

- Scienza delle Costruzioni -

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale & Nucleare

(Prof.Stefano Bennati)

Prova Scritta del 11/01/2003

Prova Completa

(Praticò Andrea)

21 febbraio 2003

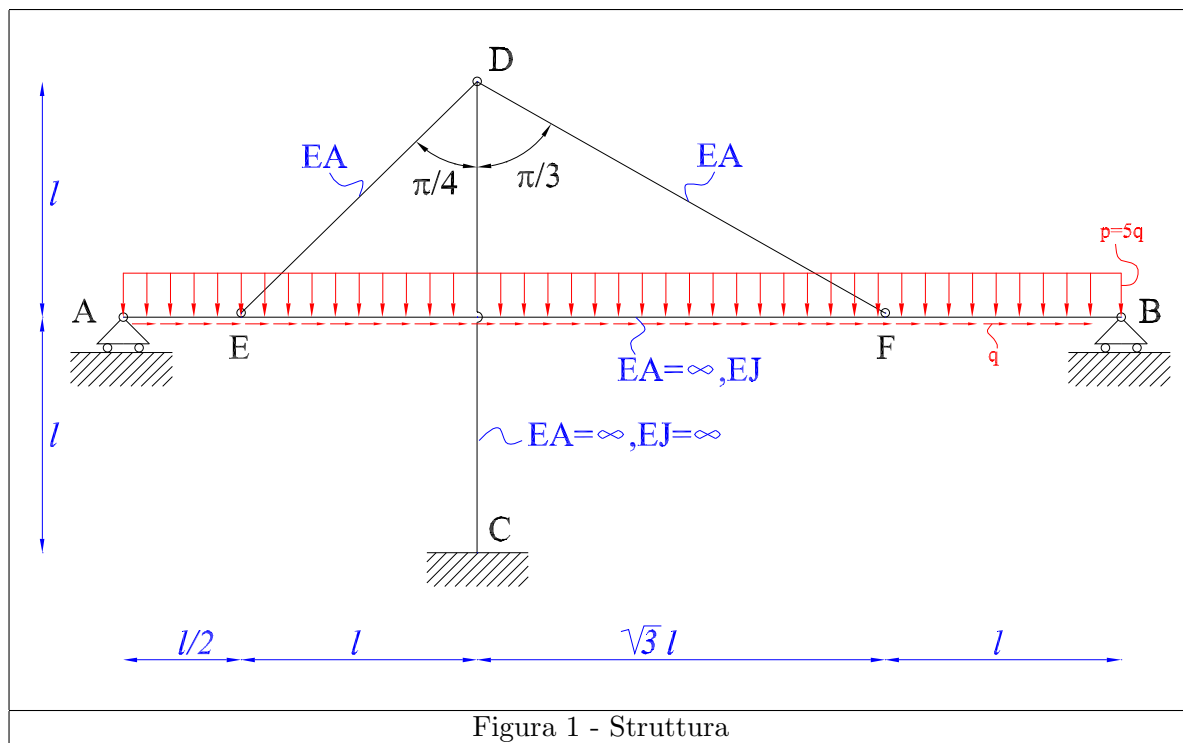
Traccia

Problema 1

Nel problema di Figura, la trave verticale CD è rigida, la trave di impalcato AB è inestensibile, mentre le travi ED e DF sono estensibili.

Scelto lo sforzo normale dell'asta DF come incognita iperstatica X :

- disegnare i sistemi F_0 ed F_1 e determinare le espressioni delle Caratteristiche di Sollecitazione (CdS) utili ai fini dei calcoli successivi;
- calcolare i coefficienti dell'equazione di elasticità e, conseguentemente, il valore incognito di X (porre, per semplicità, nella soluzione $A \cdot l^2 = J$);
- disegnare il diagramma del momento flettente effettivo per la trave AB .



Problema 2

Considerando lo stesso problema precedente, nel caso in cui la cerniera in F interrompa la trave di impalcato AB ; risolvere il problema, determinando le forze reattive esterne ed interne.

Problema 3

Con riferimento al problema 2, considerare ora il caso in cui anche la cerniera in E interrompa la trave di impalcato AB ; la struttura risulta labile:

- a) assunto come parametro l'angolo di rotazione dell'asta AE (θ_1), determinare, in funzione di esso, lo spostamento virtuale (di tipo rigido infinitesimo per ogni singolo elemento) compatibile con tutti i vincoli;
- b) calcolare il lavoro virtuale delle forze attive esterne su tale spostamento virtuale.

Soluzione Problema 1

Sistema F_0

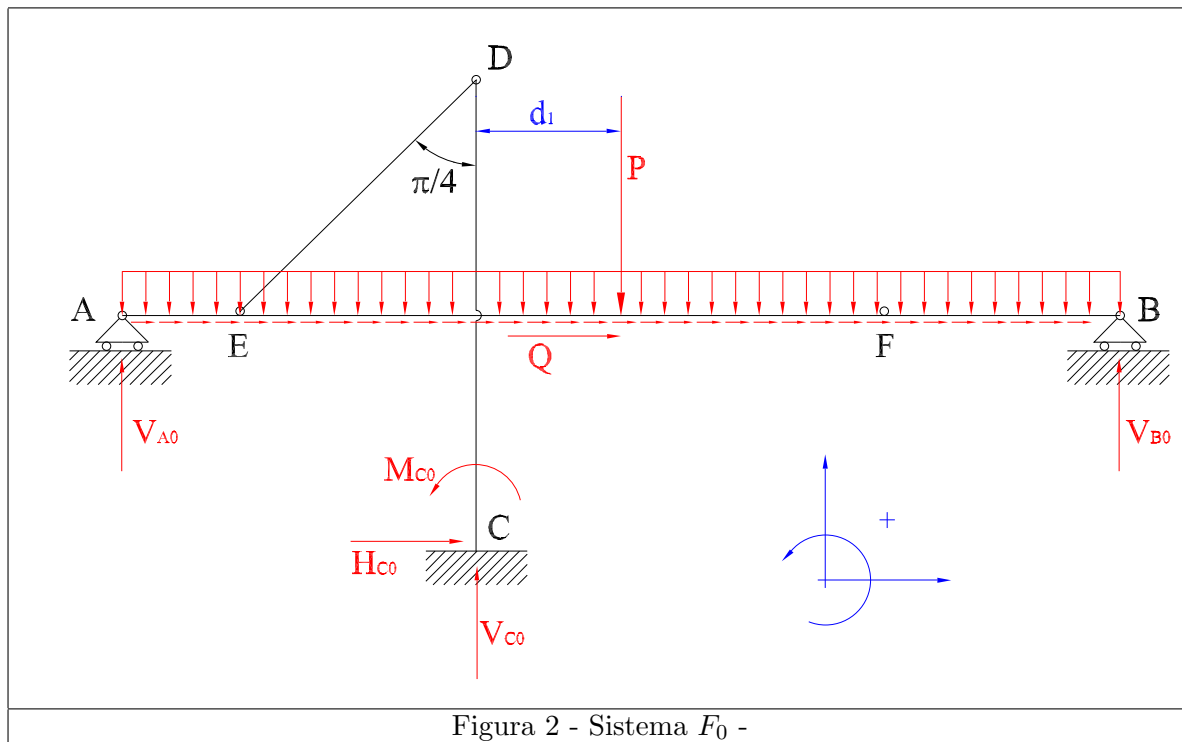


Figura 2 - Sistema F_0 -

$$\text{Si pone } L = \frac{l}{2} + l + \sqrt{3}l + l \Rightarrow L = \left(\frac{5}{2} + \sqrt{3}\right) \cdot l$$

$$P = p \cdot L = 5 \cdot q \cdot L \quad Q = q \cdot L$$

ovvero

$$Q = (2.5 + \sqrt{3})ql \quad P = 5(2.5 + \sqrt{3})ql$$

$$\text{si ha: } d_1 = \frac{L}{2} - \frac{3}{2}l \Rightarrow d_1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2} \right) l$$

Equilibrio Globale

$$H_{C0} + Q = 0 \Rightarrow H_{C0} = -(2.5 + \sqrt{3})ql$$

$$V_{A0} + V_{B0} + V_{C0} - P = 0$$

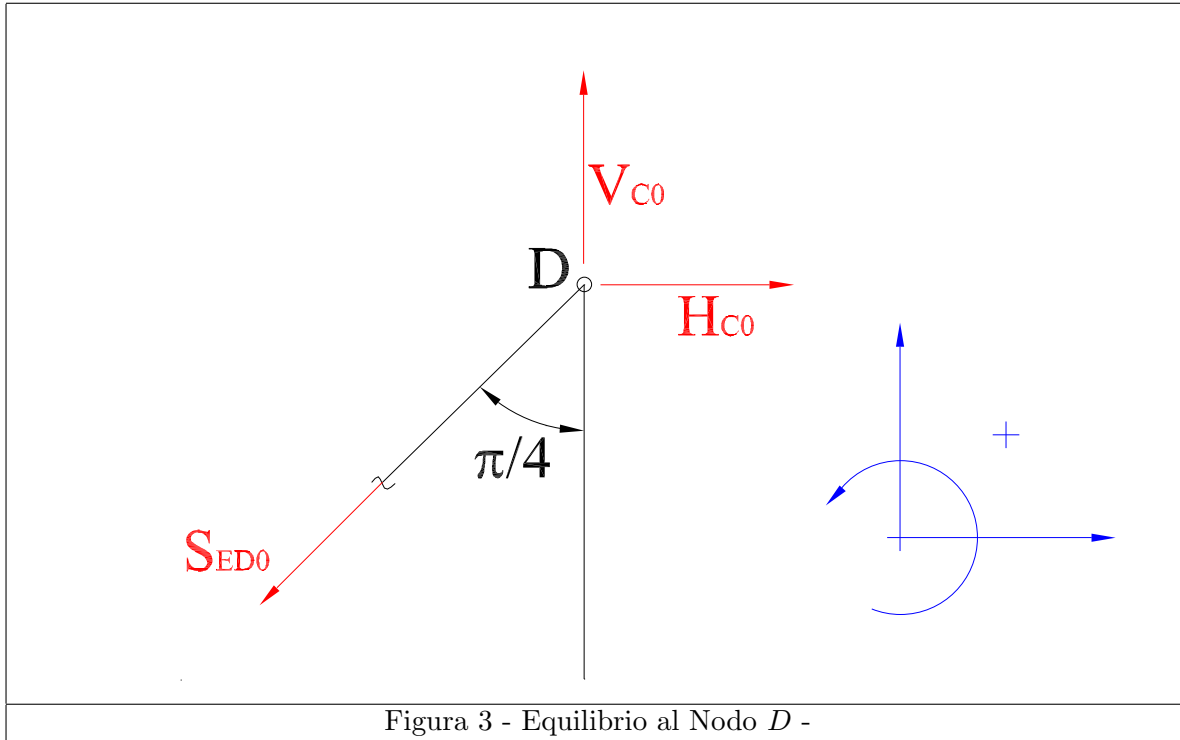
$$\text{C) } M_{C0} - V_{A0} \cdot \frac{3}{2}l - P \cdot d_1 - Ql + V_{B0} \left(L - \frac{3}{2}l \right) = 0$$

Equazione ausiliaria 1

Rotazione asta CD intorno a D :

$$H_{C0} \cdot 2l + M_{C0} = 0 \Rightarrow M_{C0} = 2(2.5 + \sqrt{3})ql^2$$

Equilibrio al Nodo D



$$\begin{cases} -\frac{S_{ED0}}{\sqrt{2}} + H_{C0} = 0 \\ -\frac{S_{ED0}}{\sqrt{2}} + V_{C0} = 0 \end{cases} \Rightarrow V_{C0} = H_{C0} = -(2.5 + \sqrt{3})ql$$

$$S_{ED0} = \sqrt{2}H_{C0} = -\sqrt{2}(2.5 + \sqrt{3})ql$$

$$\begin{cases} -V_{A0} \cdot \frac{3}{2}l + (L - \frac{3}{2}l) V_{B0} = P \cdot d_1 + Q \cdot l - M_{C0} \\ V_{A0} + V_{B0} = P - V_{C0} \end{cases}$$

La cui soluzione è:

$$V_{A0} = \left(\frac{7\sqrt{3}}{2} + \frac{33}{4} \right) ql \quad V_{B0} = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{27}{4} \right) ql$$

Per determinare i coefficienti dell'equazione di elasticità, occorre determinare il momento flettente della trave AB e lo sforzo normale delle aste ED e DF ; lo sforzo normale nelle aste ED e DF vale, rispettivamente:

$$S_{ED0} = -5.985 \cdot ql \quad S_{DF0} = 0$$

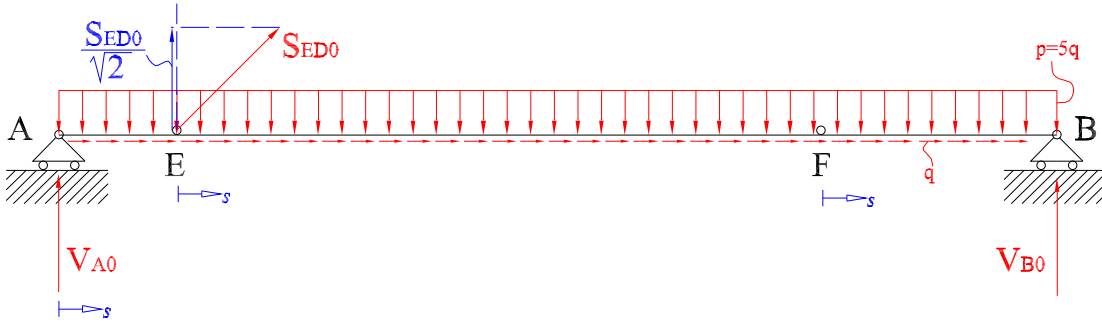


Figura 4 - Momento Flettente Trave AB sistema F_0 -

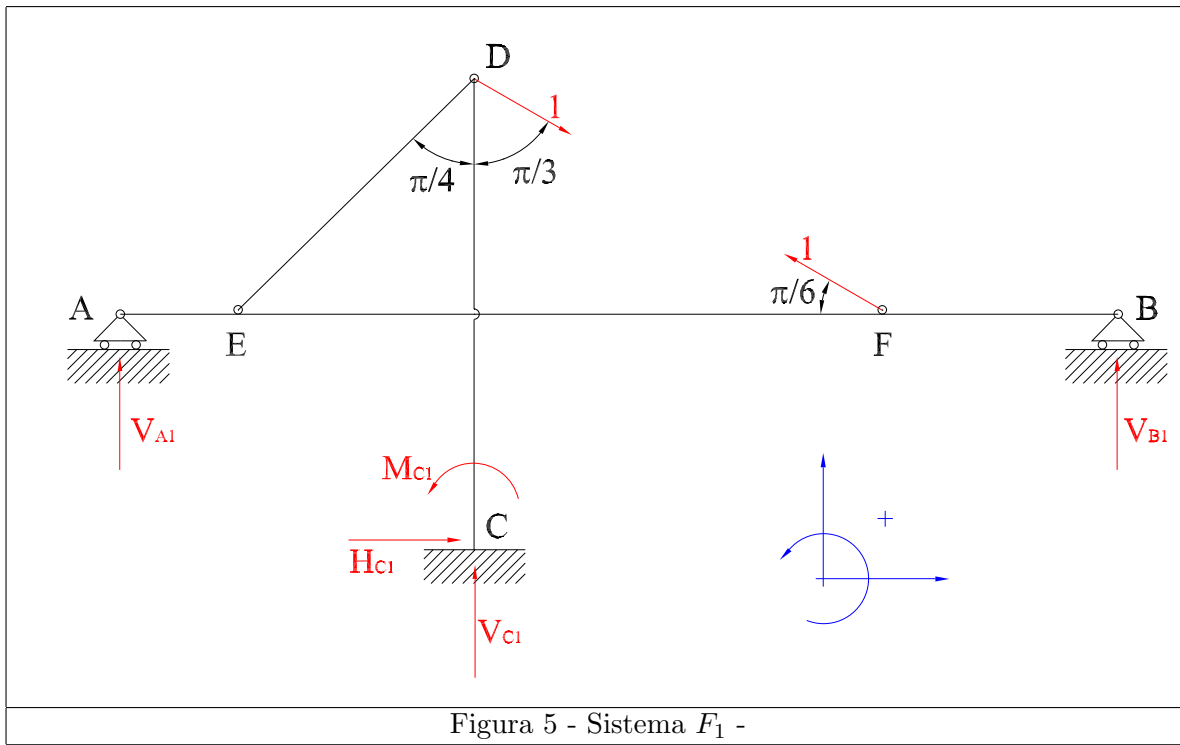
$$V_{A0} = 14.31 \cdot ql \quad V_{B0} = 11.08 \cdot ql \quad \frac{S_{ED0}}{\sqrt{2}} = -4.232 \cdot ql$$

AE	$0 \leq s \leq \frac{l}{2}$	$M(s) = V_{A0} \cdot s - 5q \frac{s^2}{2}$
EF	$0 \leq s \leq (1 + \sqrt{3})l$	$M(s) = V_{A0} \left(\frac{l}{2} + s \right) + \frac{S_{ED0}}{\sqrt{2}} \cdot s - \frac{5}{2}q \left(\frac{l}{2} + s \right)^2$
FB	$0 \leq s \leq l$	$M(s) = V_{B0}(l - s) - \frac{5}{2}q(l - s)^2$
ED	$0 \leq s \leq \sqrt{2}l$	$N(s) = S_{ED0}$
DF	$0 \leq s \leq 2l$	$N(s) = 0$

sostituendo i valori:

AE	$0 \leq s \leq \frac{l}{2}$	$M(s) = 14.31 \cdot qls - 2.5 \cdot qs^2$
EF	$0 \leq s \leq (1 + \sqrt{3})l$	$M(s) = -2.5 \cdot q(s^2 - 3.031 \cdot ls - 2.612 \cdot l^2)$
FB	$0 \leq s \leq l$	$M(s) = -2.5 \cdot q(s - l)(s + 3.432 \cdot l)$
ED	$0 \leq s \leq \sqrt{2}l$	$N(s) = -5.985 \cdot ql$
DF	$0 \leq s \leq 2l$	$N(s) = 0$

Sistema F_1



Equilibrio Globale

$$H_{C1} + 1 \cdot \sin(60) - 1 \cdot \cos(30) = 0 \Rightarrow H_{C1} = 0$$

$$V_{A1} + V_{B1} + V_{C1} - 1 \cdot \cos(60) + 1 \cdot \sin(30) = 0 \Rightarrow V_{A1} + V_{B1} + V_{C1} = 0$$

$$C) - V_{A1} \cdot \frac{3}{2}l + M_{C1} + (1 + \sqrt{3})l \cdot V_{B1} = 0$$

Equazione Ausiliaria 1

Rotazione asta CD intorno a D :

$$M_{C1} + H_{C1} \cdot 2l = 0 \Rightarrow M_{C1} = 0$$

Equilibrio al Nodo D

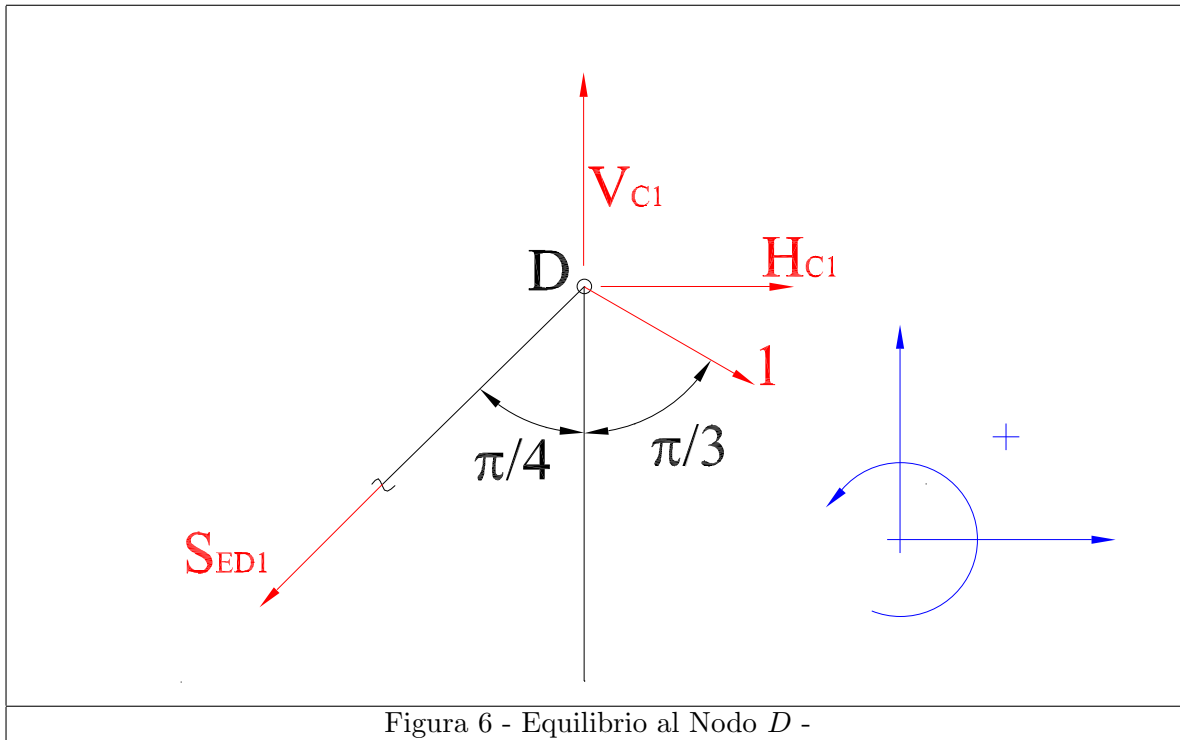
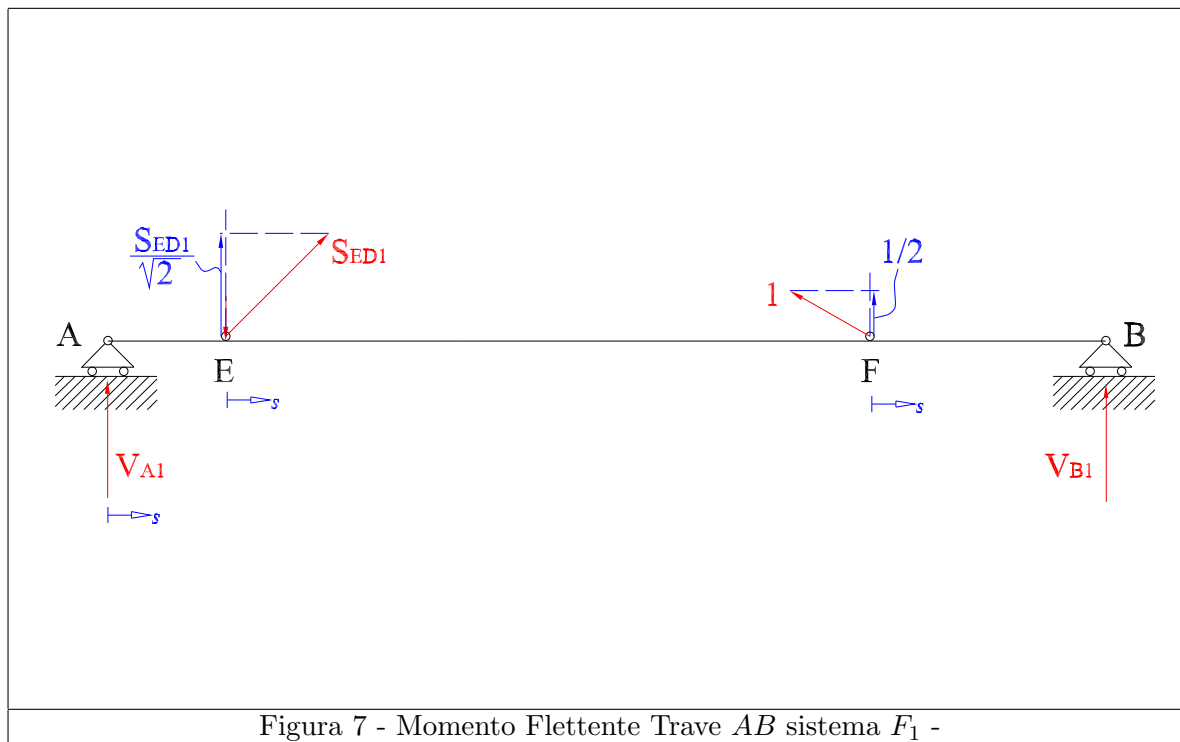


Figura 6 - Equilibrio al Nodo D -

$$\begin{aligned}
 -\frac{S_{ED1}}{\sqrt{2}} + H_{C1} + \sin(60) &= 0 \Rightarrow S_{ED1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \\
 -\frac{S_{ED1}}{\sqrt{2}} - \cos(60) + V_{C1} &= 0 \Rightarrow V_{C1} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) \\
 \begin{cases} V_{A1} + V_{B1} = -V_{C1} \\ -\frac{3}{2}V_{A1} + (1 + \sqrt{3})V_{B1} = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

il quale sistema ha per soluzione:

$$V_{A1} = -\frac{2}{13}(4 + \sqrt{3}) \quad V_{B1} = -\frac{3}{26}(3\sqrt{3} - 1)$$



$$V_{A1} = -0.882 \quad V_{B1} = -0.484 \quad \frac{S_{ED1}}{\sqrt{2}} = 0.866$$

AE	$0 \leq s \leq \frac{l}{2}$	$M(s) = V_{A1} \cdot s$
EF	$0 \leq s \leq (1 + \sqrt{3})l$	$M(s) = V_{A1} \left(\frac{l}{2} + s \right) + \frac{S_{ED1}}{\sqrt{2}} \cdot s$
FB	$0 \leq s \leq l$	$M(s) = V_{B1}(l - s)$
ED	$0 \leq s \leq \sqrt{2}l$	$N(s) = S_{ED1}$
DF	$0 \leq s \leq 2l$	$N(s) = 1$

sostituendo i valori:

AE	$0 \leq s \leq \frac{l}{2}$	$M(s) = -0.882 \cdot s$
EF	$0 \leq s \leq (1 + \sqrt{3})l$	$M(s) = -0.016 \cdot s - 0.441 \cdot l$
FB	$0 \leq s \leq l$	$M(s) = -0.484(l - s)$
ED	$0 \leq s \leq \sqrt{2}l$	$N(s) = 1.225$
DF	$0 \leq s \leq 2l$	$N(s) = 1$

Coefficienti di Influenza

	M_0	M_1	$M_0 \cdot M_1$
AE	$14.31ql \cdot s - 2.5q \cdot s^2$	$-0.882 \cdot s$	$2.205q \cdot s^2(s - 5.724l)$
EF	$-2.5q(s^2 - 3.031l \cdot s - 2.612l^2)$	$-0.016 \cdot s - 0.441 \cdot l$	$0.04q(s^3 + 24.53l \cdot s^2 - 86.12l^2s - 71.99l^3)$
FB	$-2.5q(s - l)(s + 3.432l)$	$-0.484(l - s)$	$-1.21q(s - l)^2(s + 3.432l)$

	M_1^2	N_0	N_1	$N_0 \cdot N_1$	N_1^2
AE	$0.778 \cdot s^2$	—	—	—	—
EF	$0.000256(s + 27.56l)^2$	—	—	—	—
FB	$0.234(s - l)^2$	—	—	—	—
ED	—	$-5.985ql$	1.225	$-7.332ql$	1.5
DF	—	0	1	0	1

L'equazione di elasticità è:

$$\eta_{10} + \eta_{11} \cdot X = 0 \Rightarrow X = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}}$$

in cui:

$$\begin{aligned} \eta_{10} = & \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} 2.205q \cdot s^2 (s - 5.724l) ds + \frac{1}{EJ} \int_0^{(1+\sqrt{3})l} 0.04q(s^3 + 24.53l \cdot s^2 - 86.12l^2 s - 71.99l^3) ds + \\ & + \frac{1}{EJ} \int_0^l -1.21q(s-l)^2 (s + 3.432l) ds + \frac{1}{EA} \int_0^{\sqrt{2}l} -7.332ql ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{11} = & \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} 0.778s^2 ds + \frac{1}{EJ} \int_0^{(1+\sqrt{3})l} 0.000256(s + 27.56l)^2 ds + \frac{1}{EJ} \int_0^l 0.234(s-l)^2 ds + \\ & + \frac{1}{EA} \int_0^{\sqrt{2}l} 1.5 ds + \frac{1}{EA} \int_0^{2l} ds \end{aligned}$$

Semplificando, si ottiene:

$$\eta_{10} = -\frac{ql^2}{E} \left[\frac{15.47l^2}{J} + \frac{10.37}{A} \right]$$

$$\eta_{11} = \frac{l}{E} \left[\frac{0.696l^2}{J} + \frac{4.12}{A} \right]$$

Da cui:

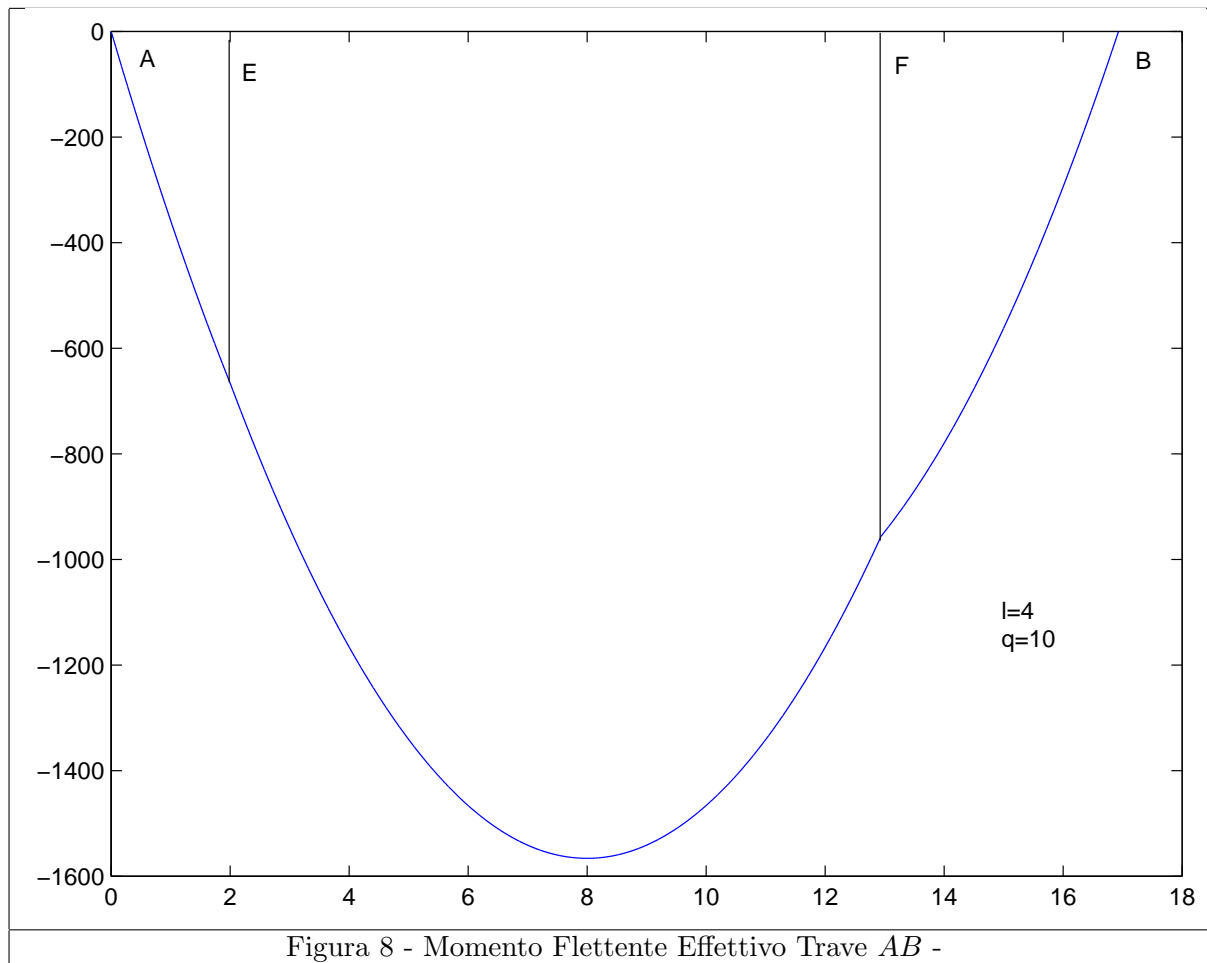
$$X = \frac{15.47 \cdot A \cdot l^2 + 10.37J}{0.696 \cdot A \cdot l^2 + 4.12J} q \cdot l$$

Ponendo $A \cdot l^2 = J$ si ottiene:

$$X = 5.365 \cdot q \cdot l$$

Considerando quest'ultimo valore di X e sapendo che il momento flettente effettivo è dato da: $M_{eff} = M_0 + X \cdot M_1$, si ricava l'andamento del momento flettente effettivo nei vari tratti della trave AB .

$$\begin{aligned} \text{AE } 0 \leq s \leq \frac{l}{2} : & \quad M(s) = -2.5q \cdot s^2 + 9.578ql \cdot s \\ \text{EF } 0 \leq s \leq (1 + \sqrt{3})l : & \quad M(s) = -2.5q(s^2 - 3l \cdot s - 1.665l^2) \\ \text{FB } 0 \leq s \leq l : & \quad M(s) = -2.5q(s-l)(s + 2.393l) \end{aligned}$$



Soluzione Problema 2

Se la cerniera in F interrompe la trave di impalcato, la struttura diviene isostatica, infatti $n = 5$ (n. delle travi), quindi i gradi di libertà complessivi sono $g.d.l. = 3 \cdot 5 = 15$; la molteplicità complessiva dei vincoli interni ed esterni è $m = 1 + 2 + 4 + 1 + 4 + 3 = 15$. Infine si osserva che i vari centri assoluti e relativi di istantanea rotazione, non risultano allineati.

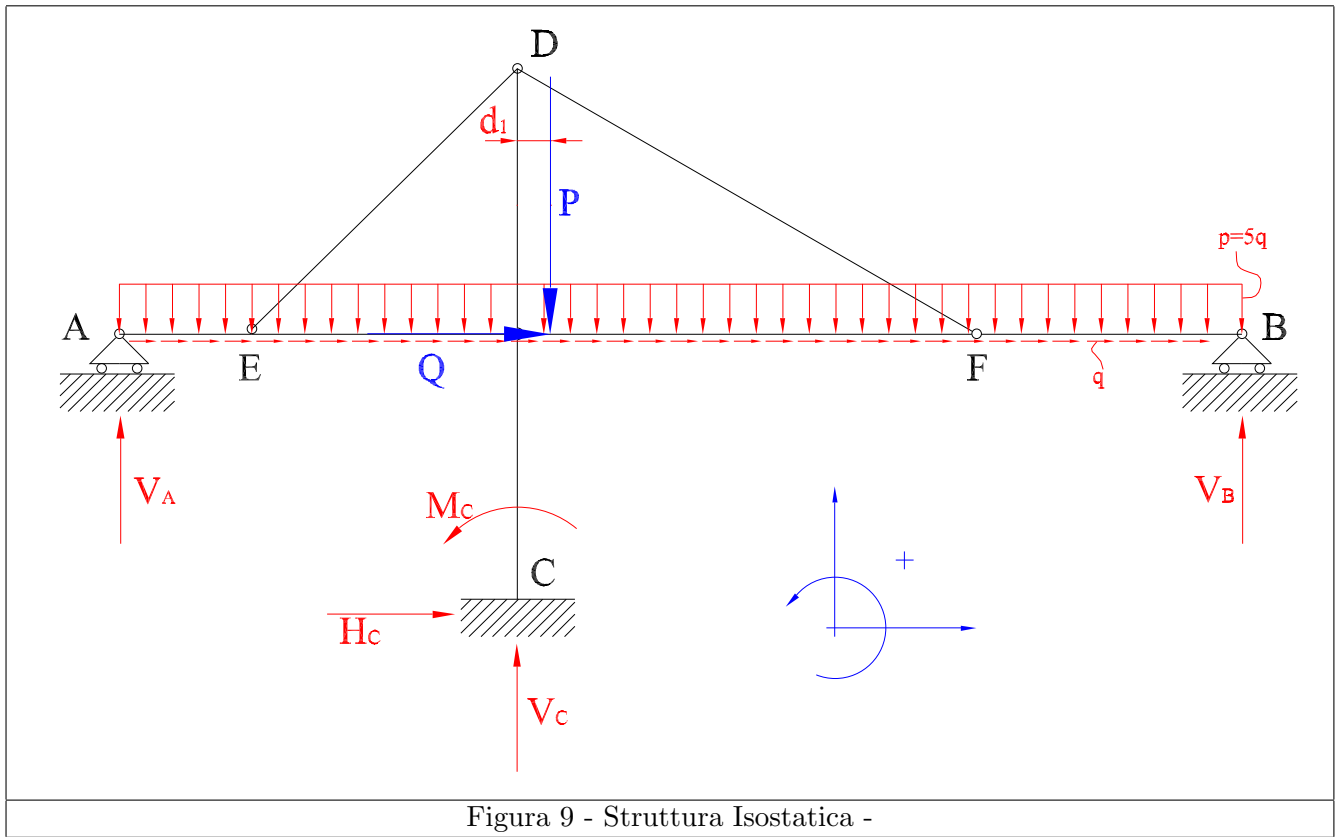


Figura 9 - Struttura Isostatica -

Equilibrio Globale

$$H_C + q \cdot L = 0 \Rightarrow H_C = -qL \Rightarrow H_C = -(2.5 + \sqrt{3})ql \Rightarrow H_C = -4.232ql$$

$$A + V_B + V_C - 5qL = 0$$

$$C) \quad -V_A \cdot \frac{3}{2}l + M_C - P \cdot d_1 - Ql + V_B(1 + \sqrt{3})l = 0$$

Equazione Ausiliaria 1

Equazione ausiliaria asta CD ; rotazione intorno a D :

$$M_C + H_C \cdot 2l = 0 \Rightarrow M_C = -2H_C \cdot l \Rightarrow M_C = 2(2.5 + \sqrt{3})ql^2 \Rightarrow M_C = 8.464ql^2$$

Equazione Ausiliaria 2

Equazione ausiliaria asta FB ; rotazione intorno ad F :

$$V_B \cdot l - 5q \frac{l^2}{2} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{5}{2}ql \Rightarrow V_B = 2.5ql$$

Sostituendo questi ultimi risultati nelle equazioni relative all'equilibrio globale, si ha:

$$V_A = -1.3154ql \quad V_C = 19.9757ql$$

Determiniamo le forze reattive interne nel nodo F :

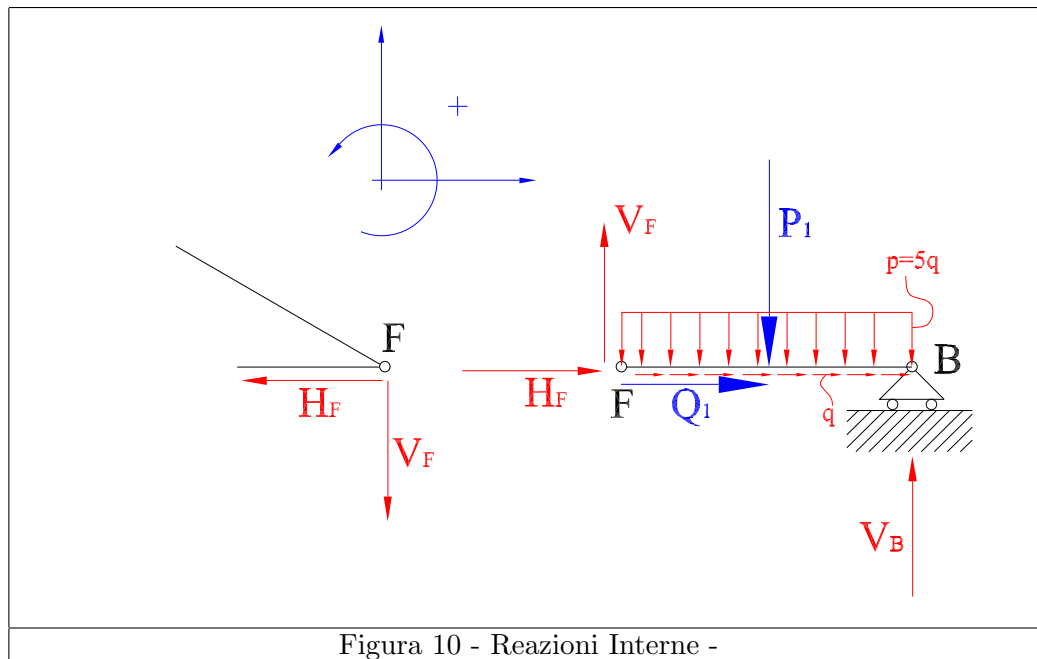


Figura 10 - Reazioni Interne -

$$P_1 = 5ql \quad Q_1 = ql$$

$$H_F + Q_1 = 0 \Rightarrow H_F = -ql$$

$$V_F + V_B - P_1 = 0 \Rightarrow V_F = 2.5ql$$

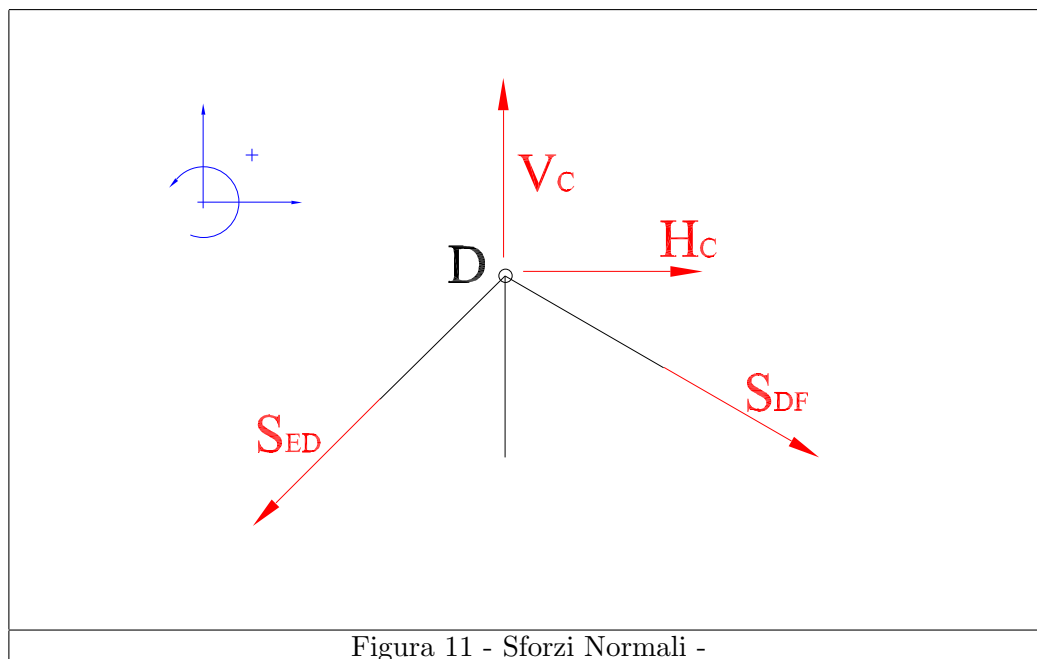


Figura 11 - Sforzi Normali -

$$-\frac{S_{ED}}{\sqrt{2}} + H_C + S_{DF} \sin(60) = 0$$

$$-\frac{S_{ED}}{\sqrt{2}} + V_C - S_{DF} \cos(60) = 0$$

dalle quali si ricavano:

$$S_{DF} = 17.7215ql \quad S_{ED} = 15.719ql$$

Soluzione Problema 3

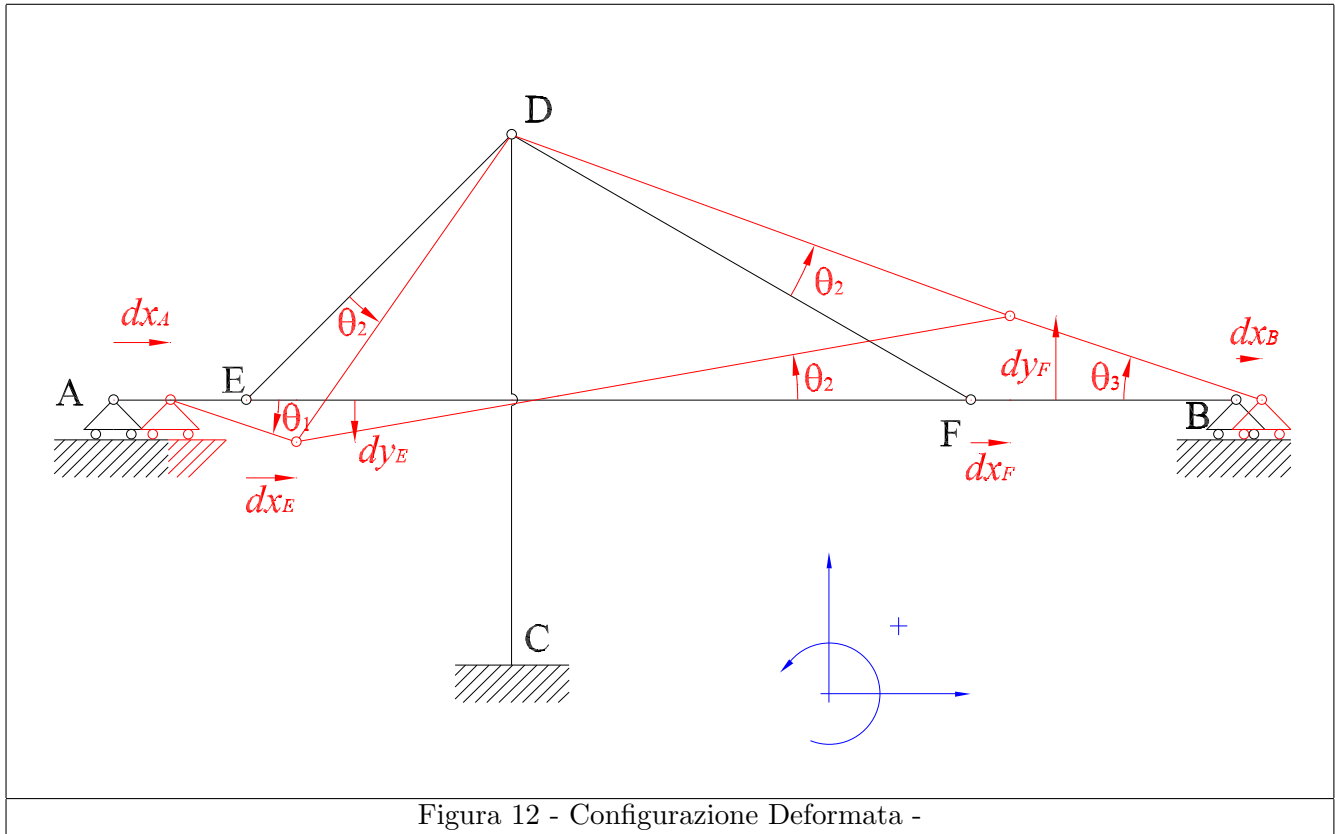


Figura 12 - Configurazione Deformata -

Si noti che il punto D è centro assoluto di istantanea rotazione per la struttura triangolare EDF , mentre le travi AE ed FB ruotano e traslano lungo l'asse x . La trave CD è fissa. Per tutte le travi facenti parte della struttura (travi considerate come corpi rigidi) valgono le relazioni:

$$dx_i = dx_j - \theta_k(y_i - y_j)$$

$$dy_i = dy_j + \theta_k(x_i - x_j)$$

Per il rispetto dei vincoli, si deve avere:

$$dx_D = 0 \quad dy_D = 0 \quad dx_C = 0 \quad dy_C = 0 \quad dy_A = 0 \quad dy_B = 0$$

$$\begin{cases} dx_A = dx_E - \theta_1(y_A - y_E) \\ dy_A = dy_E + \theta_1(x_A - x_E) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx_E = dx_A \\ dy_E = \frac{l}{2}\theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx_D = dx_E - \theta_2(y_D - y_E) \\ dy_D = dy_E + \theta_2(x_D - x_E) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx_E = l\theta_2 \\ dy_E = -l\theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx_D = dx_F - \theta_2(y_D - y_F) \\ dy_D = dy_F + \theta_2(x_D - x_F) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx_F = l\theta_2 \\ dy_F = \sqrt{3} \cdot l \cdot \theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx_B = dx_F - \theta_3(y_B - y_F) \\ dy_B = dy_F + \theta_3(x_B - x_F) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx_B = l\theta_2 \\ dy_F = -l\theta_3 \end{cases}$$

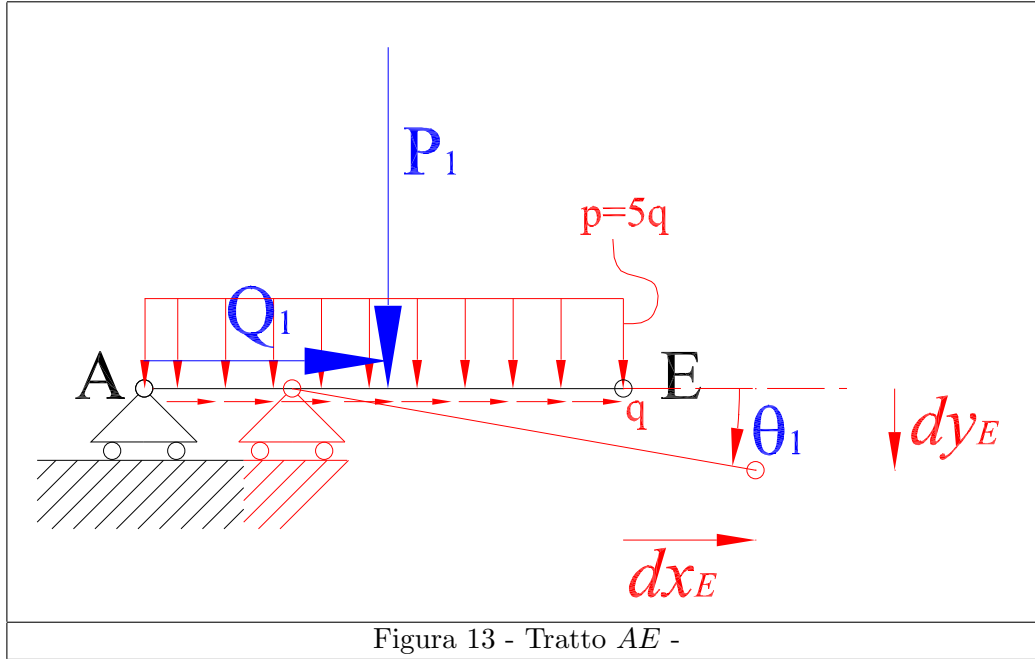
Si hanno le seguenti corrispondenze:

$$\theta_2 = -\frac{\theta_1}{2} \quad \theta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\theta_1$$

Riepilogando:

$$dx_A = -\frac{l}{2}\theta_1 \quad dx_E = -\frac{l}{2}\theta_1 \quad dy_E = \frac{l}{2}\theta_1 \quad dx_F = -\frac{l}{2}\theta_1 \quad dy_F = -\frac{\sqrt{3}l}{2}\theta_1 \quad dx_B = -\frac{l}{2}\theta_1$$

Calcolo del lavoro Virtuale delle Forze Attive



$$P_1 = \frac{5}{2}ql \quad Q_1 = \frac{ql}{2}$$

$$\mathcal{L}_{AE} = Q_1 \cdot dx_A + P_1 \cdot \frac{dy_E}{2} \Rightarrow \mathcal{L}_{AE} = \frac{3}{8}ql^2\theta_1$$

$$dx_M = dx_E - \theta_2(y_M - y_E) \quad dy_M = dy_E + \theta_2(x_M - x_E)$$
$$dx_M = -\frac{l}{2}\theta_1 \quad dy_M = \frac{1-\sqrt{3}}{4}l\theta_1$$
$$P_2 = 5(1 + \sqrt{3})ql \quad Q_2 = (1 + \sqrt{3})ql$$
$$\mathcal{L}_{EF} = Q_2 \cdot dx_M - P_2 \cdot dy_M$$

$$\mathcal{L}_{EF} = \frac{4 - \sqrt{3}}{2} q l^2 \theta_1$$

