2 Metodo della Funicolare

Il carico distribuito in esame ha equazione

$$q(x) = b + \tan(\alpha) \cdot x$$

Per quanto esposto precedentemente, l'equazione della funicolare è data da:

$$y'' = -\frac{b + \tan(\alpha) \cdot x}{H}$$

dalla quale, integrando, si ottiene:

$$y(x) = -\frac{\tan(\alpha)}{6H}x^3 - \frac{b}{2H}x^2 + C_1x + C_2$$

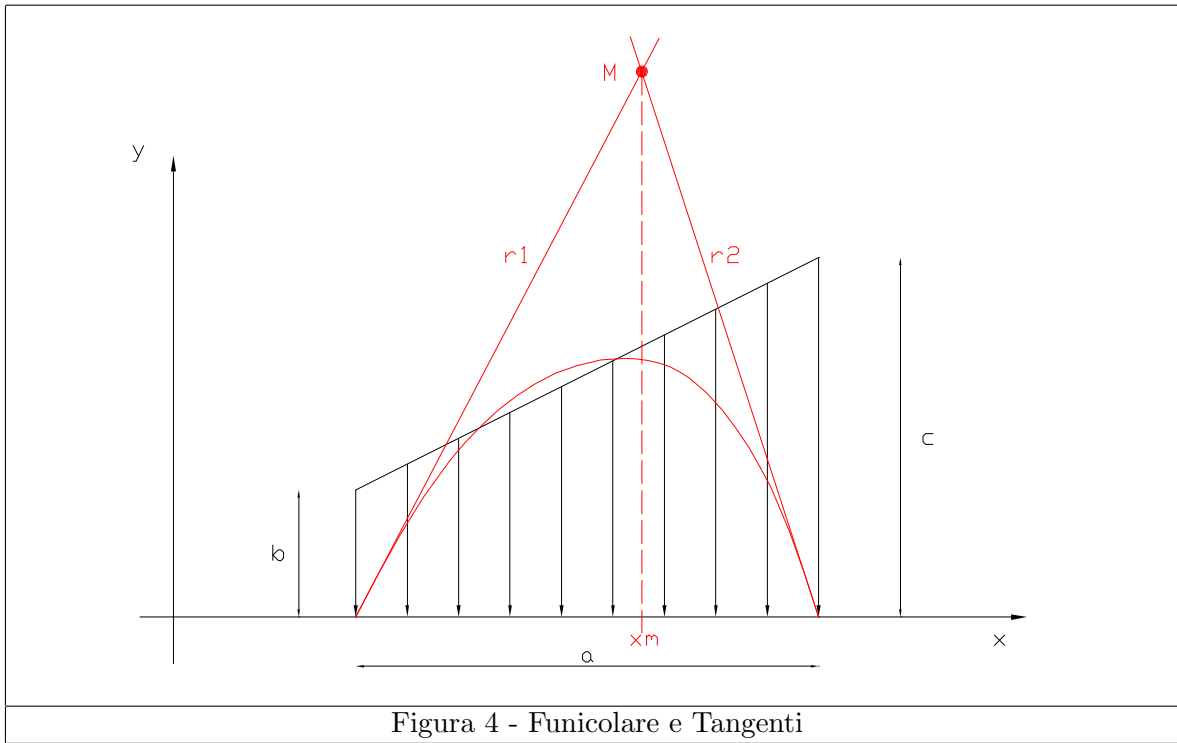


Figura 4 - Funicolare e Tangenti

Imponendo le solite condizioni al contorno:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(a) = 0 \end{cases}$$

si ottengono i valori delle costanti  $C_1$  e  $C_2$ , che valgono rispettivamente:

$$C_1 = \frac{\tan(\alpha) \cdot a^2}{6H} + \frac{a \cdot b}{2H} \quad C_2 = 0$$

Avendo:

$$\begin{cases} y'(0) = \frac{\tan(\alpha) \cdot a^2}{6H} + \frac{a \cdot b}{2H} = C_1 \\ y'(a) = -\frac{\tan(\alpha) \cdot a^2}{3H} - \frac{a \cdot b}{2H} \end{cases}$$

si ricavano le equazioni delle rette tangenti la funicolare:

$$r_1 : \quad y = \left[ \frac{\tan(\alpha) \cdot a^2}{6H} + \frac{a \cdot b}{2H} \right] x$$

$$r_2 : \quad y = - \left[ \frac{\tan(\alpha) \cdot a^2}{3H} + \frac{a \cdot b}{2H} \right] x + \frac{\tan(\alpha) \cdot a^3}{3H} + \frac{a^2 \cdot b}{2H}$$

Il punto di intersezione di tali rette (ottenibile risolvendo il sistema), ha ascissa pari a:

$$x_m = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a \tan(\alpha) + 3b}{\tan(\alpha) \cdot a + 2b} \cdot a$$

oppure, sapendo che  $\tan(\alpha) = \frac{c-b}{a}$

$$x_m = \frac{1}{3} \cdot \frac{2c + b}{c + b} \cdot a$$

La risultante della distribuzione di carico, vale banalmente:

$$Q = \frac{1}{2}(b + c)a$$

dove  $a$  ha le dimensioni di una lunghezza, mentre  $b$  e  $c$  hanno le dimensioni di una Forza per unità di lunghezza.

### 5.3 Calcolo del momento flettente

Per quanto detto al capitolo precedente:

$$M(x) = \int_0^x q(\xi)(x - \xi)d\xi = \int_0^x b \cdot x d\xi - \int_0^x b \cdot \xi d\xi + \int_0^x x \cdot \tan(\alpha) \cdot \xi d\xi - \int_0^x \tan(\alpha) \cdot \xi^2 d\xi$$

$$M(x) = bx^2 - \frac{b}{2}x^2 + \frac{\tan(\alpha)}{2}x^3 - \frac{\tan(\alpha)}{3}x^3$$

$$M(x) = \frac{b}{2}x^2 + \frac{\tan(\alpha)}{6}x^3$$

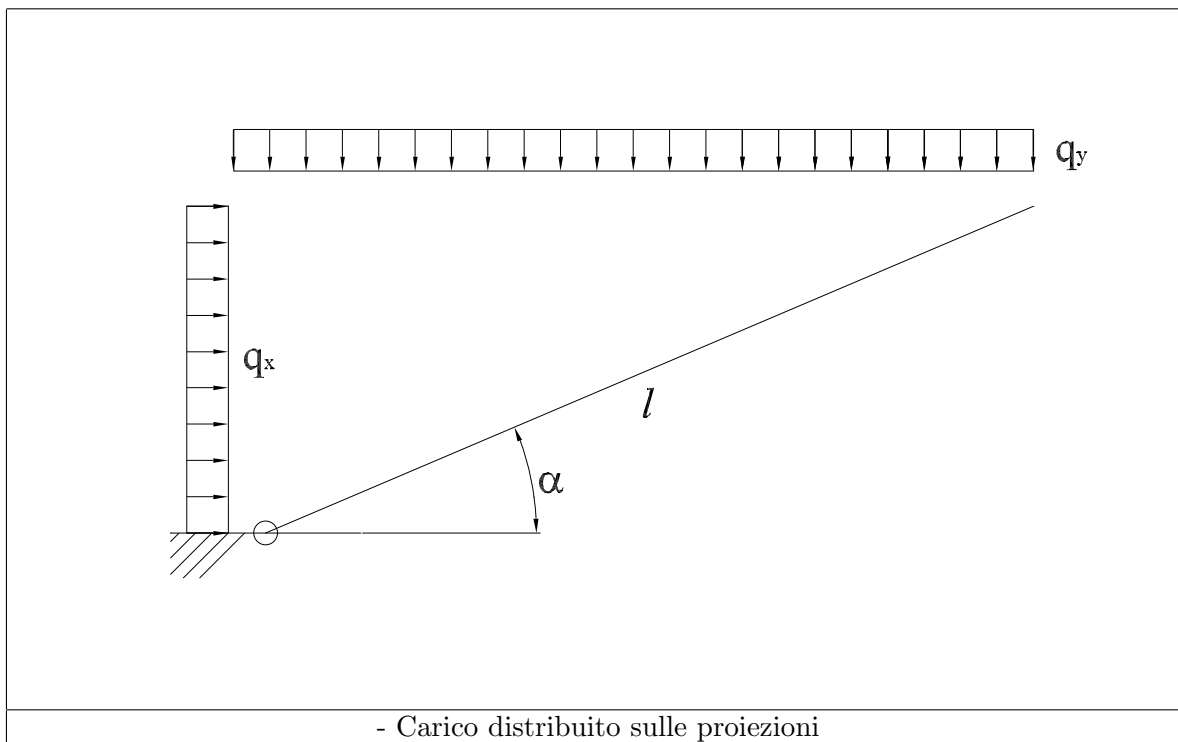
Ricordando ancora una volta che  $\tan(\alpha) = \frac{c-b}{a}$ , si ottiene:

$$M(x) = \frac{c-b}{6a}x^3 + \frac{b}{2}x^2$$

## Capitolo 6

# Proiezioni di Carichi distribuiti

Sia data la seguente trave soggetta ai carichi distribuiti indicati:



i carichi  $q_x$  e  $q_y$  rappresentano i carichi, non direttamente applicati alla trave, ma quelli applicati alle proiezioni, rispetto agli assi  $x$  e  $y$ , della trave.

La risultante del carico  $q_x$  applicata alla proiezione verticale della trave, vale:

$$Q_x = q_x \cdot l \cdot \sin(\alpha)$$

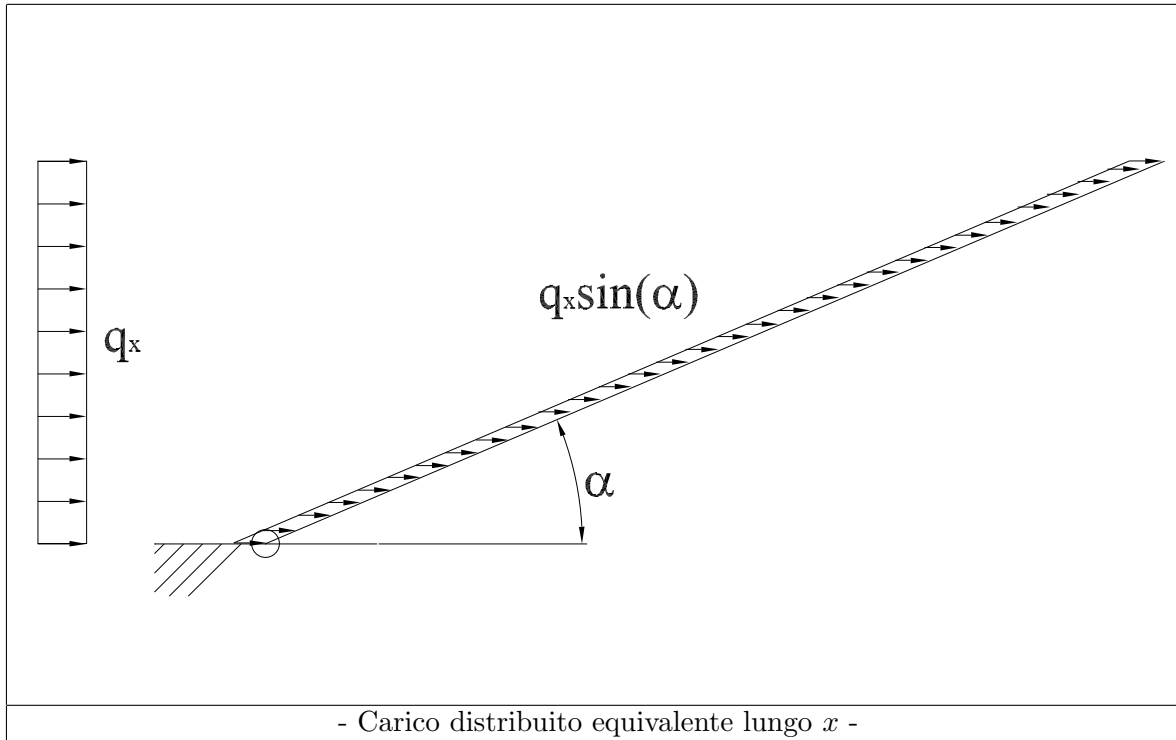
mentre quella del carico  $q_y$  applicata alla proiezione orizzontale, vale:

$$Q_y = q_y \cdot l \cdot \cos(\alpha)$$

La risultante  $Q_x$  deve essere, naturalmente, applicata alla trave e può essere considerata come la risultante di un carico distribuito agente sulla trave stessa, di intensità:

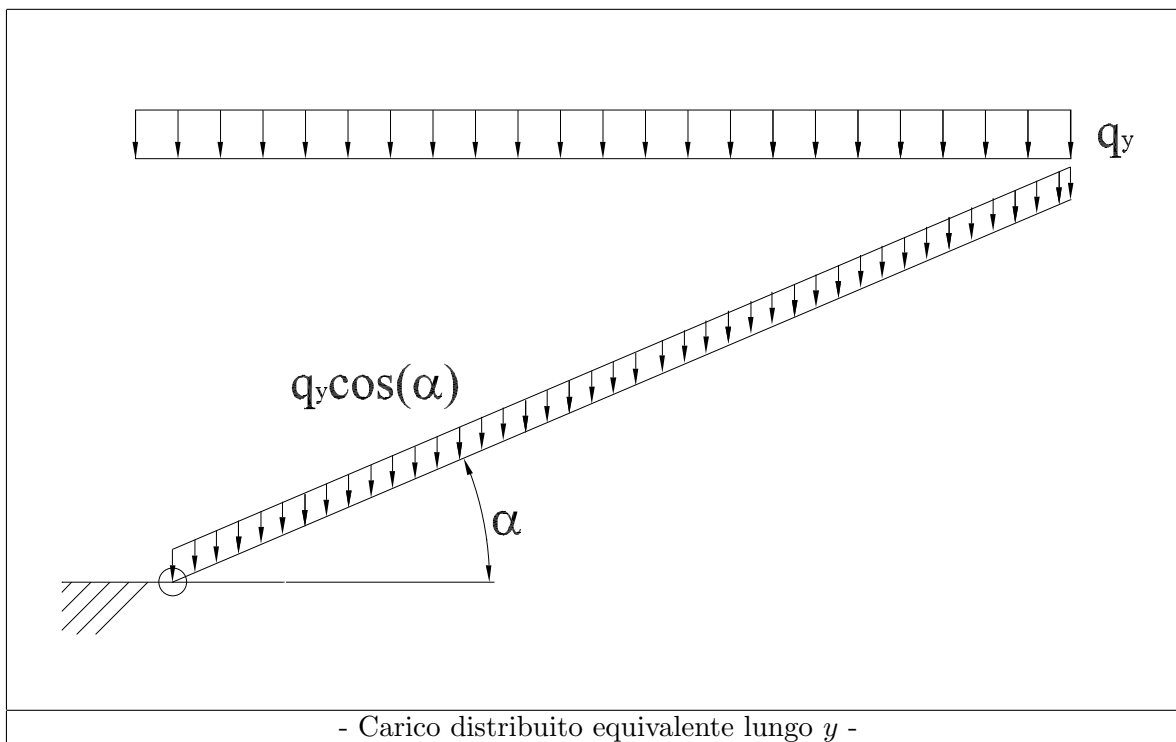
$$\frac{Q_x}{l} = q'_x = q_x \cdot \sin(\alpha)$$



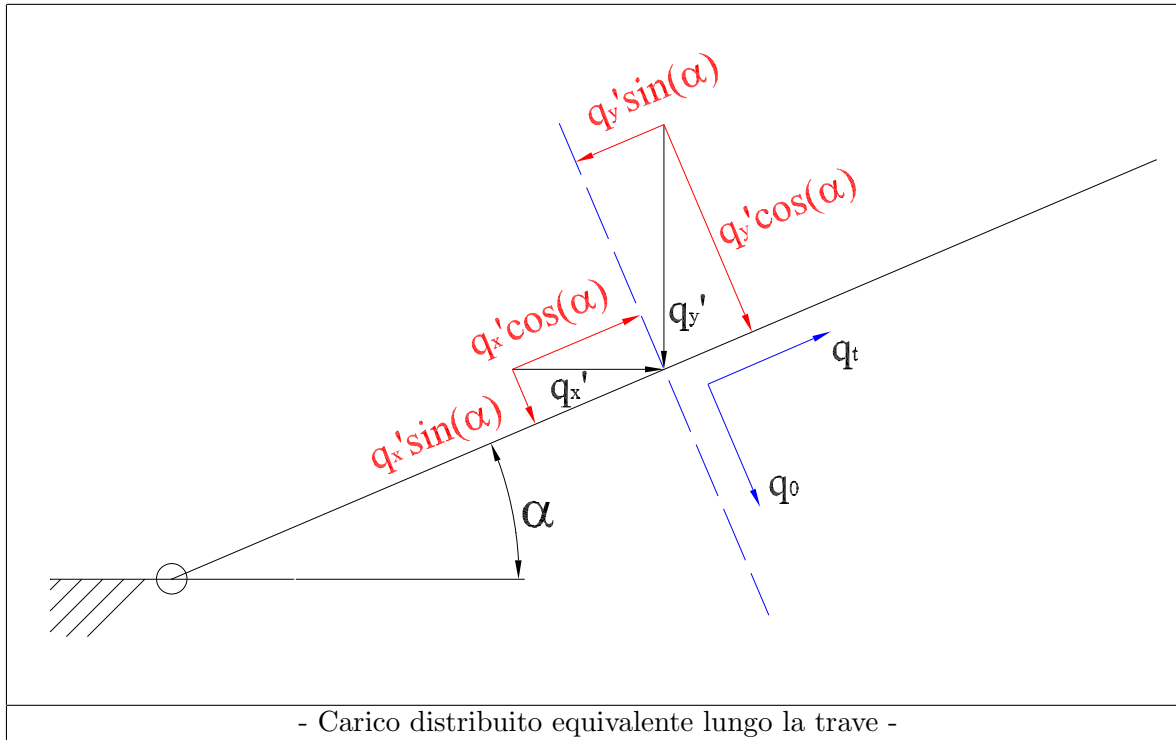


Analogamente per quanto riguarda il carico  $Q_y$ :

$$q'_y = q_y \cdot \cos(\alpha)$$



Si ottengono, così, le componenti “normale”  $q_o$  e “tangenziale”  $q_t$  del carico distribuito complessivo applicato lungo la linea d’asse della trave:



$$q_0 = q'_x \sin(\alpha) + q'_y \cos(\alpha) \Rightarrow q_0 = q_x \sin^2(\alpha) + q_y \cos^2(\alpha)$$

$$q_t = q'_x \cos(\alpha) - q'_y \sin(\alpha) \Rightarrow q_t = (q_x - q_y) \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

**Osservazione 1** Si osservi che, nel caso in cui  $q_x = q_y = q$  si abbia:

$$q_0 = q \quad q_t = 0$$

indipendentemente dall'angolo  $\alpha$ .

## Capitolo 7

# Centri assoluti e Relativi di Istantanea Rotazione

Quelle che seguono sono le condizioni affinché un sistema piano di corpi rigidi sia labile.

**Teorema 1 (Primo Teorema delle Catene Cinematiche)** *I centri delle rotazioni assolute di due elementi di un sistema rigido piano, e il centro della rotazione relativa, sono allineati.*

$$(S \text{ labile}) \Leftrightarrow ((i), (k), (ik) \text{ allineati})$$

**Teorema 2 (Secondo Teorema delle Catene Cinematiche)** *I centri delle rotazioni relative di tre elementi sono allineati.*

**Il verificarsi di entrambe le due precedenti condizioni, assicurano la labilità di un sistema composto da più corpi rigidi**

**Teorema 3 (Teorema di Eulero)** *Ogni spostamento del corpo rigido può essere assimilato ad una rotazione intorno ad un punto  $C$  detto centro di istantanea rotazione Assoluto.*

Ai fini della determinazione dei centri di istantanea rotazione assoluti o relativi, occorre tenere presente che:

- a) i vincoli doppi esterni permettono di individuare i centri assoluti dei tronchi ad essi inerenti, mentre quelli interni consentono di individuare i centri relativi dei tratti in essi concorrenti; in entrambi i casi i vincoli doppi fissano il centro.
- b) i vincoli semplici, invece, fissano la retta su cui devono trovarsi i centri (assoluti o relativi)

Da quanto detto segue che:

1. La Cerniera fissa in essa il centro assoluto e/o relativo.
2. il Bipendolo fissa il centro (assoluto e/o relativo) nel punto improprio degli assi dei pendoli.
3. Il Pendolo Improprio impone il centro (ass. e/o relat.) in qualsiasi punto improprio del piano. (Continua  $\rightarrow \rightarrow$ )
4. Il Carrello impone che il centro (ass. e/o relat.) appartenga alla retta ortogonale al piano di scorrimento.
5. Il Pendolo impone che il centro (ass. e/o relat.) si trovi sul suo asse.

# Capitolo 8

## Analisi della Tensione

**Definizione 1** *Tensione Totale* La classe dei corpi di Cauchy è definita mediante le due seguenti relazioni:

$$\vec{t}_n = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{R}}{\delta A}$$
$$\lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{M}}{\delta A} = 0$$

dove  $\vec{t}_n$  = Tensione Totale,  $\delta \vec{R}$  Risultante delle forze applicate sulla superficie  $\delta A$ ,  $\delta \vec{M}$  = Momento risultante su  $\delta A$ .

Per  $\delta A$  tendente a 0, la tensione tende ad assumere un valore puntuale all'interno della sezione di un solido. Il vettore  $\vec{t}_n$  applicato in un punto  $P$ , può essere scomposto lungo le componenti rispetto ad un sistema di riferimento, considerando il piano passante per  $P$ .

La componente normale al piano considerato viene indicata con  $\sigma$ , mentre le componenti giacenti su tale piano con  $\tau$ , e denominate rispettivamente: componente normale e tangenziale.

Fissato un sistema di riferimento nello spazio, si hanno tre piani ortogonali agli assi del sistema passanti per  $P$ , di conseguenza si hanno le 9 possibili componenti del vettore tensione totale:

$$\sigma_x \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \text{Piano ortogonale ad } x$$

$$\tau_{yx} \quad \sigma_y \quad \tau_{yz} \quad \text{Piano ortogonale ad } y$$

$$\tau_{zx} \quad \tau_{zy} \quad \sigma_z \quad \text{Piano ortogonale a } z$$

**Osservazione 2** Si dimostra che le componenti tangenziali reciproche della tensione sono, fra loro, uguali, ovvero:  $\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$

### 8.1 Equazioni Indefinite di Equilibrio di Cauchy

Siano date le componenti della tensione totale, e siano  $X, Y$  e  $Z$  le componenti della forza peso per unità di volume, rispetto ai corrispondenti assi.

Imponendo la condizione di equilibrio ad un parallelogramma infinitesimo di lati  $dx, dy, dz$ ,

si ottengono le equazioni, dette **indefinite di equilibrio di Cauchy**:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases}$$

Si può anche scrivere, in forma compatta:

$$\sum_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial i} + Y_k = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

dove si intende, per esempio:

$$1 = x \quad 2 = y \quad 3 = z \quad \sigma_{11} = \sigma_1 = \sigma_x \quad \tau_{13} = \tau_{xz} \text{ ecc.}$$

Consideriamo una superficie obliqua rispetto agli assi coordinati, e sia  $\vec{n}$  il vettore normale a tale superficie, e sia inoltre  $m$  una retta giacente sul piano della superficie considerata, si ha che la componente normale del vettore tensione totale che giace su un elemento di superficie qualsiasi è dato da:

$$\sigma_n = \sum_{ik} \sigma_{ik} n_i n_k$$

dove  $n_1 = n_x$ ,  $n_2 = n_y$ ,  $n_3 = n_z$  sono i coseni direttori del vettore  $\vec{n}$ . Analogamente per le componenti tangenziali, si ha:

$$\tau_{nm} = \sum_{ik} \sigma_{ik} n_i m_k$$

dove  $m_1 = m_x$ ,  $m_2 = m_y$ ,  $m_3 = m_z$  sono i coseni direttori della retta  $m$ .

## 8.2 Tensioni Principali e direzioni principali della Tensione

**Definizione 2 (Tensore degli Sforzi)** Si definisce **Tensore degli sforzi** il seguente tensore:

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

La Matrice  $T$  è simmetrica (infatti  $\tau_{ik} = \tau_{ki}$ ) quindi è simile ad una matrice diagonale

$$T_p = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{pmatrix}$$

I termini  $S_1, S_2$  ed  $S_3$ , che costituiscono gli autovalori di  $T$ , si dicono **Tensioni Principali**. Gli autovettori (normalizzati, associati ai rispettivi autovalori) di  $T$  costituiscono i versori del nuovo sistema di riferimento, i cui assi prendono il nome di **Direzioni Principali della Tensione**.

**Osservazione 3** *Si noti come, rispetto al nuovo sistema di riferimento, le Tensioni Tangenziali siano nulle!*

Si possono verificare i seguenti casi:

- a)  $S_1 \neq S_2 \neq S_3$  allora nel punto considerato esiste una sola terna di assi principali della tensione.
- b)  $S_1 = S_2$  (oppure  $S_1 = S_3$ ) allora tutte le direzioni giacenti sul piano individuato dagli assi principali 1 e 2 (oppure 1 e 3) sono direzioni principali della tensione.
- c)  $S_1 = S_2 = S_3$ , allora tutte le direzioni possibili sono principali della tensione.

**Definizione 3 (Curve Isostatiche)** *Si chiamano curve isostatiche tutte quelle curve in ogni punto delle quali, la tangente è una direzione Principale di Tensione.*

### 8.3 Equazioni al Contorno

Se l'elemento di superficie di normale  $\vec{n}$  appartiene al contorno del solido, sulla quale agisce una forza per unità di superficie, di componenti  $f_x, f_y, f_z$ , le equazioni che regolano l'equilibrio del tetraedro elementare sono:

$$\begin{cases} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = f_x \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = f_y \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z = f_z \end{cases} \quad (\text{Si ricordi che } \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy})$$

**Osservazione 4** *Se consideriamo un elemento di superficie di contorno, sul quale non agiscono forze, e si prendono gli assi di riferimento in maniera tale che  $\vec{i} = \vec{n}$  (con  $\vec{i}$  = versore dell'asse  $x$ , e quindi  $n_x = 1, n_y = n_z = 0$ ); le equazioni di equilibrio al contorno divenano:*

$$\begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \tau_{yx} = 0 \\ \tau_{zx} = 0 \end{cases}$$

*Si noti che, essendo  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$ , si ha che  $\vec{n}$  è una direzione principale della tensione; quindi si conclude che **in ogni superficie in cui il contorno è scarico, tutte le direzioni ad essa normali sono principali.***

## Capitolo 9

# Geometria della Deformazione

Sia data la fibra di un certo materiale, soggetto a trazione “modesta”<sup>1</sup>, e sia l’asse della fibra coincidente con l’asse  $z$ . Se si indica con  $U(z)$  la funzione che regola lo spostamento di un generico punto della fibra, di ascissa  $z$ , in seguito alla deformazione, si definisce:

$$\varepsilon = \frac{\partial U(z)}{\partial z} \quad \text{Dilatazione Lineare}$$

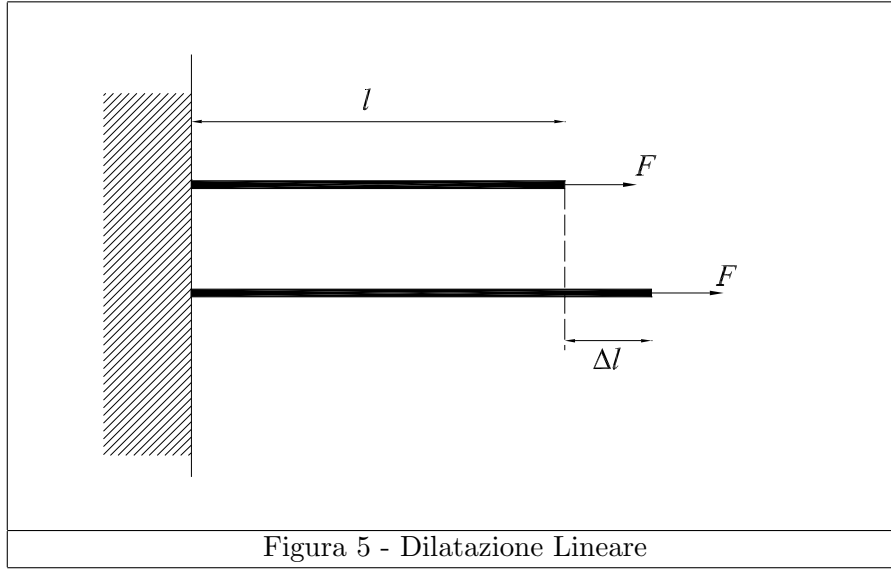


Figura 5 - Dilatazione Lineare

Se la funzione  $U(z)$  è lineare, e si ha che  $U(0) = 0$  e  $U(l) = \Delta l$ , ovvero  $U(z) = \frac{\Delta l}{l} \cdot z$ ; si ha:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Le deformazioni di un corpo avvengono, in generale, lungo tutte le direzioni, quindi si avrà:

$$\vec{U}(\vec{x}) = \left( U_x(x, y, z); U_y(x, y, z); U_z(x, y, z) \right)$$

conseguentemente, si avranno le componenti di deformazione lineare e gli scorrimenti angolari espressi dalle seguenti relazioni:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial U_y}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z}$$

Le precedenti relazioni sono valide sotto le ipotesi che

---

<sup>1</sup>cioè tale da non produrre la rottura della fibra stessa

- La deformazione non compia bruschi salti.
- Gli spostamenti siano “piccoli”, ovvero: dati due punti  $A$  e  $B$  ed una curva che li congiunge, tutta contenuta nel solido, lo spostamento relativo  $\Delta l_{AB}$  tra i due punti sia trascurabile rispetto alla lunghezza della curva  $l_{AB}$ .

La condizione necessaria e sufficiente affinché siano verificate le due precedenti condizioni è che le derivate prime di  $U_x, U_y$  ed  $U_z$  siano ovunque “piccole” nel corpo, ovvero molto minori dell’unità. Tutto ciò costituisce la **Teoria Infinitesima**.

**Definizione 4 (Tensore di Deformazione)** *Si definisce **Tensore di Deformazione** il seguente tensore:*

$$E = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \quad (\text{Anche in questo caso } \gamma_{xy} = \gamma_{yx} \dots)$$

Il coefficiente di dilatazione lineare, rispetto ad una direzione generica  $\vec{n}$  di coseni direttori  $n_x, n_y, n_z$ , vale:

$$\varepsilon_n = \sum_{ik} \varepsilon_{ik} \cdot n_i \cdot n_k$$

analogamente lo scorrimento angolare di due elementi inizialmente ortogonali, di coseni direttori rispettivamente  $n_i$  ed  $\nu_k$ , è dato da:

$$\gamma_{n\nu} = \sum_{ik} \varepsilon_{ik} \cdot n_i \cdot \nu_k$$

Il generico coefficiente di dilatazione lineare (o scorrimento angolare), può essere rappresentato nel modo seguente:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial k} + \frac{\partial U_k}{\partial i} \right) \quad \text{se } i \neq k \Rightarrow \varepsilon_{ik} = \gamma_{ik}$$

Analogamente a quanto detto per le Tensioni Principali e Direzioni Principali di Tensione, si può ripetere per le deformazioni, e si ha che  $E$  è simile ad una matrice Diagonale:

$$E_p = \begin{vmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{vmatrix} \quad \text{dove gli } e_i \text{ sono gli autovalori di } E$$

**Definizione 5 (Coefficiente di dilatazione Cubica)** *E’ una grandezza adimensionale, che esprime la variazione relativa di volume che il solido subisce in seguito ad una deformazione; esso è definito nel seguente modo:*

$$\theta = \frac{dV_1 - dV_0}{dV_0}$$

Si dimostra che:

$$\theta = \text{div} \vec{U} = \sum_i \frac{\partial U_i}{\partial i} = \sum_i \varepsilon_i$$

ovvero

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = e_1 + e_2 + e_3$$



## 9.1 Condizione per la Rigidezza del Moto

Condizione Necessaria e Sufficiente affinché un corpo si muova di Puro Moto Rigido (non subisca, quindi, deformazioni) è:

$$\varepsilon_n = 0 \quad \forall \text{ Direzione in qualunque punto del corpo}$$

da essa discende:

$$\frac{\partial U_i}{\partial k} + \frac{\partial U_k}{\partial i} = 0$$

## Capitolo 10

# Equazioni di Congruenza o di Saint-Venant

Affinchè una deformazione sia conciliabile, ovvero sia priva di Compenetrazioni, Lacerazioni o Creazione di Materia, devono valere le seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{array} \right.$$

Esse sono note come **Equazioni di Congruenza o di Saint-Venant**

## Capitolo 11

# Equazioni di Vincolo

Esistono tre possibili modalità di Vincolo:

1. Punto vincolato a rimanere fisso.
2. Punto vincolato a muoversi su una curva fissa.
3. Punto vincolato a muoversi su una superficie fissa.

Sia  $f(x, y, z) = 0$  l'equazione di una superficie sulla quale il punto è vincolato a muoversi, e sia  $\vec{U}$  il vettore spostamento che il punto può subire; la condizione di vincolo si esprime mediante:

$$\sum_k \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial k} U_k = 0$$

o anche

$$\vec{U} \cdot \text{grad} f(\vec{x}) = 0$$

In generale, date tre superfici di vincolo  $f_1(\vec{x})$   $f_2(\vec{x})$   $f_3(\vec{x})$ , deve risultare:

$$\sum_k \frac{\partial f_s(\vec{x})}{\partial k} U_k = 0 \quad (s = 1, 2, 3)$$

o anche

$$\vec{U} \cdot \text{grad} f_s(\vec{x}) = 0 \quad (s = 1, 2, 3)$$

## Capitolo 12

# Materiali Elastici ed Omogenei

Se si fa l'ipotesi che il materiale in esame sia Elastico ed Omogeneo, si ha una corrispondenza lineare fra  $\varepsilon_{ik}$  e  $\sigma_{ik}$ , data da:

$$[T] = [A] \cdot [E] \quad \text{Legge di Hooke Generalizzata}$$

che, risultando  $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$   $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$ , si può scrivere:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}$$

Si ammette che  $|A| \neq 0$  e quindi per ogni  $\sigma_{ik}$  esiste uno ed un solo valore di  $\varepsilon_{ik}$ .

### 12.1 Lavoro Elementare delle Forze Elastiche

Siano  $\delta\varepsilon_{ik}$  gli incrementi subiti dalle componenti di deformazione, in seguito alla deformazione stessa; si definisce **Lavoro delle Forze Elastiche** per unità di volume la seguente espressione:

$$\delta\varphi = \sum_{ik} \sigma_{ik} \cdot \delta\varepsilon_{ik}$$

### 12.2 Energia Potenziale Elastica

Se si ammette che il campo di forze elastiche sia conservativo, allora esiste una funzione potenziale tale che il lavoro delle forze elastiche, in seguito ad una deformazione, sia dato dalla differenza fra il valore finale e quello iniziale di tale funzione che prende il nome, appunto, di Energia Potenziale Elastica.

Si dimostra che, data  $\varphi$  la funzione potenziale:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{2} \sum_{ik} \sigma_{ik} \cdot \varepsilon_{ik}$$

Se si ammette che allo stato iniziale (precedente la deformazione), corrisponda un'energia potenziale nulla, si ha:

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{ik} \sigma_{ik} \cdot \varepsilon_{ik} \quad (12.1)$$

*Si osservi che tale energia è intesa come Densità di Energia, ovvero: energia per unità di volume* Si può dimostrare che valgono le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial \varphi(\sigma_{ik})}{\partial \sigma_{ik}} = \varepsilon_{ik} \quad (12.2)$$

$$\frac{\partial \varphi(\varepsilon_{ik})}{\partial \varepsilon_{ik}} = \sigma_{ik} \quad (12.3)$$

Le quali caratterizzano i **Materiali Iperelastici o di Green**.

## Capitolo 13

# Materiali Isotropi

Sotto l'ipotesi di isotropia del materiale (tale ipotesi si aggiunge a quelle di materiale elastico ed omogeneo), gli elementi distinti della matrice dei coefficienti ( $A$ ) relativa alla legge di Hooke generalizzata, si riducono a tre:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{1}{m \cdot E} & -\frac{1}{m \cdot E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m \cdot E} & \frac{1}{E} & -\frac{1}{m \cdot E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m \cdot E} & -\frac{1}{m \cdot E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

ovvero, svolgendo i prodotti:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right) & \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} \left( \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \right) & \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} \left( \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right) & \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{cases}$$

Denominate **Equazioni blablabla**, ed i vari parametri sono:

$E$  = Modulo di Elasticità normale o di Young

$G$  = Modulo di Elasticità Tangenziale

$\frac{1}{m} = \nu$  = Coefficiente di Contrazione Laterale o di Poisson

Si può dimostrare che i tre parametri summensionati non sono totalmente indipendenti, ma sono legati dalle seguenti relazioni:

$$G = \frac{m}{2(m+1)} \cdot E = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{dove vale sempre: } -1 < \nu < \frac{1}{2}$$

**Osservazione 5** *Dalle precedenti relazioni si dimostra banalmente che: “direzioni principali di tensione, sono anche principali di deformazione e viceversa”.*

### 13.1 Coefficiente di Dilatazione Cubica

Si è visto a suo tempo che  $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ ; sotto l'ipotesi di Isotropia, si ottiene:

$$\theta = \left( \frac{1 - 2\nu}{E} \right) \sum_k \sigma_k$$

*In un materiale Elastico, Omogeneo ed Isotropo, il coefficiente di dilatazione cubica è proporzionale alla sommatoria delle componenti di Tensione Normali*

### 13.2 Energia Potenziale Elastica

Per i materiali Elastici, Omogenei ed Isotropi, l'espressione della Densità di Energia Potenziale Elastica diviene:

$$\varphi = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1}{m \cdot E}(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + \frac{1}{G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

## Capitolo 14

# Riepilogo Equazioni

Le equazioni che governano il problema dell'Elasticità Lineare, per i materiali elastici, omogenei ed isotropi, sono: Equazioni indefinite di equilibrio di Cauchy:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{array} \right.$$

Equazioni di Saint-Venant (di cui solo tre risultano linearmente indipendenti):

$$b) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{array} \right.$$

Equazioni di Equilibrio al contorno:

$$c) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = f_x \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = f_y \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z = f_z \end{array} \right. \quad (\text{Si ricordi che } \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy})$$

Equazioni di Vincolo:

$$d) \sum_k \frac{\partial f_s(\vec{x})}{\partial k} U_k = 0 \quad (s = 1, 2, 3)$$

Legami Costitutivi:

$$e) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right) \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} \left( \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \right) \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} \left( \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right) \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{array} \right.$$

Legame fra Componenti di deformazione e spostamenti:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial k} + \frac{\partial U_k}{\partial i} \right)$$



## Capitolo 15

# Problema di Saint-Venant

Ipotesi:

- Solido Prismatico, Linearmente Elastico, Omogeneo ed Isotropo.
- Sezione trasversale compatta (non sottile).
- Forze di Volume e di Superficie (sulla superficie laterale del prisma) nulle.
- Distribuzioni di pressioni con legge arbitraria sulle basi, tali da costituire un sistema equilibrato.

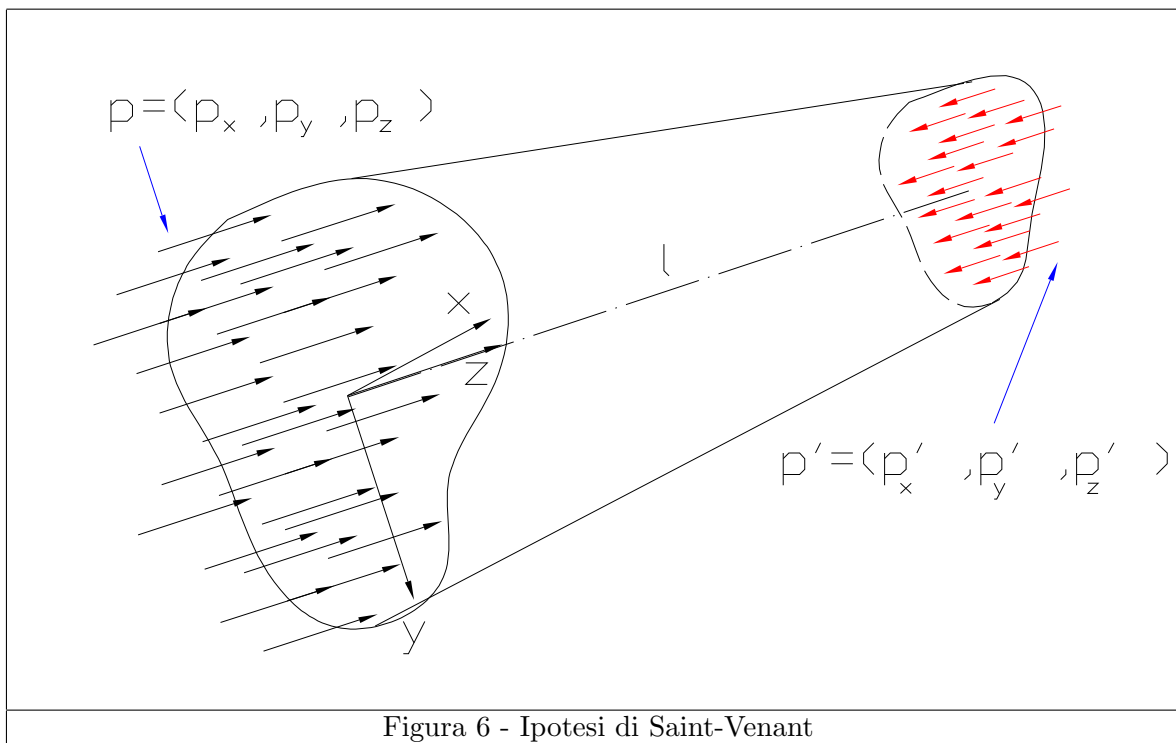


Figura 6 - Ipotesi di Saint-Venant

Sotto queste ipotesi, le equazioni precedenti diventano:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{zx} = -p_x \\ \tau_{zy} = -p_y \\ \sigma_z = -p_z \end{cases} \quad \text{per } z = 0$$

$$\begin{cases} \tau_{zx} = p'_x \\ \tau_{zy} = p'_y \\ \sigma_z = p'_z \end{cases} \quad \text{per } z = l$$

$$\begin{cases} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = 0 \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y = 0 \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \end{cases}$$

Mentre restano immutate:

$$e) \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right) & \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} \left( \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \right) & \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} \left( \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right) & \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial k} + \frac{\partial U_k}{\partial i} \right)$$

## Capitolo 16

# Metodo Semi-inverso

Se sulle precedenti equazioni si fanno le ulteriori ipotesi:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (= \tau_{yx})$$

il problema si semplifica notevolmente, e si ha:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} & = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} & = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} & = 0 \\ \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_z & \varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \sigma_z \end{cases}$$

$$\tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y = 0$$

### 16.1 Sforzo Normale Semplice

Si ha quando  $p_x = p'_x = p_y = p'_y = 0$   $p_z, p'_z \neq 0$ . Si ottiene:

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0 \Rightarrow \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$$

Se  $p_z$  è costante su tutta la superficie, allora:

$$N = \int_A p_z dA = p_z \cdot A$$

## Capitolo 17

# Equazioni della Linea Elastica

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} \quad K = \frac{1}{r} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad \gamma = \chi \frac{T_y}{GA} \quad \varphi = q \frac{M_z}{GJ_p}$$

$\chi$  = Fattore di Taglio       $J_p$  = Momento di inerzia polare =  $J_x + J_y$        $q$  = Fattore di Torsione

$$\frac{dN}{dz} = -q_z \quad \frac{dM_x}{dz} = T_y + m_x \quad \frac{dT_y}{dz} = -q_y \quad \frac{dM_z}{dz} = -m_z$$

$$dU_z = \varepsilon dz = \frac{N}{EA} dz \quad d\alpha_x = K dz = \frac{M_x}{EJ_x} dz$$

$$dU_y^{(T)} = \gamma dz = \chi \frac{T_y}{GA} dz \quad d\theta = \varphi dz = q \frac{M_z}{GJ_p} dz$$

$$dU_y^{(M)} = -\alpha_x dz \quad U_y = U_y^{(T)} + U_y^{(M)}$$

$$\frac{dU_z}{dz} = \varepsilon \quad \alpha_x + \frac{dU_y}{dz} = \gamma \quad \frac{d\alpha_x}{dz} = K = \frac{1}{r} \quad \frac{d\theta}{dz} = \varphi$$

$$\frac{d^4 U_y}{dz^4} = \frac{1}{EJ_x} \left( q_y - \frac{dm_x}{dz} \right) - \frac{\chi}{GA} \frac{d^2 q_y}{dz^2} \quad (\text{TAGLIO E FLESSIONE})$$

$$\frac{d^2 U_z}{dz^2} = -\frac{1}{EA} q_z \quad (\text{TRAZIONE})$$

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} = -\frac{q}{GJ_p} m_z \quad (\text{TORSIONE})$$

**SE SI PONE**  $q_Z = m_X = m_Z = 0$ , si ha:

$$\frac{d^4 U_y}{dz^4} = \frac{q_y}{EJ_x} - \frac{\chi}{GA} \frac{d^2 q_y}{dz^2} \quad \frac{d^2 U_z}{dz^2} = 0 \quad \frac{d^2 \theta}{dz^2} = 0$$

**SE SI TRASCURANO LE DEFORMAZIONI DA TAGLIO, SI HA:**

$$\frac{d^4 U_y}{dz^4} = \frac{q_y}{EJ_x} \Rightarrow \frac{d^2 U_y}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_x}$$

## 17.1 Linea elastica in presenza di discontinuità

L'integrazione della  $\frac{d^4 U_y}{dz^4} = \frac{q_y}{EJ}$  è sovente resa più complicata a causa della presenza di discontinuità. In tali casi si possono seguire sostanzialmente due strade, quella dell'uso delle funzioni di singolarità, ovvero quella della suddivisione dell'intervallo d'integrazione in tratti in cui le funzioni in gioco siano continue.

Va preliminarmente osservato che né la funzione  $U$  né la sua derivata prima  $U'$  possono presentare discontinuità. Infatti, nel primo caso, si avrebbero rotture con traslazione di una parte di trave rispetto all'altra in direzione ortogonale all'asse della stessa trave e, nel secondo caso, si avrebbero delle cuspidi, ossia una medesima sezione ruoterebbe diversamente a seconda che appartenga ad una porzione di trave od all'altra immediatamente contigua.

In realtà va tuttavia osservato che le discontinuità in  $U$  ed  $U'$  si possono avere in presenza di particolari sconnessioni interne del tipo  $T = 0$  (glifo) ed  $M = 0$  (cerniera).

In generale le discontinuità possono viceversa interessare le derivate seconde, terze e quarte della funzione  $U$ . Tali discontinuità si verificano sia in presenza di discontinuità nella rigidezza flessionale  $EJ$ , sia in presenza di discontinuità nel diagramma del momento flettente  $M(z)$ , sia in quello del taglio  $T(z)$  sia nel carico  $p(z)$ , come risulta evidente dalle relazioni:

$$\begin{aligned} EJ U'' &= -M(z) \\ (EJ U'')' &= -T(z) \\ (EJ U'')'' &= q_y \end{aligned}$$

Cause di discontinuità possono perciò essere:

1. variazioni brusche di sezione
2. variazioni brusche nel carico ripartito  $q_y$
3. coppie concentrate
4. forze concentrate

In tutti questi casi si può procedere suddividendo l'intervallo di integrazione in tratti in cui le funzioni in gioco siano continue, tenendo tuttavia presente che, oltre alle condizioni al contorno, occorre considerare le condizioni di raccordo fra un tratto e l'altro. Le condizioni di raccordo devono garantire sia il rispetto sia delle condizioni di continuità di sia di quelle di discontinuità. Illustriamo questo concetto con alcuni esempi.

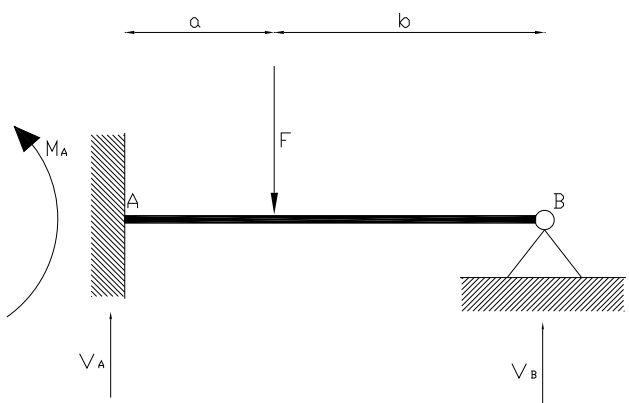
### 17.1.1 DISCONTINUITÀ DEL TAGLIO

La presenza della forza concentrata  $F$  dà luogo ad una discontinuità nel taglio  $T$  nella sezione in cui è applicata la stessa forza. Occorre perciò dividere l'intervallo  $0 \leq z \leq l$  in due intervalli e ricercare in ognuno di essi la linea elastica ossia le funzioni:

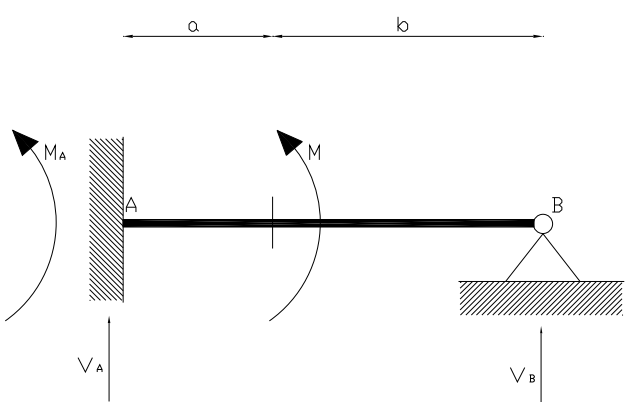
$$U_1 = U(z) \quad \text{per } 0 \leq z \leq a$$

$$U_2 = U(z) \quad \text{per } 0 \leq z \leq b$$

Questa determinazione richiede  $4 + 4 = 8$  costanti di integrazione e quindi alle 4 condizioni imposte dai vincoli in  $A$  e  $B$ , occorre aggiungere le 4 condizioni di raccordo come qui descritto nella seguente figura.

	<p>Condizioni Geometriche:</p> $U_1 = U_2$ $U'_1 = U'_2$ <p>Condizioni Statiche:</p> $(EJU''_2)' = (EJU''_1)' - F$ $EJU''_1 = EJU''_2$
- Discontinuità del Taglio -	

### 17.1.2 DISCONTINUITÀ DEL MOMENTO

	<p>Condizioni Geometriche:</p> $U_1 = U_2$ $U'_1 = U'_2$ <p>Condizioni Statiche:</p> $(EJU''_2)' = (EJU''_1)'$ $EJU''_2 = EJU''_1 - M$
- Discontinuità del Momento -	

17.1.3 DISCONTINUITÀ DEL CARICO

	<p>Condizioni Geometriche:</p> $U_1 = U_2$ $U'_1 = U'_2$ <p>Condizioni Statiche:</p> $(EJU''_2)' = (EJU''_1)'$ $EJU''_1 = EJU''_2$
- Discontinuità del Carico -	

17.1.4 DISCONTINUITÀ DI VINCOLO

	<p>Condizioni Geometriche:</p> $U_1 = U_2$ <p>Condizioni Statiche:</p> $(EJU''_2)' = (EJU''_1)'$ $EJU''_1 = 0$
- Discontinuità di Vincolo -	

## Capitolo 18

# Equazioni di Muller-Breslau

Atte alla risoluzioni delle strutture Iperstatiche

$$\eta_i = \eta_{i0} + \eta_{ia} + \sum_{k=1}^n \eta_{ik} X_k$$

$\eta_i$  = Spostamento relativo effettivo che le sconnessioni compiono in dir.  $X_i$

$\eta_{i0}$  = Spostamento rel. tra le facce della sconnessione in dir.  $X_i$  prodotto dai carichi esterni

$\eta_{ia}$  = Sp.rel.dovuto alle autotensioni o dilatazioni termiche

$\eta_{ik}$  = sp.rel.prodotto da  $X_k$

Se la sconnessione avviene in una sezione priva di distorsioni ANELASTICHE, allora:

$$\eta_i = 0$$

Per ogni tratto di travatura, si ha:

$$\begin{aligned}\eta_{ia} = \eta_{ic} + \eta_{it} &= \left[ - \sum_v C_i \Delta c - \sum_w m_i \theta \right] + \left[ \int_z N_i \alpha t_0 dz + \int_z M_i \frac{\alpha \Delta t}{h} dz \right] \\ \eta_{i0} &= \int_z \frac{N_i N_0}{EA} dz + \int_z \frac{M_i M_0}{EJ} dz + \int_z \chi \frac{T_i T_0}{GA} dz \\ \eta_{ik} &= \int_z \frac{N_i N_k}{EA} dz + \int_z \frac{M_i M_k}{EJ} dz + \int_z \chi \frac{T_i T_k}{GA} dz\end{aligned}$$

Per considerarle i valori globali, i termini suddetti vanno sommati tra loro per ogni trave facente parte della struttura.

**Caratteristiche agenti nel sist. principale, dovute ai SOLI carichi ESTERNI:**

$$N_0, M_0, T_0$$

**Caratteristiche agenti nel sist. principale, dovute alla SOLA  $X_k$ :**

$$N_k, M_k, T_k$$

**Caratteristiche di Sollecitazione Complessive:**

$$\begin{aligned}N &= N_0 + \sum_{k=1}^n N_k X_k \\ M &= M_0 + \sum_{k=1}^n M_k X_k \\ T &= T_0 + \sum_{k=1}^n T_k X_k\end{aligned}$$



## 18.1 Travature Reticolari

$$\eta_{ia} = - \sum_v C_i \Delta c + \sum_a S_i \alpha t_0 l$$

$$\eta_{i0} = \sum_{i=1}^a S_i S_0 p_i \quad \eta_{ik} = \sum_{i=1}^a S_i S_k p_i$$

$$p_i = \frac{l_i}{EA_i} = \text{Coeff. di deformabilità o estensibilità della } i\text{-esima asta}$$

$$S_i = \text{Sforzo Normale della } i\text{-esima asta}$$

## 18.2 Caso di una sola incognita Iperstatica

Nel caso si abbia a che fare con un sistema una volta iperstatico (o una volta staticamente indeterminato), il sistema di equazioni si riduce ad una sola equazione nell'incognita  $X_1$ :

$$\eta_1 = \eta'_{10} + \eta'_{1a} + \eta'_{11} \cdot X_1 = 0$$

dove

$$\eta_{10} = \int_s \frac{M_0 M_1}{EJ} ds + \int_s \frac{N_0 N_1}{EA} ds + \int_s \chi \frac{T_0 T_1}{GA} ds$$

$$\eta_{11} = \int_s \frac{M_1^2}{EJ} ds + \int_s \frac{N_1^2}{EA} ds + \int_s \chi \frac{T_1^2}{GA} ds$$

$$\eta_{1a} = \eta_{1c} + \eta_{1t} = \left[ - \sum_v C_1 \Delta c - \sum_w m_1 \theta \right] + \left[ \int_z N_1 \alpha t_0 dz + \int_z M_1 \frac{\alpha \Delta t}{h} dz \right]$$

$v$  = numero di cedimenti anelastici traslazionali;  $w$  = n.di cedimenti anelastici rotazionali.

Per risolvere, quindi, questo genere di problema è sufficiente costruire la seguente tabella:

	$M_0$	$M_1$	$M_0 \cdot M_1$	$M_1^2$	$N_0$	$N_1$	$N_0 \cdot N_1$	$N_1^2$	$T_0$	$T_1$	$T_0 \cdot T_1$	$T_1^2$
Tratto $AB$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Tratto $BC$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Tratto $CD$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
...	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Il calcolo delle caratteristiche di sollecitazione va esteso a tutta la struttura. Si noti che essa viene suddivisa in tratti semplici (Tratto  $AB$ , Tratto  $BC$ , ecc.).

**N.B. i vari coefficienti dell'equazione  $\eta_{10}, \eta_{11}$  ecc. così come sono stai riportati sono relativi ad un solo tratto del sistema in esame. Va da se che i coefficienti che compaiono nell'equazione, si ottengono sommando i vari termini tratto per tratto:**

$$\eta'_{10} = \sum_r \eta_{10} \quad (\text{con } r = \text{numero di tratti del sistema})$$

### 18.3 Caso di due incognite Iperstatiche

Nel caso si abbia a che fare con un sistema due volte iperstatico (o due volte staticamente indeterminato), il sistema di equazioni si riduce ad un sistema di due quazioni in due incognite  $X_1$  ed  $X_2$ :

$$\eta_1 = \eta'_{10} + \eta'_{1a} + \eta'_{11} \cdot X_1 + \eta'_{12} \cdot X_2 = 0$$

$$\eta_2 = \eta'_{20} + \eta'_{2a} + \eta'_{21} \cdot X_1 + \eta'_{22} \cdot X_2 = 0$$

dove

$$\eta_{10} = \int_s \frac{M_0 M_1}{EJ} ds + \int_s \frac{N_0 N_1}{EA} ds + \int_s \chi \frac{T_0 T_1}{GA} ds$$

$$\eta_{1a} = \eta_{1c} + \eta_{1t} = \left[ - \sum_v C_1 \Delta c - \sum_w m_1 \theta \right] + \left[ \int_z N_1 \alpha t_0 dz + \int_z M_1 \frac{\alpha \Delta t}{h} dz \right]$$

$$\eta_{11} = \int_s \frac{M_1^2}{EJ} ds + \int_s \frac{N_1^2}{EA} ds + \int_s \chi \frac{T_1^2}{GA} ds$$

$$\eta_{12} = \int_s \frac{M_1 M_2}{EJ} ds + \int_s \frac{N_1 N_2}{EA} ds + \int_s \chi \frac{T_1 T_2}{GA} ds$$

$$\eta_{20} = \int_s \frac{M_0 M_2}{EJ} ds + \int_s \frac{N_0 N_2}{EA} ds + \int_s \chi \frac{T_0 T_2}{GA} ds$$

$$\eta_{2a} = \eta_{2c} + \eta_{2t} = \left[ - \sum_v C_2 \Delta c - \sum_w m_2 \theta \right] + \left[ \int_z N_2 \alpha t_0 dz + \int_z M_2 \frac{\alpha \Delta t}{h} dz \right]$$

$$\eta_{21} = \eta_{12} = \int_s \frac{M_1 M_2}{EJ} ds + \int_s \frac{N_1 N_2}{EA} ds + \int_s \chi \frac{T_1 T_2}{GA} ds$$

$$\eta_{22} = \int_s \frac{M_2^2}{EJ} ds + \int_s \frac{N_2^2}{EA} ds + \int_s \chi \frac{T_2^2}{GA} ds$$

E' necessario estendere la tabella precedente, aggiungendo la seguente:

	$M_2$	$M_0 \cdot M_2$	$M_1 \cdot M_2$	$M_2^2$	$N_2$	$N_0 \cdot N_2$	$N_1 \cdot N_2$	$N_2^2$	$T_2$	$T_0 \cdot T_2$	$T_1 \cdot T_2$	$T_2^2$
Tratto $AB$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Tratto $BC$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Tratto $CD$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
...	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

I vari intervalli di integrazione si impongono uguali alla lunghezza del tratto corrispondente: se si deve calcolare l'integrale relativo al tratto  $AB$  che ha lunghezza  $l$ , l'intervallo di integrazione sarà  $[0, l]$ .

$$\int_0^l \dots ds$$

Anche in questo caso, per ottenere i coefficienti delle equazioni del sistema è necessario effettuare la sommatoria estesa a tutti tratti della struttura:

$$\eta'_{10} = \sum_r \eta_{10}$$