

- Scienza delle Costruzioni -

Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica V.O.

(Prof.Stefano Bennati)

Prova Scritta del 11/01/2003

Prova Completa

(Praticò Andrea)

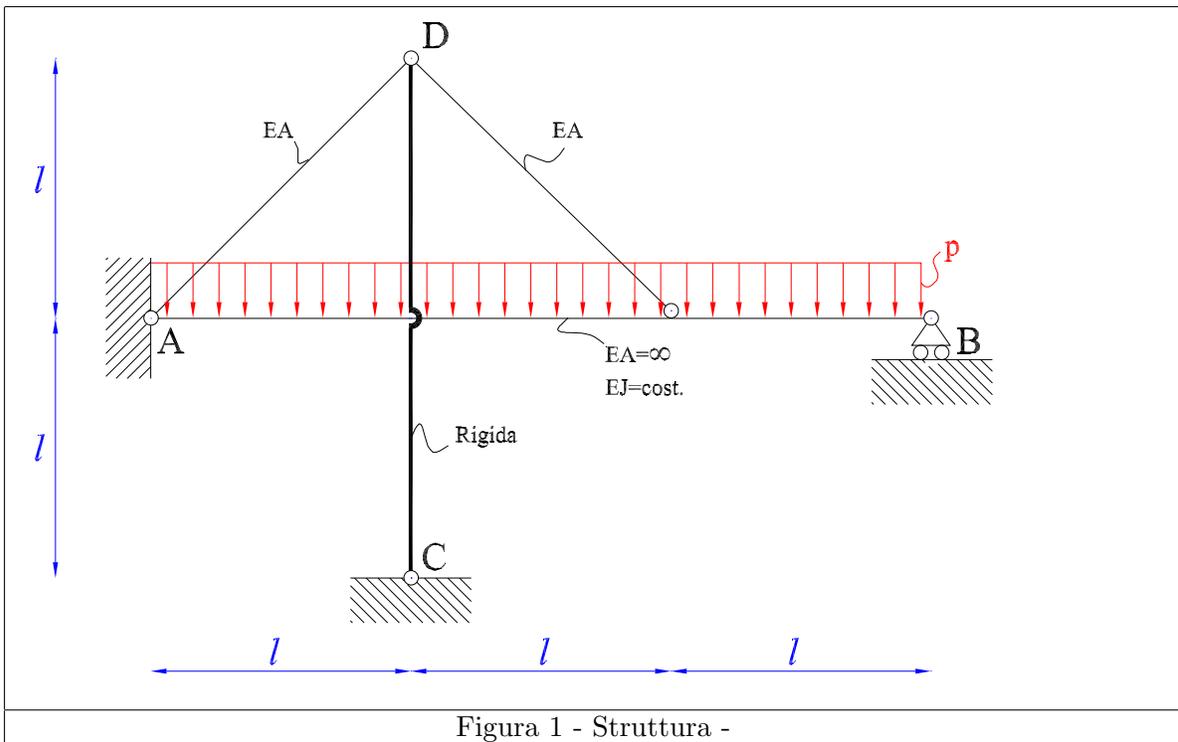
30 gennaio 2003

Traccia

Problema 1

Nel problema di figura, la trave verticale CD è rigida, la trave di impalcato AB è inestensibile. Scelto lo sforzo normale dell'asta DF come incognita iperstatica X :

- disegnare i sistemi F_0 ed F_1 e determinare le espressioni delle CdS utili ai fini dei calcoli successivi;
- calcolare i coefficienti dell'equazione di elasticità e, conseguentemente, il valore incognito di X [suggerimento: porre per semplicità, $Al^2 = J$];
- calcolare la rotazione della trave CD .



Problema 2

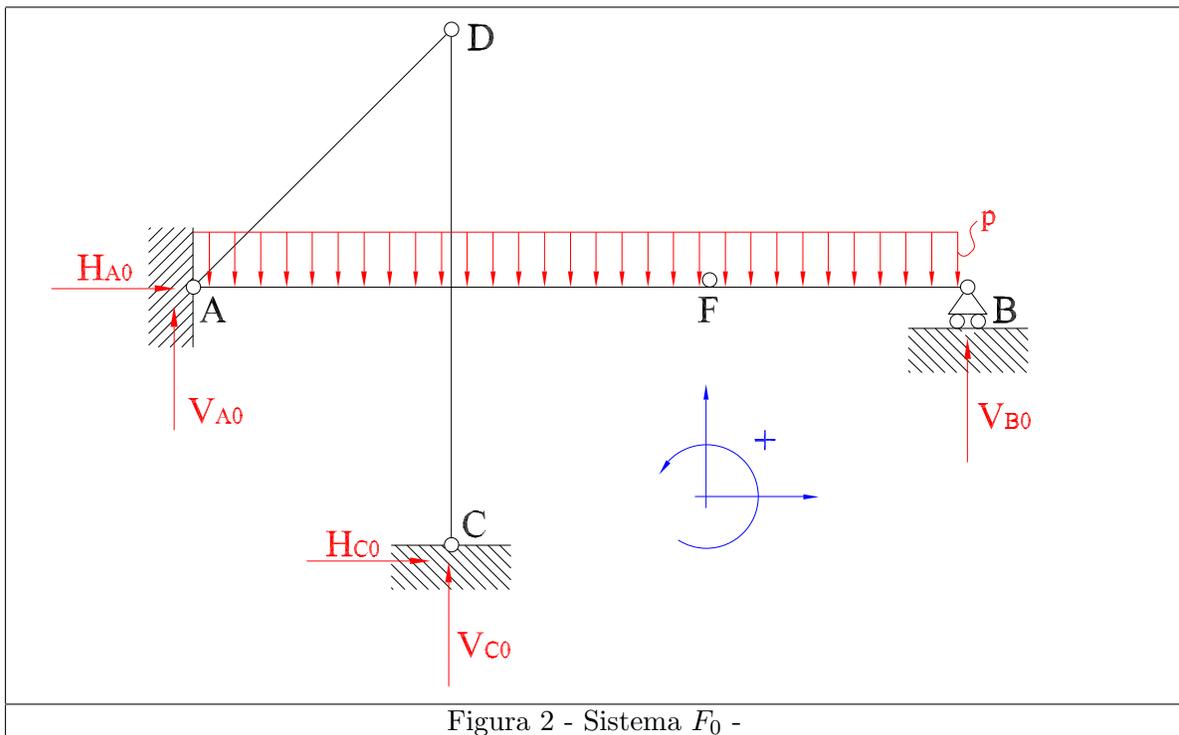
Considerare lo stesso problema della figura precedente nel caso in cui la cerniera F interrompa la trave di impalcato AB ; disegnare, inoltre, i relativi diagrammi quotati di T e di M .

Problema 3

Se ora la cerniera in A viene rimossa, la struttura diventa labile:
assunto come parametro l'angolo di rotazione dell'asta CD , θ_1 , determinare in funzione di esso lo spostamento virtuale (di tipo rigido infinitesimo per ogni singolo elemento) compatibile con tutti i vincoli.

Soluzione Problema 1

Sistema F_0



Equilibrio Globale:

$$H_{A0} + H_{C0} = 0$$

$$V_{A0} + V_{B0} + V_{C0} = 3pl$$

$$(C) \quad -V_{A0} \cdot l - H_{A0} \cdot l + V_{B0} \cdot 2l - 3pl \left(\frac{3l}{2} - l \right) = 0$$

Equazione Ausiliaria: rotazione asta CD intorno a D

$$H_{C0} \cdot 2l = 0 \Rightarrow H_{C0} = 0 \Rightarrow H_{A0} = 0$$

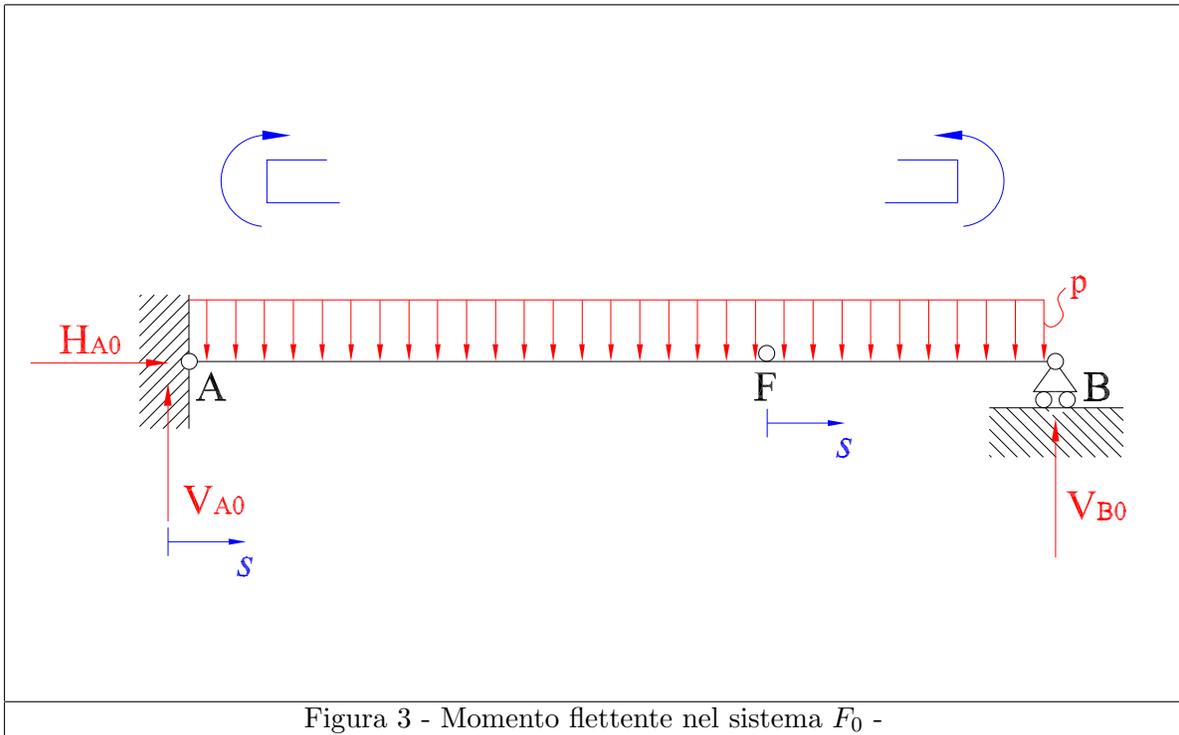
Equazione Ausiliaria: rotazione asta AB intorno ad A

$$-3pl \cdot \frac{3l}{2} + V_{B0} \cdot 3l = 0 \Rightarrow V_{B0} = \frac{3}{2}pl$$

dalle precedenti equazioni si ricavano gli altri valori:

$$V_{A0} = V_{B0} = \frac{3}{2}pl \quad V_{C0} = 0$$

Momento flettente trave AB



$$\text{AF} \quad 0 \leq s \leq 2l \quad M(s) = V_{A0} \cdot s - \frac{p}{2}s^2$$

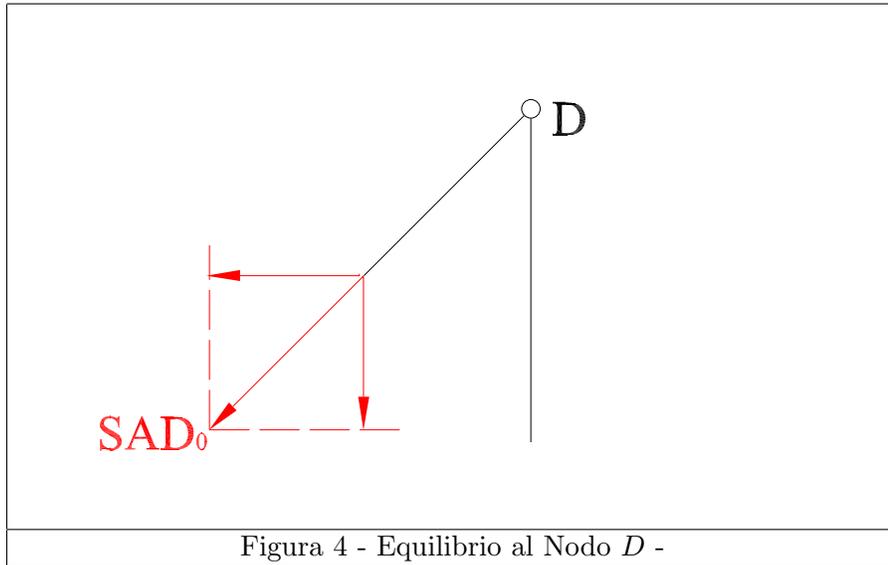
$$\text{FB} \quad 0 \leq s \leq l \quad M(s) = V_{B0}(l - s) - \frac{p}{2}(l - s)^2$$

Sostituendo i valori delle reazioni vincolari:

$$\text{AF} \quad 0 \leq s \leq 2l \quad M(s) = \frac{3}{2}pl \cdot s - \frac{p}{2}s^2$$

$$\text{FB} \quad 0 \leq s \leq l \quad M(s) = (l - s) \left[\frac{3}{2}pl - \frac{p}{2}(l - s) \right]$$

Sforzo Normale travi AD e DF

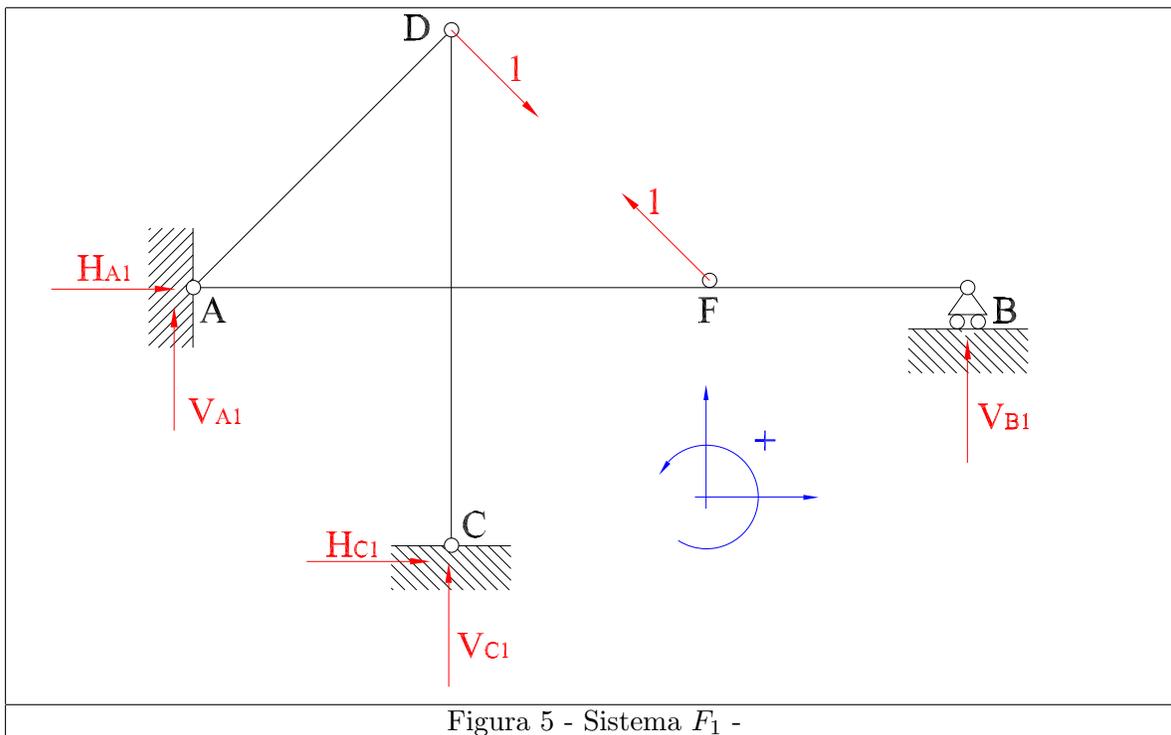


$$S_{AD0} = 0 \quad S_{DF0} = 0$$

Risulta (banalmente):

$$AD \quad 0 \leq s \leq \sqrt{2}l \quad N(s) = 0$$

$$DF \quad 0 \leq s \leq \sqrt{2}l \quad N(s) = 0$$

Sistema F_1 Figura 5 - Sistema F_1 -

Equilibrio Globale:

$$H_{A1} + H_{C1} = 0$$

$$V_{A1} + V_{B1} + V_{C1} = 0$$

$$(C) - V_{A1} \cdot l - H_{A1} \cdot l + V_{B1} \cdot 2l = 0$$

Equazione Ausiliaria: rotazione asta CD intorno a D

$$H_{C1} \cdot 2l = 0 \Rightarrow H_{C1} = 0 \Rightarrow H_{A1} = 0$$

Equazione Ausiliaria: rotazione asta AB intorno ad A

$$V_{B1} \cdot 3l + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2l = 0 \Rightarrow V_{B1} = -2 \frac{\sqrt{2}}{3}$$

dalle precedenti equazioni si ricavano gli altri valori:

$$V_{A1} = 2V_{B1} = -2 \frac{\sqrt{2}}{3} \quad V_{C1} = \sqrt{2}$$

Momento flettente trave AB

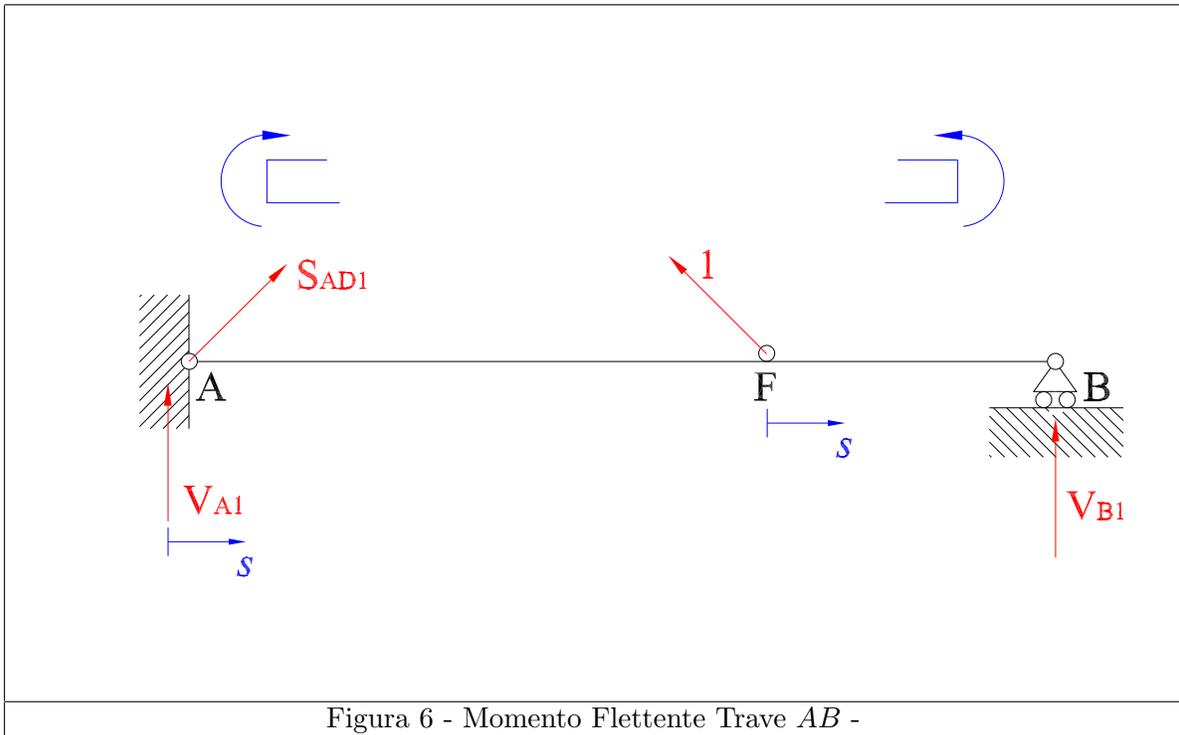


Figura 6 - Momento Flettente Trave AB -

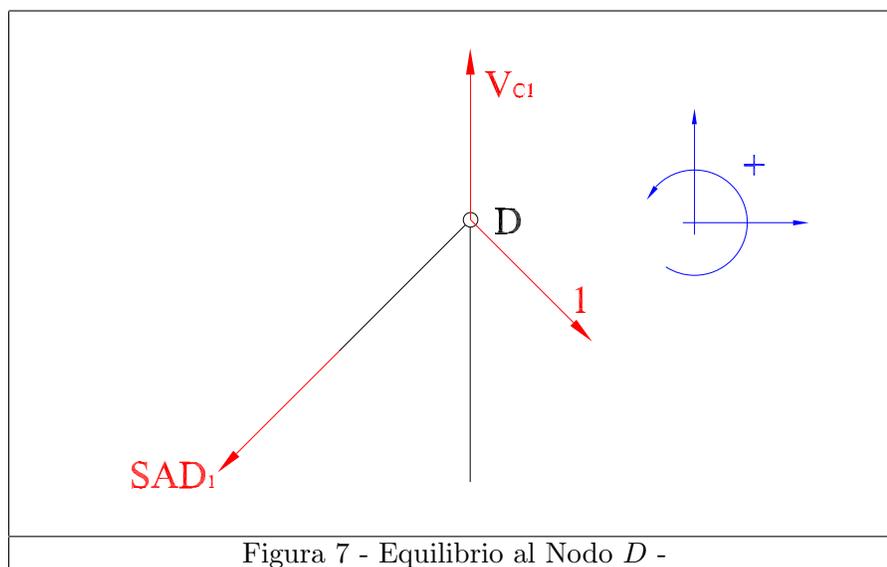
$$\text{AF} \quad 0 \leq s \leq 2l \quad M(s) = V_{A1} \cdot s + \frac{S_{AD1}}{\sqrt{2}} \cdot s$$

$$\text{FB} \quad 0 \leq s \leq l \quad M(s) = V_{B1} \cdot (l - s)$$

Sostituendo i valori delle reazioni vincolari:

$$\text{AF} \quad 0 \leq s \leq 2l \quad M(s) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot s + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot s$$

$$\text{FB} \quad 0 \leq s \leq l \quad M(s) = -(l - s) \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Sforzo Normale travi AD e DF 

$$-\frac{S_{AD1}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow S_{AD1} = 1$$

$$AD \quad 0 \leq s \leq \sqrt{2}l \quad N(s) = 1$$

$$DF \quad 0 \leq s \leq \sqrt{2}l \quad N(s) = 1$$

Coefficienti di Influenza

	M_0	M_1	$M_0 \cdot M_1$	M_1^2
AF	$\frac{3}{2}pl \cdot s - \frac{p}{2} \cdot s^2$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cdot s$	$\frac{p\sqrt{2}}{12}(s - 3l) \cdot s^2$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot s^2$
FB	$(l - s) \left[\frac{3}{2}pl - \frac{p}{2}(l - s)\right]$	$-(l - s)\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}(l - s)^2 \left[\frac{p}{2}(l - s) - \frac{3}{2}pl\right]$	$\frac{2}{9}(l - s)^2$

	N_0	N_1	$N_0 \cdot N_1$	N_1^2
AD	0	1	0	1
DF	0	1	0	1

$$\eta_{10} = \frac{1}{EJ} \left[\int_0^{2l} \frac{p\sqrt{2}}{12}(s - 3l) \cdot s^2 ds + \int_0^l \frac{\sqrt{2}}{3}(l - s)^2 \left[\frac{p}{2}(l - s) - \frac{3}{2}pl \right] ds \right]$$

$$\eta_{11} = \frac{1}{EJ} \left[\int_0^{2l} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 \cdot s^2 ds + \int_0^l \frac{2}{9}(l - s)^2 ds \right] + \frac{2}{EA} \int_0^{\sqrt{2}l} ds$$

Integrando e semplificando, si ha:

$$\eta_{10} = -\frac{11\sqrt{2}}{24} \cdot \frac{pl^4}{EJ}$$

$$\eta_{11} = \frac{2}{9} \frac{l^3}{EJ} + 2\sqrt{2} \frac{l}{EA}$$

L'equazione di elasticità è: $\eta_{10} + \eta_{11} \cdot X = 0$;

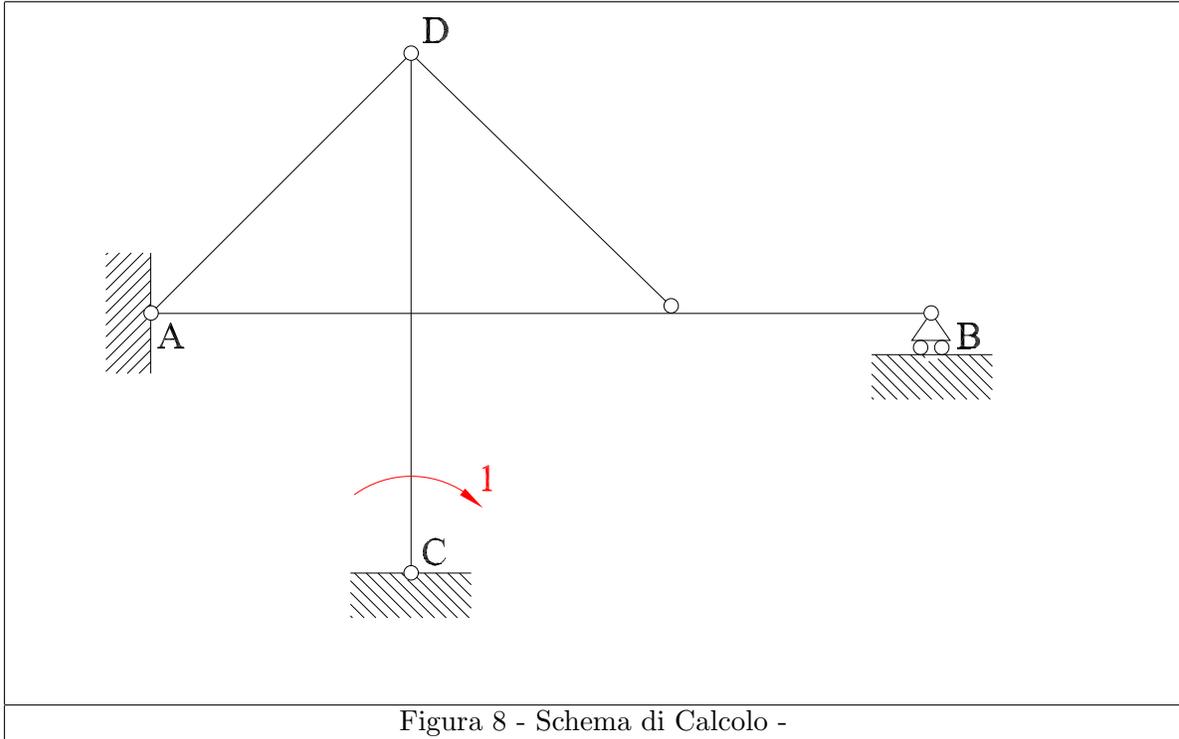
$$X = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} \Rightarrow \dots$$

$$X = \frac{\frac{11\sqrt{2}}{24} Al^2}{\frac{2}{9} Al^2 + 2\sqrt{2} J} \cdot pl$$

Effettuando la sostituzione: $Al^2 = J$, si ha:

$$X = \frac{\frac{11\sqrt{2}}{24}}{\frac{2}{9} + 2\sqrt{2}} \cdot pl \Rightarrow X = \left(\frac{297}{1288} - \frac{33\sqrt{2}}{2576} \right) \cdot pl \Rightarrow X = 0.2125 \cdot pl$$

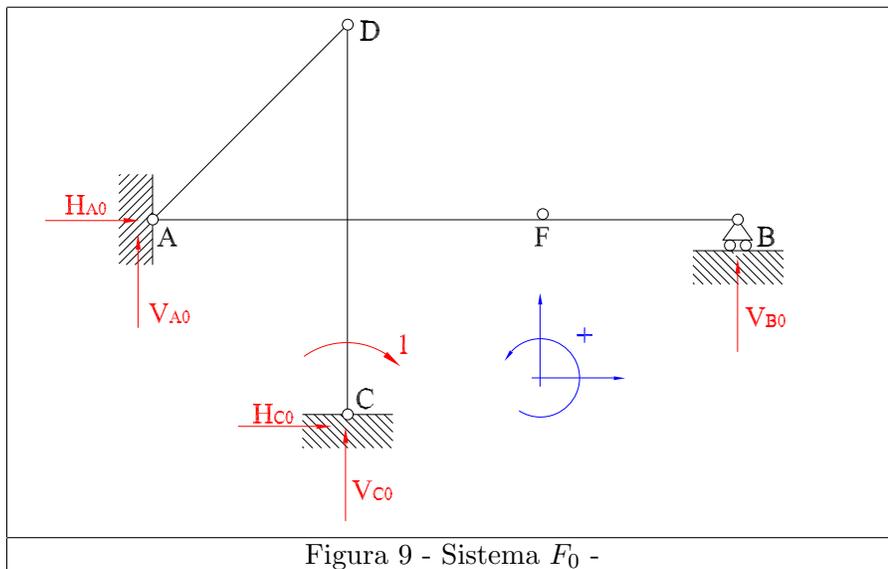
Calcolo della Rotazione Trave CD



Per tale calcolo si impone un carico esploratore (coppia esploratrice) unitario agente sulla trave interessata. Tale coppia sottoporrà l'intera struttura a delle Caratteristiche di Sollecitazione che bisogna determinare.

Tuttavia la struttura si ricorda essere iperstatica, quindi si riapplicherà il metodo delle forze per la determinazione delle suddette CdS, queste ultime saranno indicate con il pedice m : (M_m N_m T_m).

Sistema F_0



Equilibrio Globale:

$$H_{A0} + H_{C0} = 0$$

$$V_{A0} + V_{B0} + V_{C0} = 0$$

$$(C) \quad -1 - V_{A0} \cdot l - H_{A0} \cdot l + V_{B0} \cdot 2l = 0$$

Equazione Ausiliaria: rotazione asta CD intorno a D

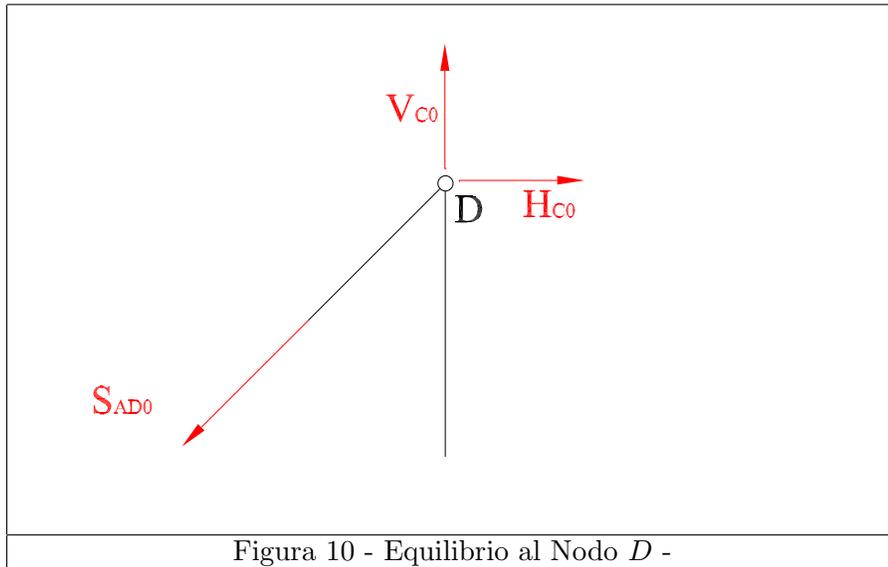
$$H_{C0} \cdot 2l - 1 = 0 \Rightarrow H_{C0} = \frac{1}{2l} \Rightarrow H_{A0} = -\frac{1}{2l}$$

Equazione Ausiliaria: rotazione asta AB intorno ad A

$$V_{B0} \cdot 3l = 0 \Rightarrow V_{B0} = 0$$

dalle precedenti equazioni si ricavano gli altri valori:

$$V_{A0} = -\frac{1}{2l} \quad V_{C0} = \frac{1}{2l}$$



$$-\frac{S_{AD0}}{\sqrt{2}} + H_{C0} = 0 \Rightarrow S_{AD0} = \sqrt{2}H_{C0} = \frac{1}{\sqrt{2}l}$$

$$S_{DF0} = 0$$

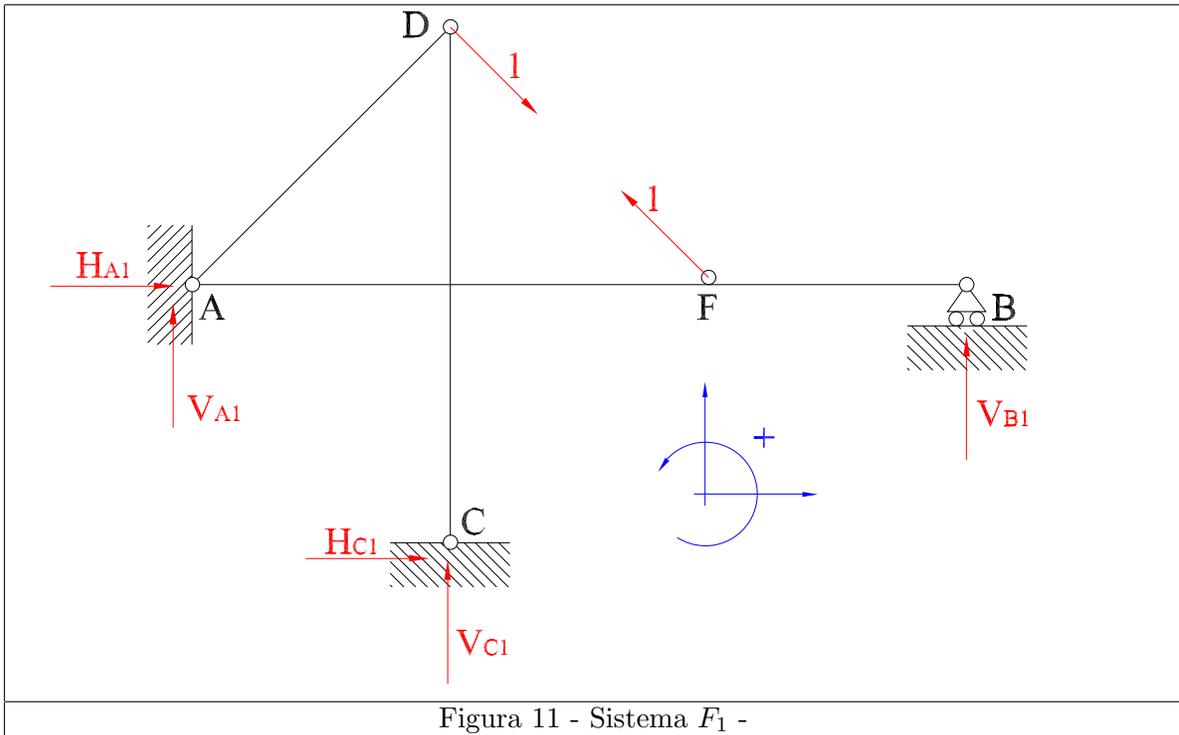
Momento flettente trave AB

Il momento flettente nella trave AB è banalmente nullo, come si può facilmente notare dal fatto che $V_{B0} = 0$

Sforzo Normale travi AD e DF

$$AD \quad 0 \leq s \leq \sqrt{2}l \quad N(s) = S_{AD0} = \frac{1}{\sqrt{2}l}$$

$$DF \quad 0 \leq s \leq \sqrt{2}l \quad N(s) = 0$$

Sistema F_1 

Le espressioni delle CdS sono del tutto identiche a quelle già determinate a suo tempo.

Coefficienti di Influenza

	M_0	M_1	$M_0 \cdot M_1$	M_1^2	N_0	N_1	$N_0 \cdot N_1$	N_1^2
AF	0	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)s$	0	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 s^2$	-	-	-	-
FB	0	$-\frac{\sqrt{2}}{3}(l-s)$	0	$\frac{2}{9}(l-s)^2$	-	-	-	-
AD	0	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}l}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}l}$	1
DF	0	0	0	0	0	1	0	1

$$\eta_{10} = \frac{1}{EA} \int_0^{\sqrt{2}l} \frac{1}{\sqrt{2}l} ds = \frac{1}{EA}$$

$$\eta_{11} = \frac{1}{EJ} \int_0^{2l} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 s^2 ds + \frac{1}{EJ} \int_0^l \frac{2}{9}(l-s)^2 ds + \frac{2}{EA} \int_0^{\sqrt{2}l} ds$$

Semplificando, si ottiene:

$$\eta_{11} = \frac{2l^3}{9EJ} + \frac{2\sqrt{2}l}{EA}$$

$$X = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} \Rightarrow X = -\frac{9J}{2l(Al^2 + 9\sqrt{2}J)}$$

Ponendo $Al^2 = J$:

$$X = -\frac{9}{2l(1 + 9\sqrt{2})} \Rightarrow X = -0.3278 \cdot \frac{1}{l}$$

Ricordando che il Momento Flettente e lo Sforzo Normale effettivo è dato, rispettivamente da: $M = M_0 + X \cdot M_1$ $N = N_0 + X \cdot N_1$, si ha:

$$M_{AF}(s) = -0.3278 \frac{1}{l} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) s \Rightarrow M_{AF}(s) = 0.07726 \cdot \frac{s}{l}$$

$$M_{FB}(s) = 0.3278 \frac{1}{l} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} (l - s) \Rightarrow M_{FB}(s) = 0.1549 \cdot \frac{l - s}{l}$$

$$N_{AD}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}l} - 0.3278 \frac{1}{l} \Rightarrow N_{AD}(s) = 0.3793 \frac{1}{l}$$

$$N_{DF}(s) = -0.3278 \frac{1}{l}$$

	M	M_m	$M \cdot M_m$
AF	$-\frac{p}{2}s^2 + 1.45pl \cdot s$	$0.07726 \frac{s}{l}$	$0.003863(29l - 10s) \frac{ps^2}{l}$
FB	$(0.9pl + \frac{p}{2}s)(l - s)$	$0.1549 \frac{l-s}{l}$	$0.01549(l - s)^2(9l + 5s) \frac{p}{l}$

	N	N_m	$N \cdot N_m$
AD	$0.2125pl$	$0.3793 \frac{1}{l}$	$0.0806p$
DF	$0.2125pl$	$-0.3278 \frac{1}{l}$	$-0.06966p$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \int_0^{2l} 0.003863(29l - 10s) \frac{ps^2}{l} ds + \frac{1}{EJ} \int_0^l 0.01549(l - s)^2(9l + 5s) \frac{p}{l} ds +$$

$$+ \frac{1}{EA} \int_0^{\sqrt{2}l} 0.0806p ds + \frac{1}{EA} \int_0^{\sqrt{2}l} -0.06966p ds$$

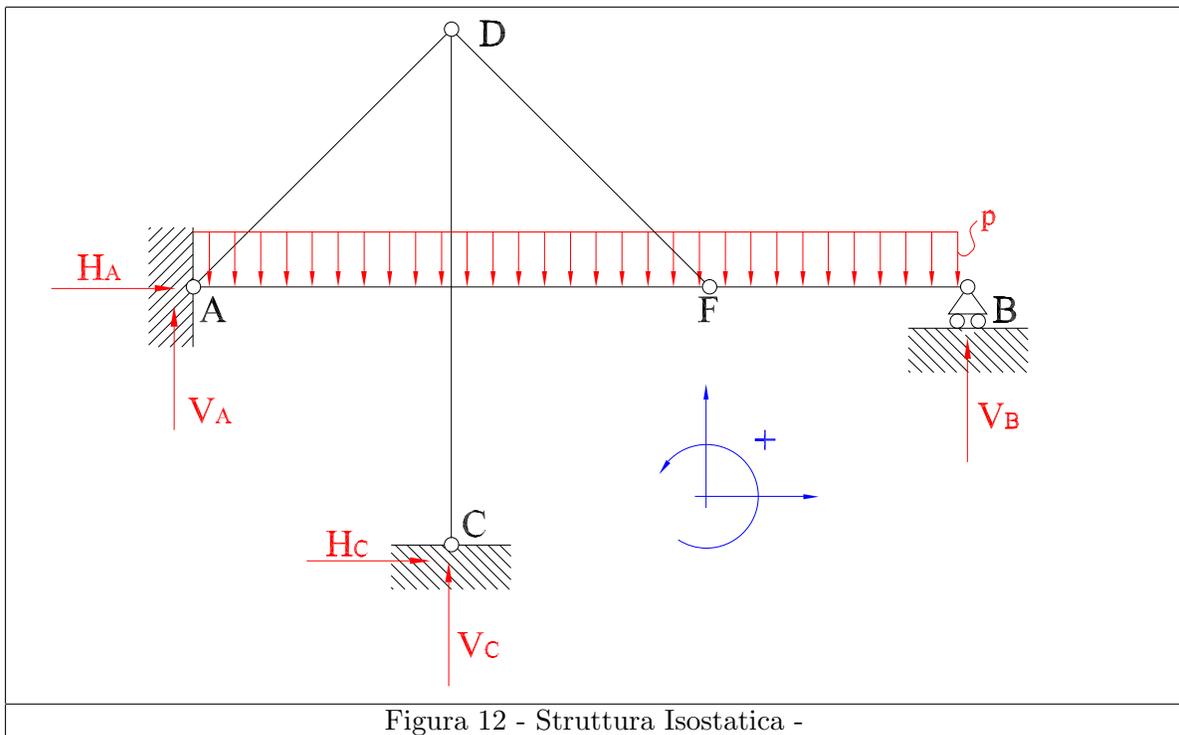
Svolgendo i calcoli e semplificando:

$$\varphi = \frac{1}{EJ}(0.1971)pl^3 + \frac{1}{EA}(0.01547)pl$$

Ponendo $Al^2 = J$, si ha:

$$\varphi = \frac{0.21257 \cdot p \cdot l}{EA}$$

Soluzione Problema 2



SI noti come la struttura, con la sostituzione della cerniera in F , divenga Isostatica.

Equilibrio Globale:

$$H_A + H_C = 0$$

$$V_A + V_B + V_C = 3pl$$

$$(C) - V_A \cdot l - H_A \cdot l + V_B \cdot 2l - 3pl \left(\frac{3l}{2} - l \right) = 0$$

Equazione Ausiliaria: rotazione asta CD intorno a D

$$H_C = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

Equazione Ausiliaria: rotazione asta FB intorno ad F

$$V_B \cdot l - pl \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{pl}{2}$$

dalle precedenti equazioni si ricavano gli altri valori:

$$V_A = -\frac{pl}{2} \quad V_C = 3pl$$

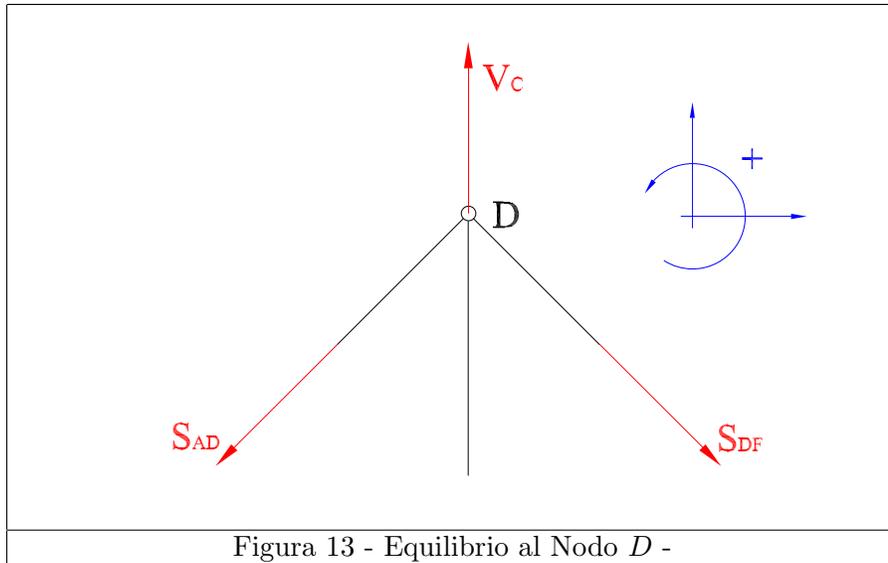


Figura 13 - Equilibrio al Nodo D -

$$-\frac{S_{AD}}{\sqrt{2}} + \frac{S_{DF}}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow S_{AD} = S_{DF}$$

$$-\frac{S_{AD}}{\sqrt{2}} - \frac{S_{DF}}{\sqrt{2}} + V_C = 0 \Rightarrow S_{AD} = S_{DF} = \frac{3}{\sqrt{2}}pl$$

Caratteristiche di Sollecitazione trave AB

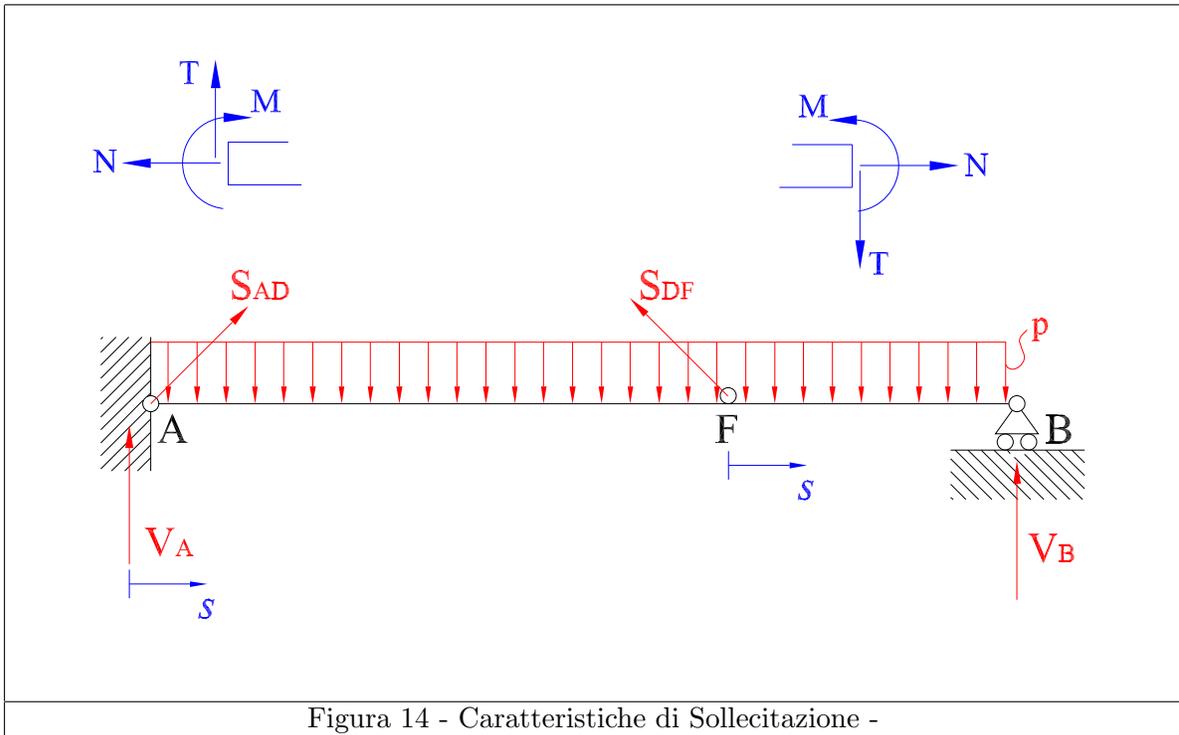


Figura 14 - Caratteristiche di Sollecitazione -

$$\text{AF} \quad 0 \leq s \leq 2l \quad N(s) = -\frac{S_{AD}}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad N(s) = -\frac{3}{2}pl$$

$$T(s) = \frac{S_{AD}}{\sqrt{2}} + V_A - ps \quad \Rightarrow \quad T(s) = p(l - s)$$

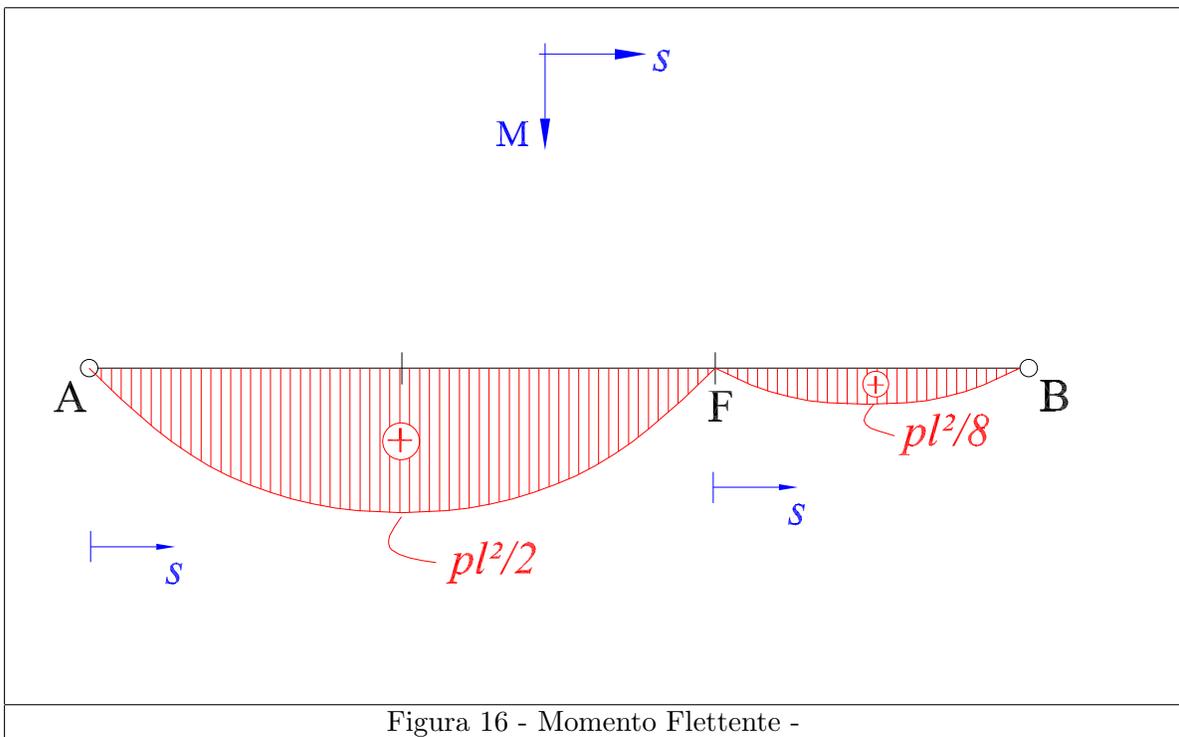
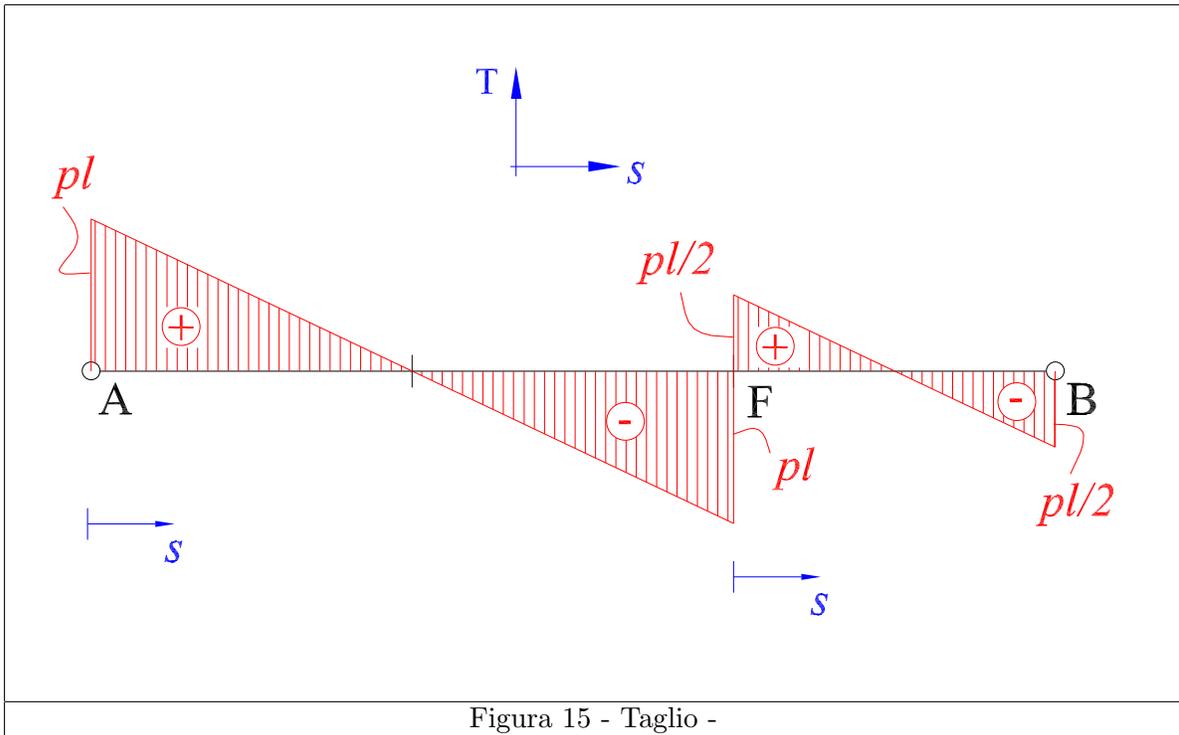
$$M(s) = \left(V_A + \frac{S_{AD}}{\sqrt{2}} \right) s - p \frac{s^2}{2} \quad \Rightarrow \quad M(s) = \left(ls - \frac{s^2}{2} \right) p$$

$$\text{FB} \quad 0 \leq s \leq l \quad N(s) = 0$$

$$T(s) = -V_B + p(l - s) \quad \Rightarrow \quad T(s) = p \left(\frac{l}{2} - s \right)$$

$$M(s) = (l - s) \cdot \left[V_B - \frac{p(l-s)}{2} \right] \quad \Rightarrow \quad M(s) = (l - s) \frac{ps}{2}$$

Si tracciano di Diagrammi quotati del Taglio e del Momento Flettente:



Soluzione Problema 3

La domanda presenta un'ambiguità: se dalla struttura dell'esercizio 2 si eliminasse il vincolo esterno in A , la struttura risulterebbe 2 volte labile, quindi non sarebbe possibile esprimere i vari spostamenti virtuali, mediante un solo parametro θ_1 !

Si suppone, quindi, non di rimuovere il suddetto vincolo, ma abbassare di 1 il suo grado di molteplicità. La cerniera in A diviene, quindi, un carrello scorrevole. Si hanno diverse possibilità di configurazione; si sceglierà la seguente:

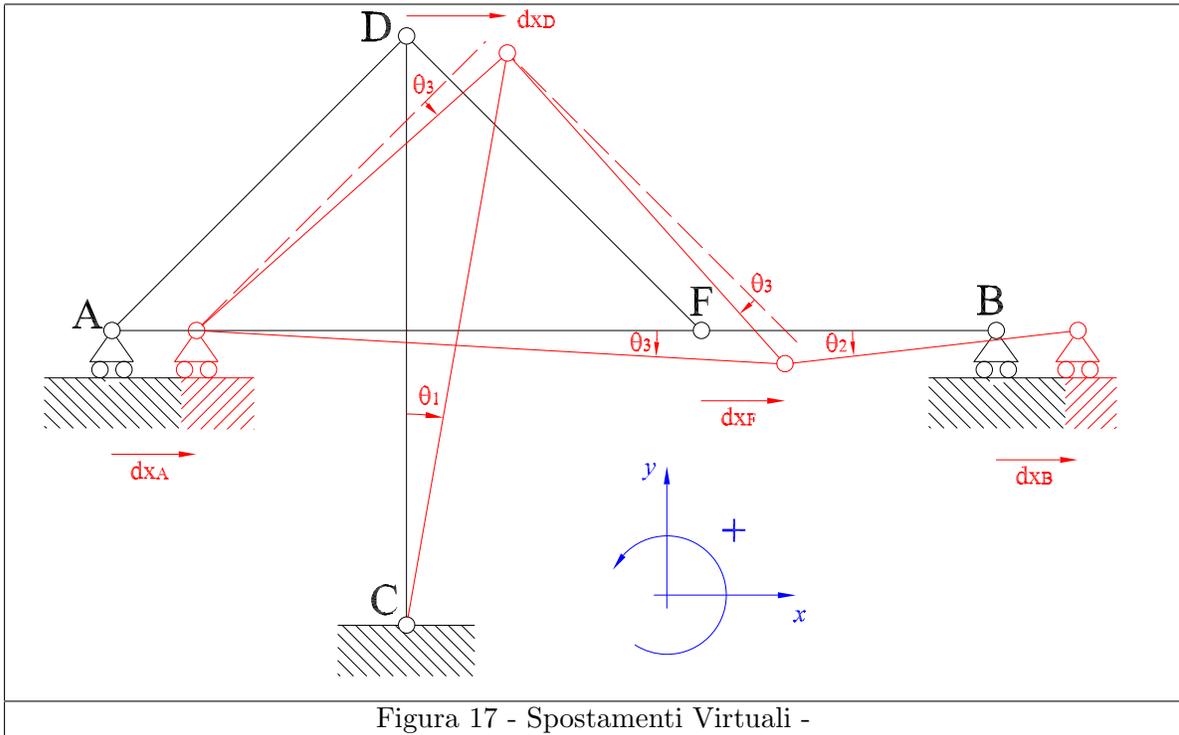


Figura 17 - Spostamenti Virtuali -

Si osserva subito, che la struttura di vertici ADF è da considerarsi come unico corpo rigido.

Le condizioni di vincolo sono:

$$\begin{aligned} dx_A \neq 0 & \quad dx_C = 0 & \quad dx_B \neq 0 \\ dy_A = 0 & \quad dy_C = 0 & \quad dy_B = 0 \end{aligned}$$

dove i vari dx e dy indicano i corrispondenti spostamenti lungo gli assi di riferimento. Si hanno le seguenti equazioni:

- 1) $dx_F = dx_A - \theta_3(y_F - y_A) \Rightarrow dx_F = dx_A$
- 2) $dy_F = dy_A + \theta_3(x_F - x_A) \Rightarrow dy_F = 2l\theta_3$
- 3) $dx_F = dx_B - \theta_2(y_F - y_B) \Rightarrow dx_F = dx_B$
- 4) $dy_F = dy_B + \theta_2(x_F - x_B) \Rightarrow dy_F = -l\theta_2$
- 5) $dx_D = dx_C - \theta_1(y_D - y_C) \Rightarrow dx_D = -2l\theta_1$
- 6) $dy_D = dy_C + \theta_1(x_D - x_C) \Rightarrow dy_D = 0$
- 7) $dx_D = dx_A - \theta_3(y_D - y_A) \Rightarrow dx_D = dx_A - l\theta_3$
- 8) $dy_D = dy_A + \theta_3(x_D - x_A) \Rightarrow dy_D = l\theta_3$

dalla 6) e dalla 8), segue: $\theta_3 = 0$.

Dalla 2) e dalla 4), segue: $\theta_2 = -2\theta_3 \Rightarrow \theta_2 = 0$.

Quindi:

$$dx_A = dx_B = dx_D = dx_F = -2l\theta_1$$

$$dy_D = dy_F = 0$$

Quindi l'unico spostamento virtuale ammissibile è una traslazione lungo l'asse x .