

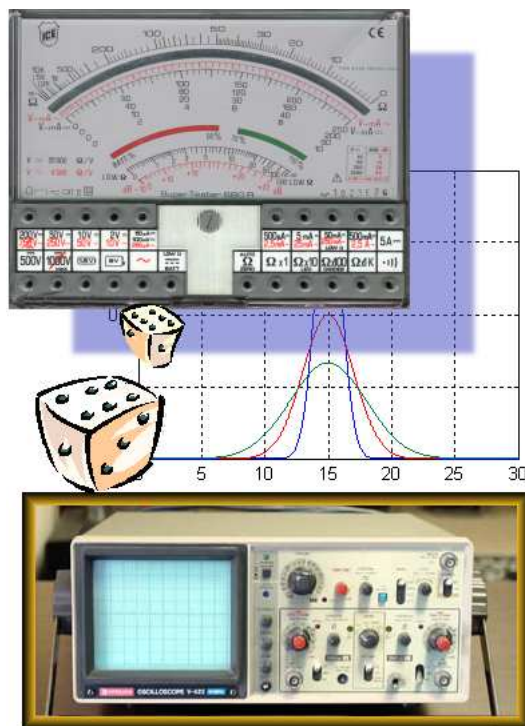


Facoltà di Ingegneria di Pisa

-

Corso di Laurea in Ing.Elettrica (V.O.)

## Relazioni di “Metodi di Osservazione e Misura”



*Docente*  
Fabrizio Cei

*Allievo*  
Andrea Praticò

# Indice

<b>1</b>	<b>Correnti, Tensioni e Resistenze Elettriche</b>	<b>4</b>
1.1	Misura della Corrente ( $R = 2 \text{ k}\Omega$ ) . . . . .	5
1.2	Misura delle Tensioni ( $R = 2 \text{ k}\Omega$ ) . . . . .	6
1.2.1	Tensione $V_{12}$ . . . . .	7
1.2.2	Tensione $V_1$ . . . . .	7
1.3	Misura della Corrente ( $R = 200 \text{ k}\Omega$ ) . . . . .	8
1.4	Misura delle Tensioni ( $R = 200 \text{ k}\Omega$ ) . . . . .	9
1.4.1	Tensione $V_{12}$ . . . . .	9
1.4.2	Tensione $V_1$ . . . . .	10
1.5	Misura delle Resistenze . . . . .	11
1.5.1	Resistenza da $2\text{k}\Omega$ . . . . .	11
1.5.2	Resistenza da $200\text{k}\Omega$ . . . . .	12
1.6	Misure con Oscilloscopio . . . . .	13
1.6.1	Misura di Tensione in Continua . . . . .	14
1.6.2	Misura di Tensione in Alternata (a) . . . . .	16
1.6.3	Misura di Tensione in Alternata (b) . . . . .	19
1.6.4	Misura di Frequenza . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Circuiti RC ed RLC</b>	<b>24</b>
2.1	Scarica del Condensatore . . . . .	24
2.1.1	Descrizione del Circuito . . . . .	25
2.1.2	Considerazioni teoriche . . . . .	26
2.1.3	Forme d'onda . . . . .	27
2.1.4	Determinazione Sperimentale dei Parametri . . . . .	29
2.1.5	Metodo del FIT Lineare . . . . .	32
2.1.6	Metodo del FIT iterativo . . . . .	34
2.1.7	Curve Fitting Tool di MATLAB6.5 . . . . .	37
2.2	Dinamica del Circuito RLC . . . . .	39
2.2.1	Descrizione del Circuito . . . . .	39
2.2.2	Descrizione della Dinamica . . . . .	40
2.2.3	Considerazioni Teoriche per l'Analisi dei dati . . . . .	44
2.2.4	Caso 1: $\tau \gg T$ . . . . .	44
2.2.5	Caso 2: interpolazione . . . . .	47
2.2.6	Prove con altri Condensatori . . . . .	49
2.2.7	Riepilogo Risultati ed Osservazioni . . . . .	50
2.3	Osservazione finale: Effetto Pelle . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Filtri Passivi</b>	<b>54</b>
3.1	Considerazioni Teoriche . . . . .	54
3.2	Filtro 'PASSA-BASSO' . . . . .	55
3.2.1	Esecuzione della Misura . . . . .	57
3.3	Filtro 'PASSA-ALTO' . . . . .	60

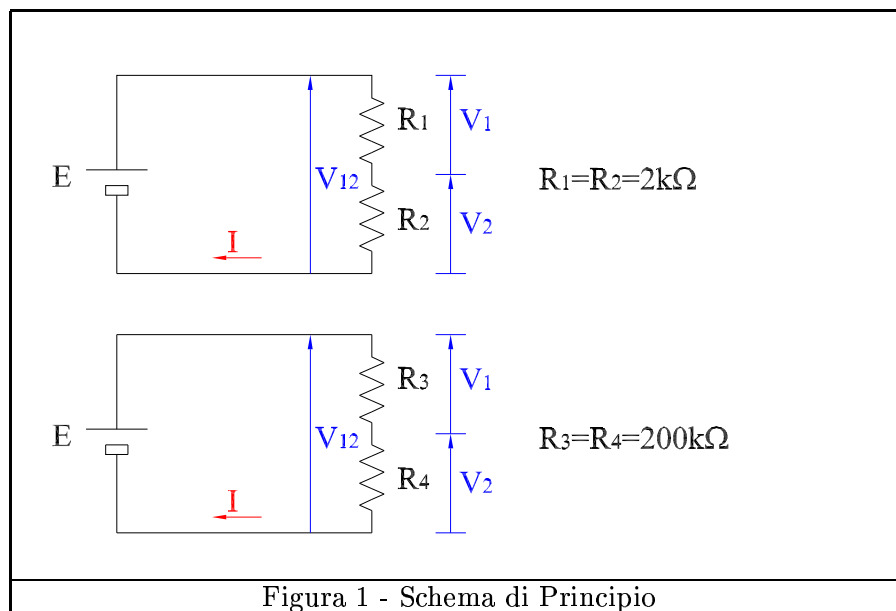
3.3.1	Esecuzione della Misura . . . . .	61
3.4	Riepilogo Risultati & Simulazioni . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Distribuzione di Poisson</b>	<b>67</b>
4.1	Descrizione della Relazione . . . . .	67
4.2	Analisi dei Dati . . . . .	69
4.2.1	Anno 2002 . . . . .	69
4.2.2	Anno 2003 . . . . .	75
4.3	Gaussiana . . . . .	78
4.4	Previsione . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Metodo Montecarlo</b>	<b>83</b>
5.1	Calcolo Analitico . . . . .	83
5.2	Metodo dei Trapezi . . . . .	84
5.2.1	Descrizione del metodo . . . . .	84
5.2.2	Osservazioni sulla Funzione . . . . .	85
5.2.3	Calcolo dell'Integrale . . . . .	86
5.3	Metodo Montecarlo . . . . .	88
5.3.1	Distribuzione Uniforme . . . . .	89
5.3.2	Distribuzione Simile . . . . .	93
5.3.3	Determinazione di N . . . . .	97
<b>A</b>	<b>Forma d'Onda di Tensione</b>	<b>101</b>
<b>B</b>	<b>Simulazione Scarica del Condensatore</b>	<b>103</b>
B.1	Con Resistenza da $330\Omega$ . . . . .	103
B.2	Senza Resistenza da $330\Omega$ . . . . .	105
<b>C</b>	<b>Algoritmo del FIT Lineare</b>	<b>107</b>
<b>D</b>	<b>Algoritmo del FIT Iterativo</b>	<b>109</b>
<b>E</b>	<b>Soluzione dell'Equazione differenziale</b>	<b>113</b>
<b>F</b>	<b>Dinamica RLC</b>	<b>116</b>
F.1	$C_1 = 0.1\mu\text{F}$ . . . . .	116
F.2	$C_2 = 0.22\mu\text{F}$ . . . . .	118
F.3	$C_3 = 0.47\mu\text{F}$ . . . . .	120
F.4	Simulazione con $C_1 = 0.1\mu\text{F}$ . . . . .	122
F.5	Simulazione con $C_2 = 0.22\mu\text{F}$ . . . . .	123
F.6	Simulazione con $C_3 = 0.47\mu\text{F}$ . . . . .	124
<b>G</b>	<b>Filtro Passivo</b>	<b>125</b>
G.1	Circuito 1 . . . . .	126
G.2	Circuito 2 . . . . .	128
G.3	Sovrapposizione degli Effetti . . . . .	129
<b>H</b>	<b>Poissoniana</b>	<b>130</b>
H.1	Dati Statistici . . . . .	131
H.2	Listati MATLAB . . . . .	138
H.2.1	Stat1.m . . . . .	138
H.2.2	Stat2.m . . . . .	142
H.2.3	Gaussiana.m . . . . .	143

<b>I</b>	<b>Metodo dei Trapezi</b>	<b>144</b>
<b>J</b>	<b>Metodo Montecarlo</b>	<b>145</b>
J.1	Distribuzione Uniforme . . . . .	145
J.2	Distribuzione Simile . . . . .	146
<b>K</b>	<b>Caratteristiche tecniche dell'Oscilloscopio Tektronix 2205</b>	<b>148</b>

## Relazione 1

# Correnti, Tensioni e Resistenze Elettriche

Lo scopo è quello di misurare la corrente e le tensioni indicate nei due seguenti circuiti:



La tensione di alimentazione di entrambi i circuiti è fornita da un alimentatore stabilizzato in cc, il cui valore nominale è pari a  $E = 4.5V$ .

La tolleranza delle resistenze è pari al 5% del proprio valore, ciò vuol dire che:

Nome	Valore Nominale [ $\Omega$ ]	Tolleranza(5%) [ $\Omega$ ]	Val.min [ $\Omega$ ]	Val.Max [ $\Omega$ ]
$R_1$	2000	$\pm 100$	1900	2100
$R_2$	2000	$\pm 100$	1900	2100
$R_3$	200000	$\pm 10000$	190000	210000
$R_4$	200000	$\pm 10000$	190000	210000

Si dispone di un solo strumento di misura<sup>1</sup>:

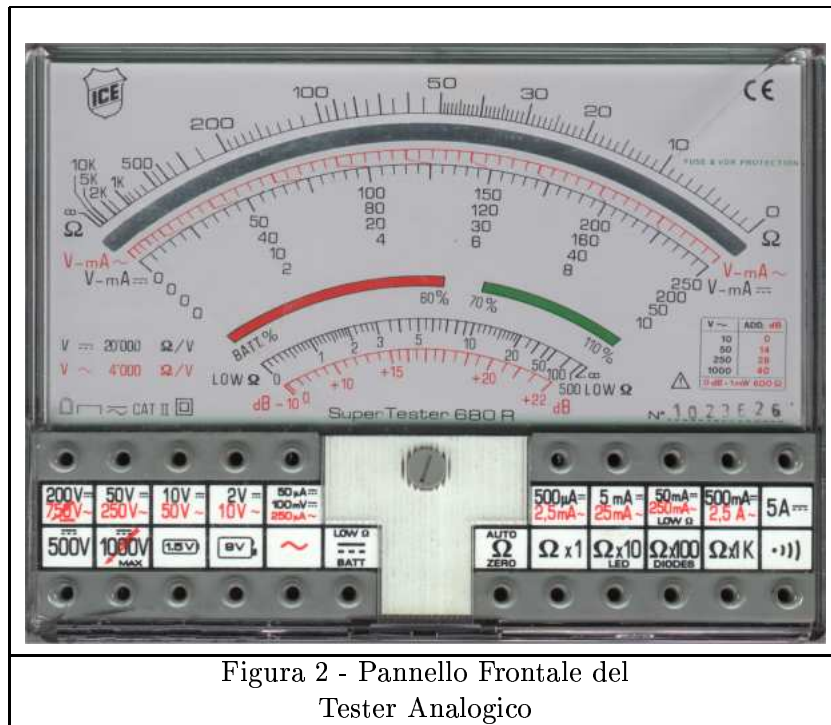


Figura 2 - Pannello Frontale del Tester Analogico

per cui verranno eseguite singolarmente le varie misure.

## 1.1 Misura della Corrente ( $R = 2 \text{ k}\Omega$ )

Prima di collegare il tester in configurazione amperometro, è necessario valutare il valore massimo della corrente stessa, al fine di non sovraccaricare lo strumento:

$$I_{max} = \frac{E}{R_{1min} + R_{2min}} = \frac{4.5}{1900 + 1900} = 1.18 \text{ mA}$$

Date le portate disponibili, si sceglie il valore  $I_{fs} = 5 \text{ mA}$ , la scala di lettura è composta da 50 divisioni. Si ha, quindi, una costante strumentale data da:

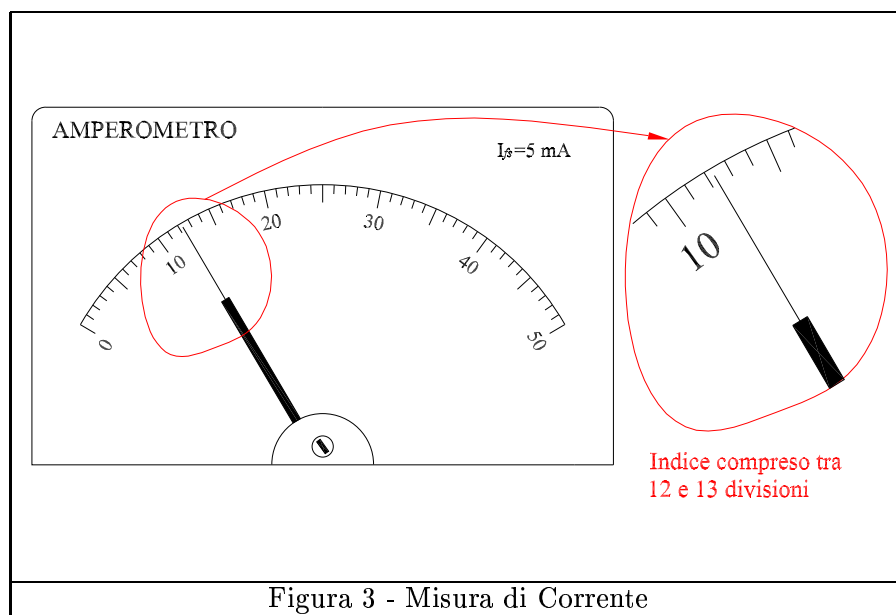
$$K_I = \frac{I_{fs}}{n \cdot \text{div}} = \frac{5}{50} = 0.1 \text{ mA/div}$$

Utilizzando la metodologia della “lettura a mezza tacca”, si ha un’incertezza strumentale pari a:

$$\delta I = \frac{0.1}{2} = 0.05 \text{ mA}$$

Si effettua la misurazione, e si ottiene:

<sup>1</sup>in particolare di un Tester Analogico



L'indice è compreso tra 12 e 13, più precisamente l'indicazione è inferiore a 12.5 [div], quindi la corrente misurata vale:

$$I = [12.0 \pm 0.5] * K_I \text{ mA} \Rightarrow$$

$$I = 1.20 \pm 0.05 \text{ mA}$$

Corrente [mA]	Incertezza [mA]	Errore Relativo
$I = 1.20$	0.05	$\frac{\delta I}{I} \times 100 = 4.2\%$

In questo caso lo strumento è posto in serie alle due resistenze  $R_1$  ed  $R_2$ . Si sa che la resistenza interna del tester, in configurazione Amperometro, vale

$$R_{int} = 60 \text{ } \Omega$$

La resistenza “vista” dal generatore non è  $R_1 + R_2$ , ma bensì:

$$R_{int} + R_1 + R_2 = 4060 \text{ } \Omega$$

Si indicano con  $I_v$  ed  $I_m$  rispettivamente la corrente ‘vera’<sup>2</sup> e quella misurata; si ha:

$$I_v = \frac{E}{R_1 + R_2} \quad I_m = \frac{E}{R_{int} + R_1 + R_2}$$

si osserva che

$$\frac{I_m}{I_v} = \frac{R_1 + R_2}{R_{int} + R_1 + R_2} = \frac{4000}{4060} = 0.9852$$

ovvero la corrente misurata è il 98.5% della corrente vera.

## 1.2 Misura delle Tensioni ( $R = 2 \text{ k}\Omega$ )

La tensione nominale dell'alimentatore è 4.5 V quindi si sceglie una portata di fondo scala

$$V_{fs} = 10 \text{ V}$$

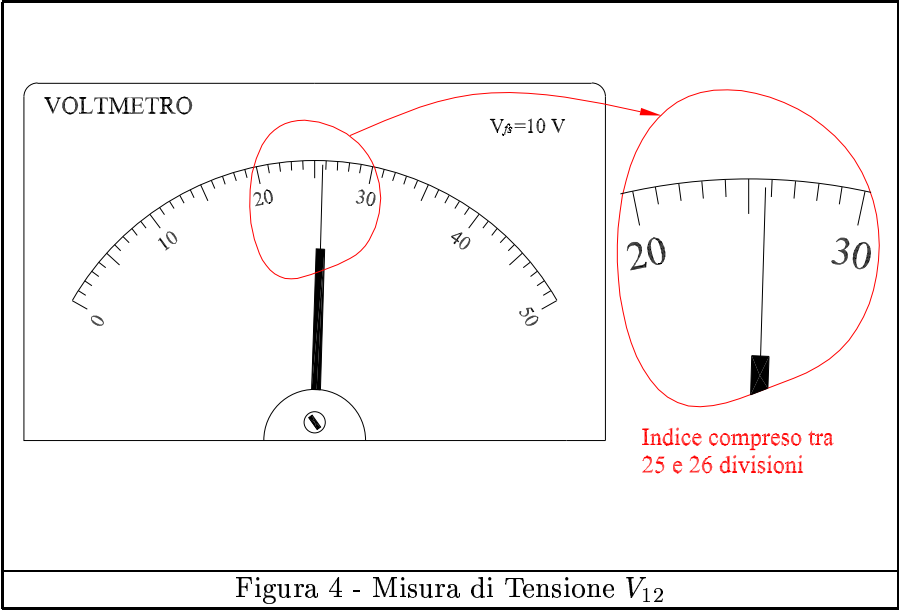
la scala di lettura è sempre quella con 50 divisioni. La costante strumentale vale:

$$K_V = \frac{10}{50} = 0.2 \text{ V/div}$$

<sup>2</sup>cioè quella che circolerebbe in assenza dello strumento

1.2.1 Tensione  $V_{12}$

Il tester in configurazione Voltmetro restituisce:



L'indice è compreso tra 25 e 26 divisioni, più precisamente l'indicazione è superiore a 25.5 [div], quindi la tensione  $V_{12}$  misurata vale:

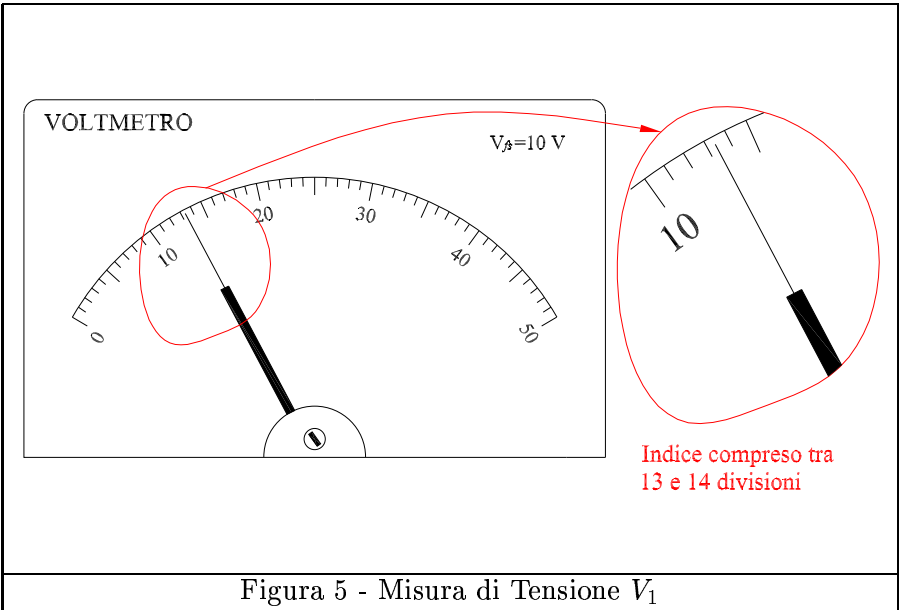
$$V_{12} = [25.5 \pm 0.5] * K_V \quad \text{V} \Rightarrow$$

$$V_{12} = 5.1 \pm 0.1 \quad \text{V}$$

Tensione [V]	Incertezza [V]	Errore Relativo
$V_{12} = 5.1$	0.1	$\frac{\delta V}{V} \times 100 = 2.0\%$

1.2.2 Tensione  $V_1$

Il tester in configurazione Voltmetro restituisce:





L'indice è compreso tra 13 e 14 divisioni, più precisamente l'indicazione è inferiore a 13.5 [div], quindi la tensione  $V_1$  misurata vale:

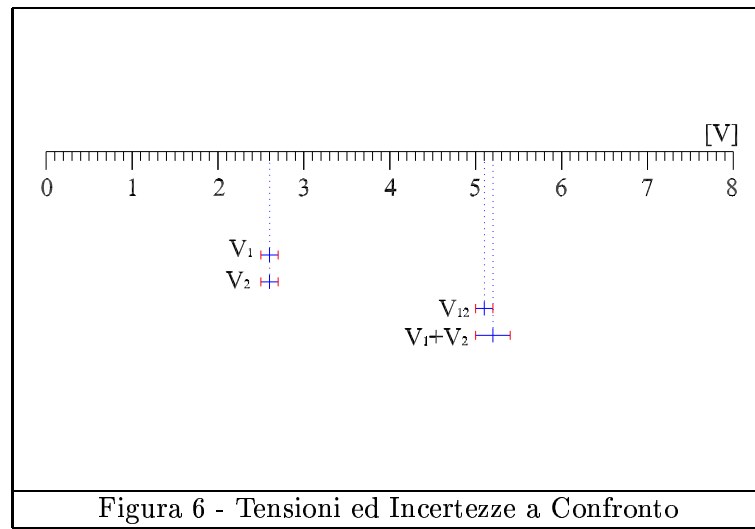
$$V_1 = [13.0 \pm 0.5] \cdot K_V \quad V \Rightarrow$$

$$V_1 = 2.6 \pm 0.1 \quad V$$

Tensione [V]	Incertezza [V]	Errore Relativo
$V_1 = 2.6$	0.1	$\frac{\delta V}{V} \times 100 = 4.0\%$

**Valori identici valgono per la tensione  $V_2$ .**

Si noti che  $V_{12} = V_1 + V_2$  è verificata.



### 1.3 Misura della Corrente ( $R = 200 \quad k\Omega$ )

Dalla misura di tensione complessiva (effettuata precedentemente) risulta

$$V_{12} = 5.1V$$

si stima, quindi, il valore massimo della corrente circolante nella serie composta dalle due resistenze ( $R_3$  ed  $R_4$ ) da  $200k\Omega$ :

$$I_{max} = \frac{V_{12}}{R_{3min} + R_{4min}} = \frac{5.1}{2 \cdot 190 \times 10^3} = 13.4 \quad \mu A$$

La portata disponibile, consona con tale grandezza, è di  $50 \quad \mu A$ ; Il numero di divisioni della scala è ancora 50 [div], per cui si ha una costante strumentale pari a :

$$K_I = \frac{50}{50} = 1 \quad \mu A/div$$

L'indice dell'Amperometro si arresta tra 11 e 12 divisioni<sup>3</sup>, più precisamente l'indicazione è superiore a 11.5 divisioni; la corrente vale, quindi:

$$I = [11.5 \pm 0.5] \cdot K_I \Rightarrow$$

$$I = 11.5 \pm 0.5 \quad \mu A$$

<sup>3</sup>Si omette la figura

Corrente [ $\mu A$ ]	Incertezza [ $\mu A$ ]	Errore Relativo
$I = 11.5$	0.5	$\frac{\delta I}{I} \times 100 = 4.4\%$

Ipotizzando che la resistenza interna dello strumento sia ancora  $R_{int} = 60 \text{ } \Omega$  in questo caso si ha che la resistenza “vista” dal generatore vale:

$$R_{int} + R_3 + R_4 = 400060 \text{ } \Omega$$

Si indicano nuovamente con  $I_v$  ed  $I_m$  rispettivamente la corrente vera e quella misurata; si ha:

$$I_v = \frac{E}{R_3 + R_4} \quad I_m = \frac{E}{R_{int} + R_3 + R_4}$$

si osserva che

$$\frac{I_m}{I_v} = \frac{R_1 + R_2}{R_{int} + R_1 + R_2} = \frac{400000}{400060} = 0.9998$$

ovvero la corrente misurata è il 99.98% della corrente vera. Il risultato era prevedibile, infatti aumentando il valore delle resistenza del circuito, quella interna dello strumento diviene praticamente trascurabile, per cui il valore della corrente misurata è praticamente coincidente con quello vero.

## 1.4 Misura delle Tensioni ( $R = 200 \text{ } k\Omega$ )

E' ragionevole supporre che la tensione fornita dal generatore rimanga la stessa<sup>4</sup>, per questo si scelgono le solite portate utilizzate precedentemente.

$$V_{fs} = 10 \text{ } V$$

il numero di divisioni è 50;

$$K_V = \frac{10}{50} = 0.2 \text{ } V/\text{div}$$

### 1.4.1 Tensione $V_{12}$

$$V_{12} = [25.5 \pm 0.5] * K_V \text{ } V \Rightarrow$$

$$V_{12} = 5.1 \pm 0.1 \text{ } V$$

Tensione [V]	Incertezza [V]	Errore Relativo
$V_{12} = 5.1$	0.1	$\frac{\delta V}{V} \times 100 = 2.0\%$

---

<sup>4</sup>Anche se in realtà è da aspettarsi un lieve aumento. Infatti l'aumento della resistenza esterna produce una diminuzione della corrente erogata dal generatore, e quindi una diminuzione della caduta di tensione interna al generatore stesso.

### 1.4.2 Tensione $V_1$

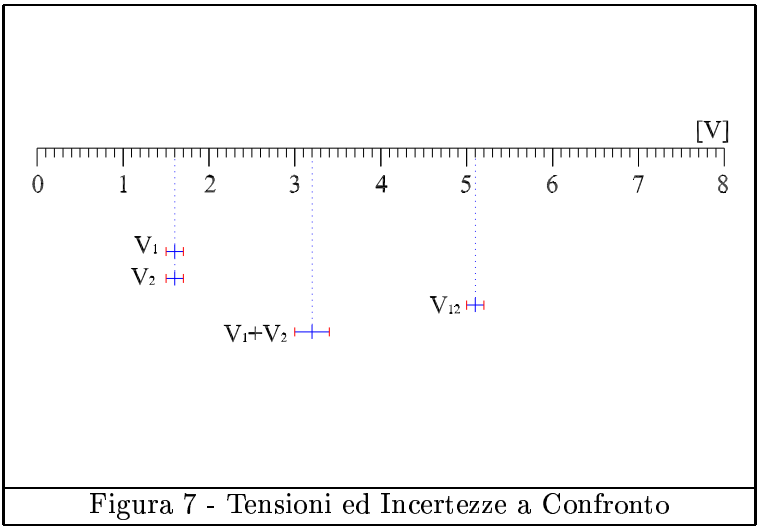
L'indice del Voltmetro è compreso tra 8 e 9 divisioni, più precisamente l'indicazione è inferiore a 8.5 [div], quindi la tensione  $V_1$  misurata vale:

$$V_1 = [8.0 \pm 0.5] * K_V \quad \text{V} \Rightarrow$$

$$V_1 = 1.6 \pm 0.1 \quad \text{V}$$

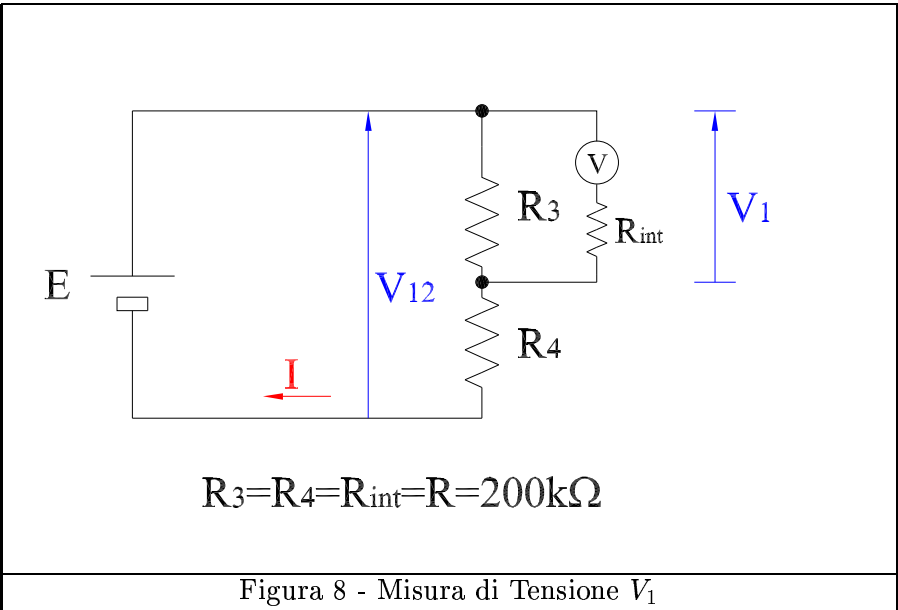
Tensione [V]	Incertezza [V]	Errore Relativo
$V_1 = 1.6$	0.1	$\frac{\delta V}{V} \times 100 = 6.3\%$

Valori identici valgono per la tensione  $V_2$ .



#### Osservazione

Si noti che, in questo caso  $V_1 + V_2 \neq V_{12}$ . Questo risultato trova la seguente spiegazione: la resistenza interna dello strumento, per una portata di 10 V, vale  $R_{int} = 200 \text{ k}\Omega$ , quindi ha lo stesso valore della resistenza  $R_3$  (non siamo più nella condizione  $R_{int} \gg R$ ). Si osservi il seguente schema:



Si ha:

$$I = \frac{E}{R_3 // R_{int} + R_4} = \frac{E}{\frac{3}{2} \cdot R} = \frac{5.1}{3 \times 10^5} = 17.0 \quad \mu A$$

da cui:

$$V_1 = I \cdot R_3 // R_{int} = 17.0 \times 10^{-6} \cdot 10^5 = 1.70 \quad V$$

Si capisce, quindi, che lo strumento, in questo caso, ha provocato una perturbazione importante del sistema. Nel caso precedente ( $R_1 = R_2 = 2 \quad k\Omega$ ) la presenza dello strumento non comporta una perturbazione significativa; vediamo il perchè:

con riferimento allo schema di Figura 8, si consideri al posto di  $R_3$  ed  $R_4$ ,  $R_1$  ed  $R_2$  rispettivamente. Si ha:

$$I = \frac{E}{R_1 // R_{int} + R_2}$$

$$V_1 = R_1 // R_{int} \cdot I = \frac{R_1 // R_{int}}{R_1 // R_{int} + R_2} \cdot E = 2.54 \quad V$$

che è perfettamente Compatibile con il valore misurato a suo tempo.

## 1.5 Misura delle Resistenze

Utilizzando il tester in configurazione Ohmetro, si misura il valore di ogni resistenza. Bisogna osservare che la scala graduata dello strumento non è lineare, per cui il valore della costante strumentale dipende dalla lettura effettuata; per esempio per valori compresi tra 0 e 50 divisioni, con il selettore posto su  $\Omega \times 100$ , ogni tacca vale

$$K_{TAC} = 100\Omega$$

Mentre per valori compresi tra 100 e 200 divisioni si ha:

$$K_{TAC} = 1000\Omega \quad (\text{con selettore, sempre su } \Omega \times 100)$$

### 1.5.1 Resistenza da $2k\Omega$

Si utilizza il selettore  $\Omega \times 100$ . Con la scelta di tale portata, si ha una costante strumentale pari a:

$$K_{\Omega} = 100 \quad \Omega/\text{div}$$

si ottiene:

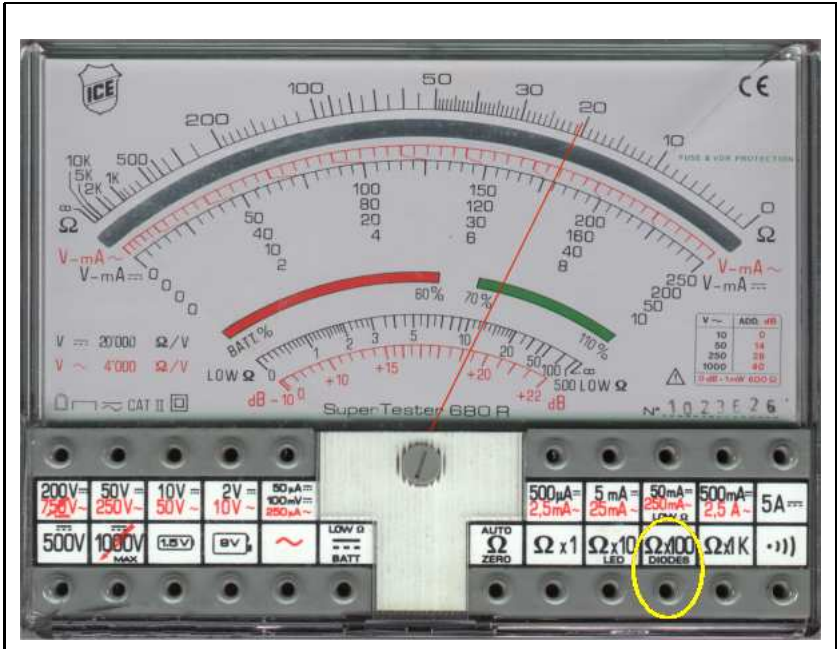


Figura 9 - Ohmetro - misura di  $R_1$  ed  $R_2$

La lettura è compresa nell'intervallo  $[0; 50]$  div, quindi  $K_{\Omega} = K_{TAC} = 100 \quad \Omega/\text{div}$

$$R_1 = R_2 = [20.0 \pm 0.5] \cdot K_{\Omega} \Rightarrow$$

$$R_1 = R_2 = 2000 \pm 50 \quad \Omega$$

Resistenza $[\Omega]$	Incertezza $[\Omega]$	Errore Relativo
$R_1 = R_2 = 2000$	50	$\frac{\delta V}{V} \times 100 = 2.5\%$

### 1.5.2 Resistenza da $200k\Omega$

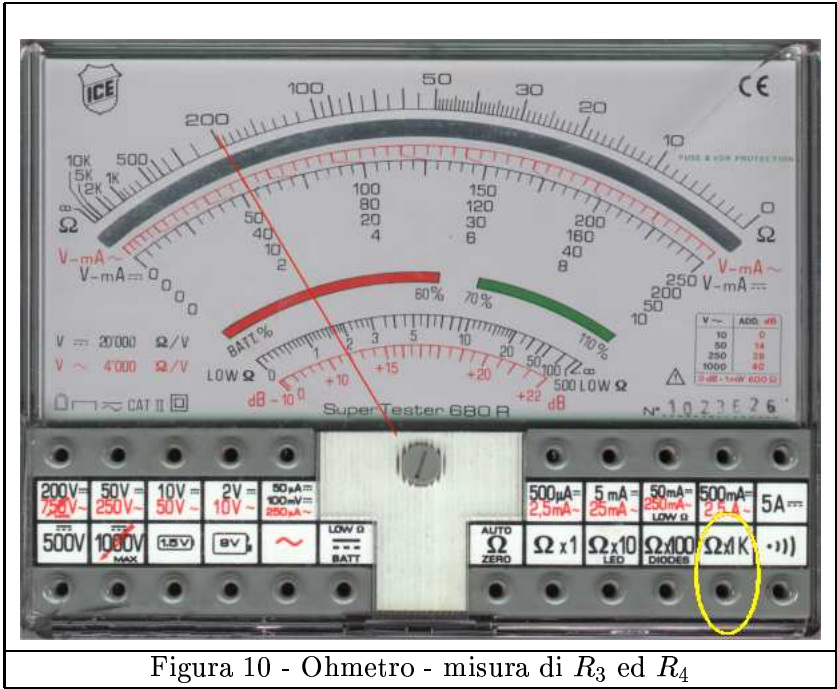
Si utilizza il selettore  $\Omega \times 1k$ . La porzione di indice compresa tra 100 e 200 è suddivisa in 10 divisioni, ciò implica che ogni tacca compresa in tale intervallo corrisponda a:

$$\frac{200k\Omega - 100k\Omega}{10} = 10 \quad k\Omega$$

Essendo il selettore posto a  $\Omega \times 1k$ , nel complesso si ha:

$$K_{\Omega} = 1 \quad k\Omega/\text{div}$$

$$K_{TAC} = 10 \quad k\Omega/\text{tacca}$$



$$R_3 = R_4 = [195] \cdot K_{\Omega} \pm [0.5] \cdot K_{TAC} \Rightarrow$$

$$R_3 = R_4 = 195 \pm 5 \text{ k}\Omega$$

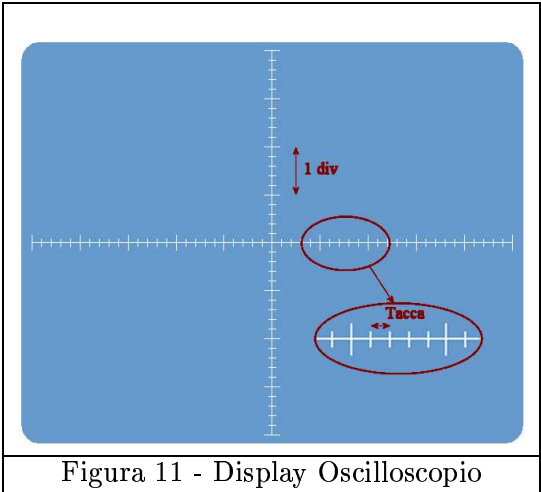
Resistenza [ $k\Omega$ ]	Incertezza [ $k\Omega$ ]	Errore Relativo
$R_3 = R_4 = 195$	5	$\frac{\delta R}{R} \times 100 = 2.6\%$

Riepiloghiamo i risultati:

	Valore Nominale [ $k\Omega$ ]	Tolleranza [ $\Omega$ ]	Val.Misurato [ $k\Omega$ ]	Incertezza [ $\Omega$ ]
$R_1$	2	100	2	50
$R_2$	2	100	2	50
$R_3$	200	10000	195	5000
$R_4$	200	10000	195	5000

1.6 Misure con Oscilloscopio

Il display dell'oscilloscopio è così strutturato:



Si osserva che ogni divisione (div) è a sua volta suddivisa in 5 tacche; ogni tacca, quindi, assume un valore pari ad  $\frac{1}{5} = 0.2$  del valore assunto da una divisione.

### 1.6.1 Misura di Tensione in Continua

Si collega il positivo del generatore al Canale 1, ed il negativo al riferimento (TERRA):

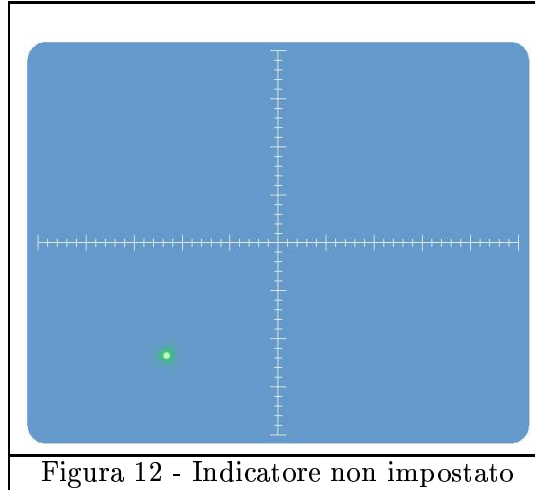


Figura 12 - Indicatore non impostato

Come si può notare dalla figura, l'indicatore assume una posizione scomoda per la misura; quindi per effettuare più accuratamente la lettura si commuta il selettore DC/GND/AC su GND, e si posiziona l'indicatore luminoso in corrispondenza dell'origine del sistema (per fare ciò si agisce sulle opportune manopole)

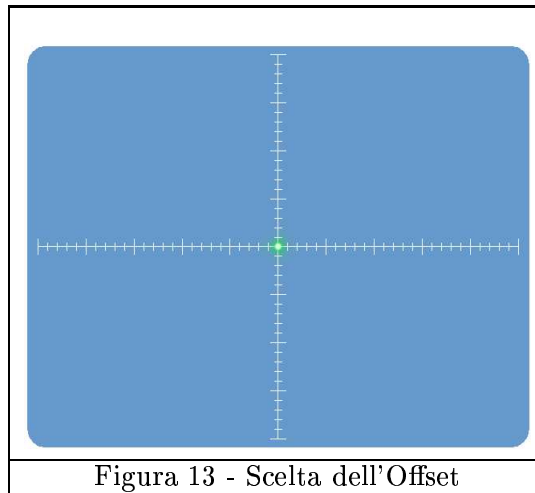


Figura 13 - Scelta dell'Offset

Bisogna tenere in considerazione che questa operazione di regolazione dell'Offset comporta comunque un errore, in quanto non si è proprio sicuri che il cursore luminoso sia proprio nel punto stabilito.

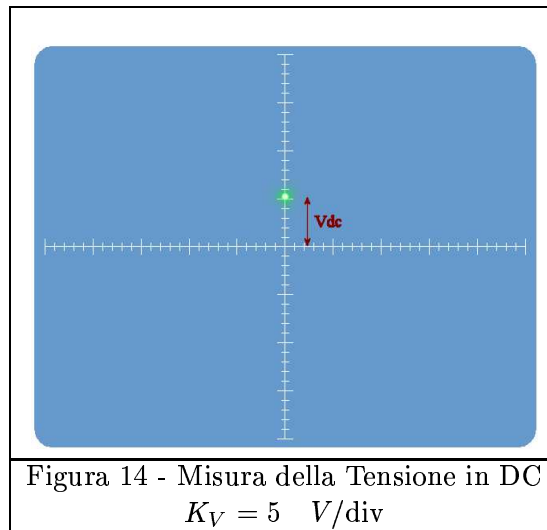
Nell'indicare l'incertezza di ogni singola misura, bisognerà tenere conto dell'errore (mezza tacca) della lettura e dell'errore dell'offset: supponiamo di indicare con  $\sigma_{off}$  l'incertezza sull'offset e con  $\sigma$  quella sulla lettura. L'incertezza complessiva è data da:

$$\sigma_{tot} = \sqrt{\sigma_{off}^2 + \sigma^2}$$

Essendo le due incertezze pari a mezza tacca, si ha:

$$\sigma_{tot} = \sqrt{2} \cdot \sigma$$

Si commuta l'indicatore DC/GND/AC su DC e si esegue la misurazione:



Dall'indicazione risultano: 1 divisione più o meno mezza tacca; si è detto che una tacca corrisponde a  $1/5$  di divisione, per cui mezza tacca corrisponde a  $\frac{1/5}{2} = 0.1$ . La lettura è da intendersi pari a

$$1.0 \pm 0.1 \text{ div}$$

Si è selezionato, mediante il commutatore VOLTS/DIV, 5 Volts per divisione, quindi:

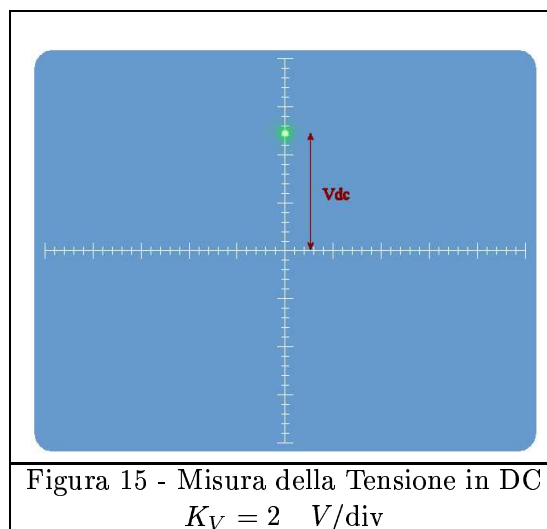
$$K_V = 5 \text{ V/div}$$

$$(1.0 \pm 0.1) \cdot K_V = 5.0 \pm 0.5 \text{ V}$$

considerando l'incertezza complessiva:

$$V_{dc} = 5.0 \pm 0.7 \text{ V}$$

Si ripete la misura selezionando  $K_V = 2 \text{ V/div}$ , e si ottiene:



$$K_V = 2 \text{ V/div}$$

$$(2.5 \pm 0.1) \cdot K_V = 5.0 \pm 0.2 \text{ V}$$

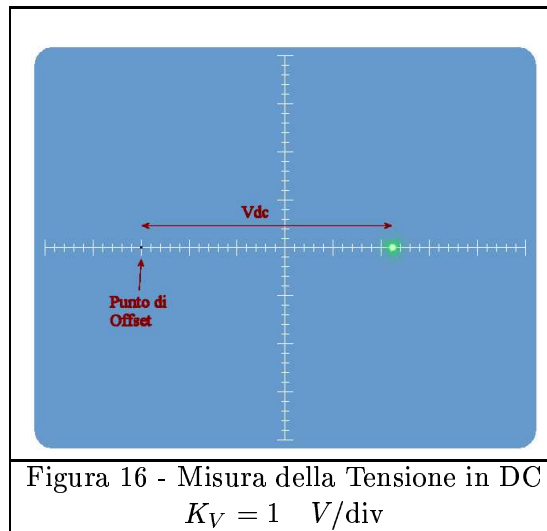


$$V_{dc} = 5.0 \pm 0.3 \text{ V}$$

Si collega il solito generatore in cc nel canale 2 (canale Orizzontale) e si seleziona

$$K_V = 1 \text{ V/div}$$

Dopo aver eseguito la solita operazione di Offset<sup>5</sup>, si ottiene:



$$K_V = 1 \text{ V/div}$$

$$(5.2 \pm 0.1) \cdot K_V = 5.2 \pm 0.1 \text{ V}$$

$$V_{dc} = 5.2 \pm 0.1 \text{ V}$$

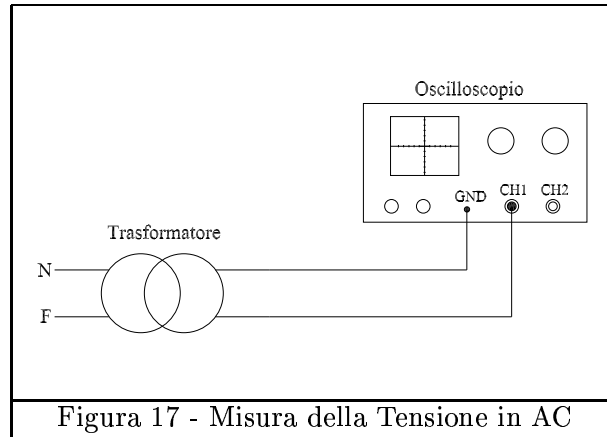
Riepilogo dei Dati:

$K_V$ [V/div]	$V_{dc}$ [V]	$\delta V$ [V]	$\frac{\delta V}{V} \cdot 100$
5	5.0	0.7	14%
2	5.0	0.3	6%
1	5.2	0.1	2%

### 1.6.2 Misura di Tensione in Alternata (a)

Si collega il trasformatore all'oscilloscopio, nel seguente modo:

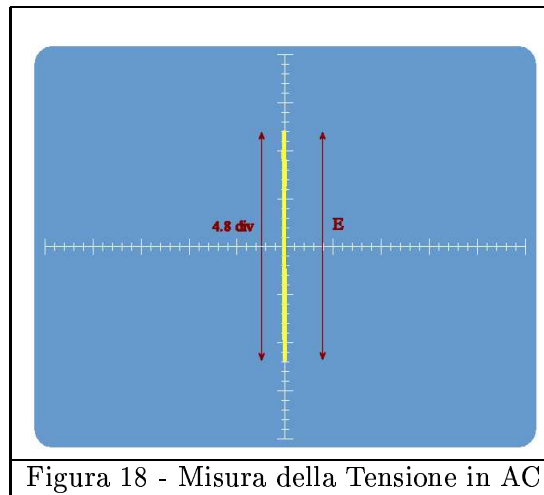
<sup>5</sup>In questo caso il punto di Offset non è l'origine, ma il punto indicato in figura.



Con il selettore DC/GND/AC posto su AC<sup>6</sup>, ed avendo impostato

$$K_V = 5 \quad \text{V/div}$$

si ottiene:



La lettura è da intendersi:

$$[4.8 \pm 0.1] \quad \text{div}$$

Il valore misurato è:

$$[4.8 \pm 0.1] \cdot K_V = 24.0 \pm 0.5 \quad \text{V}$$

Considerando l'incertezza complessiva ( $\sqrt{2}\sigma$ ):

$$E = 24.0 \pm 0.7 \quad \text{V}$$

Da questo valore di  $E$  si ricava il corrispondente valore efficace<sup>7</sup> della tensione alternata:

$$V_{eff} = \frac{E}{2\sqrt{2}} = 8.48 \pm 0.25 \quad \text{V} \Rightarrow$$

<sup>6</sup>Il selettore TIME/DIV è impostato su XY, ciò fa sì che il cursore dell'oscilloscopio non vari la sua posizione in funzione del tempo, ma soltanto in funzione del valore di tensione presente sul canale.

<sup>7</sup>Questo valore deve essere considerato con molta cautela; infatti il  $V_{eff}$  è stato ottenuto dividendo il valor massimo per  $\sqrt{2}$ , questa operazione è lecita esclusivamente nel caso in cui il segnale sia perfettamente sinusoidale. Come si vedrà dalle figure seguenti, la tensione non è sinusoidale, ma particolarmente affetta da 5° armonica.

$$V_{eff} = 8.50 \pm 0.25 \text{ V con Oscilloscopio}$$

Effettuando la misura del valore efficace, mediante il Tester, si ottiene:

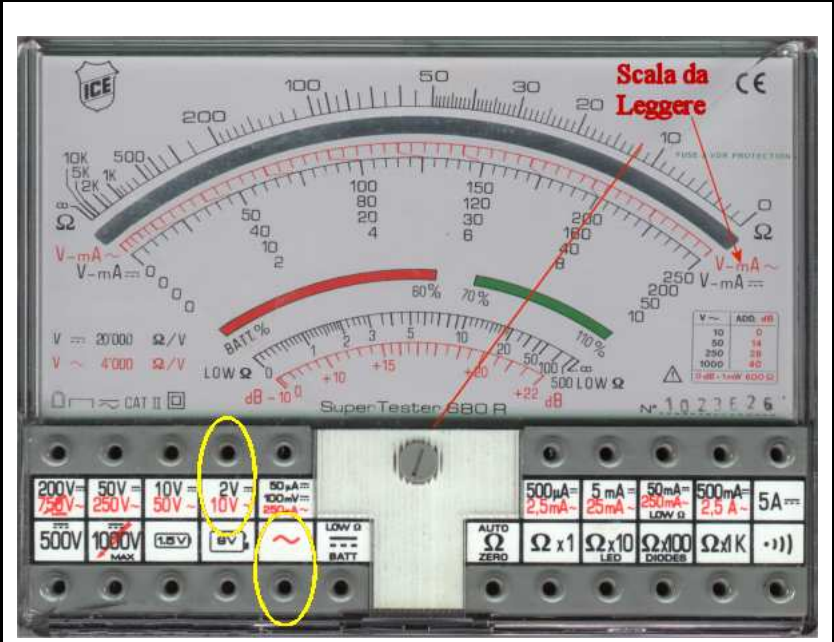


Figura 19 - Misura del Valore Efficace

La scala è composta da 50 divisioni, ed il valore di fondoscala è 10V, quindi:

$$K_V = 0.2 \text{ V/div}$$

Si ha:

$$V_{eff} = [41 \pm 0.5] \cdot K_V \Rightarrow$$

$$V_{eff} = 8.2 \pm 0.1 \text{ V con Tester}$$

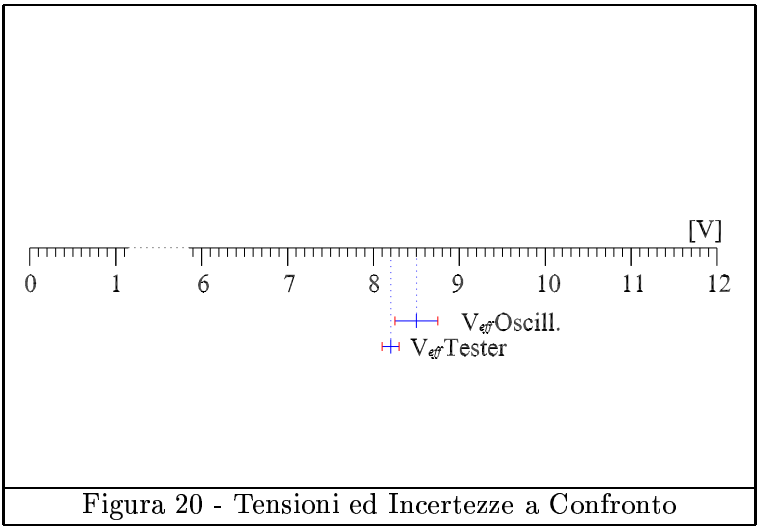
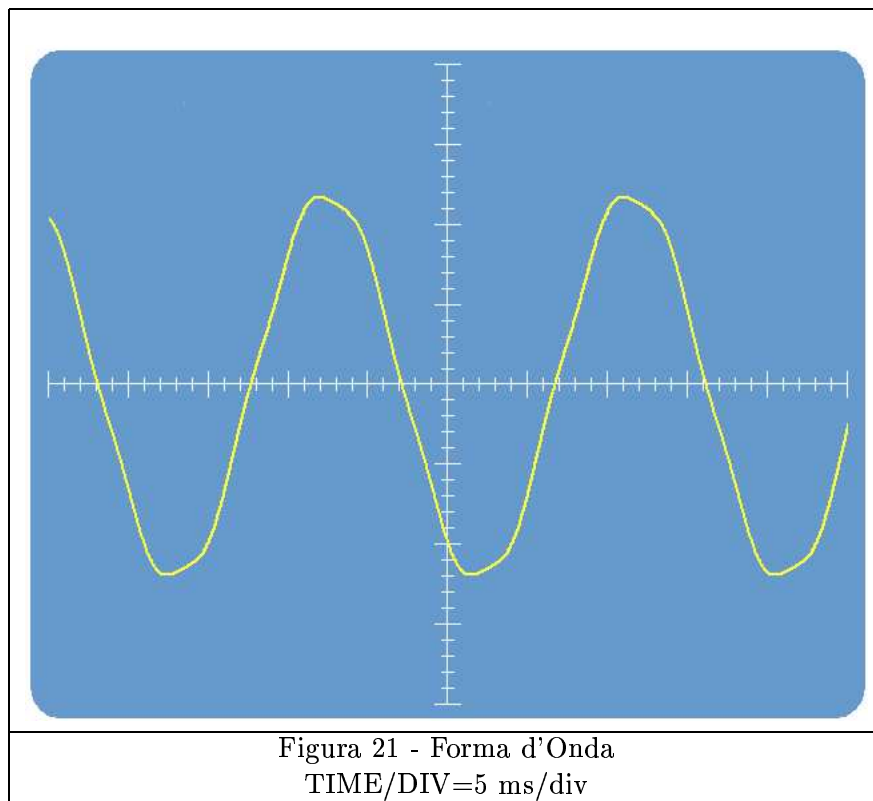


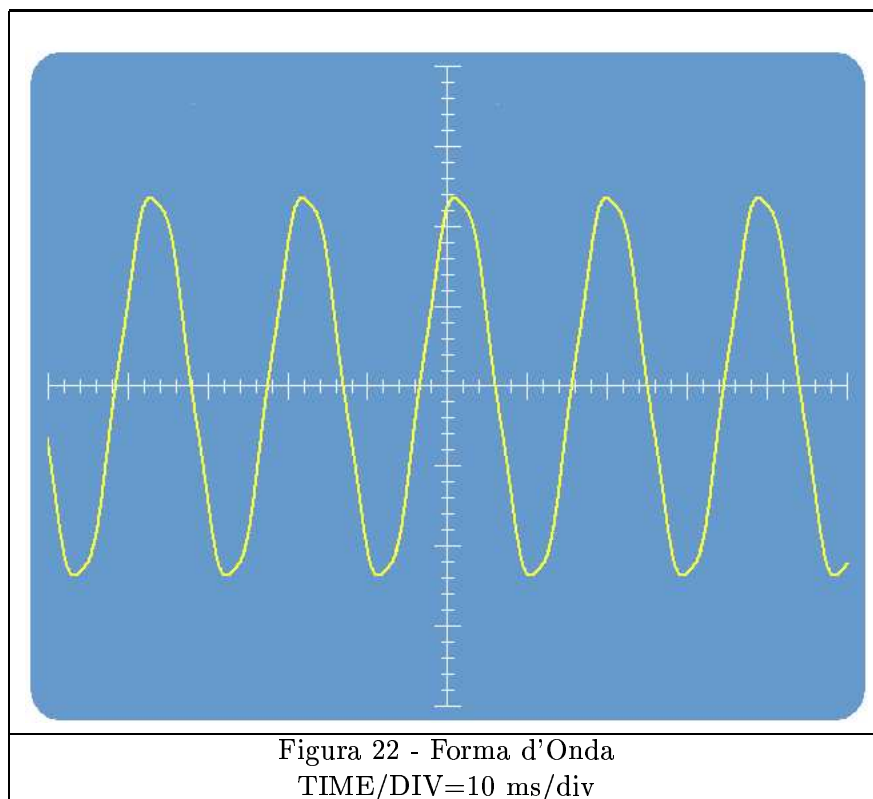
Figura 20 - Tensioni ed Incertezze a Confronto

### 1.6.3 Misura di Tensione in Alternata (b)

Si vuole rappresentare la forma d'onda della tensione il cui valore efficace è stato precedentemente misurato; per fare ciò si seleziona una scala di TIME/DIV pari a 5 ms/div; si ottiene<sup>8</sup>:



Si seleziona TIME/DIV=10 ms/div e si ottiene:



<sup>8</sup>La descrizione del metodo adottato per ottenere tale forma d'onda è riportato in Appendice.

Si inserisce in serie al trasformatore, il generatore in cc, nel seguente modo:

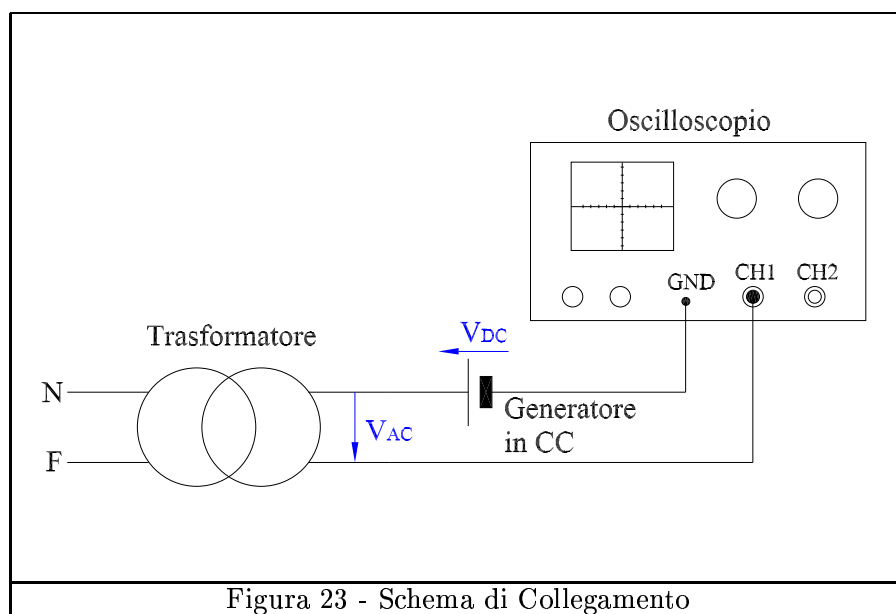


Figura 23 - Schema di Collegamento

Il segnale di tensione all'ingresso dell'oscilloscopio è composto quindi da una componente continua e da una alternata.

Si impostano i seguenti parametri:

- Selettore DC/GND/AC su DC
- Selettore VOLTS/DIV su 5 V/div
- Selettore TIME/DIV su 5 ms/div

si ottiene:

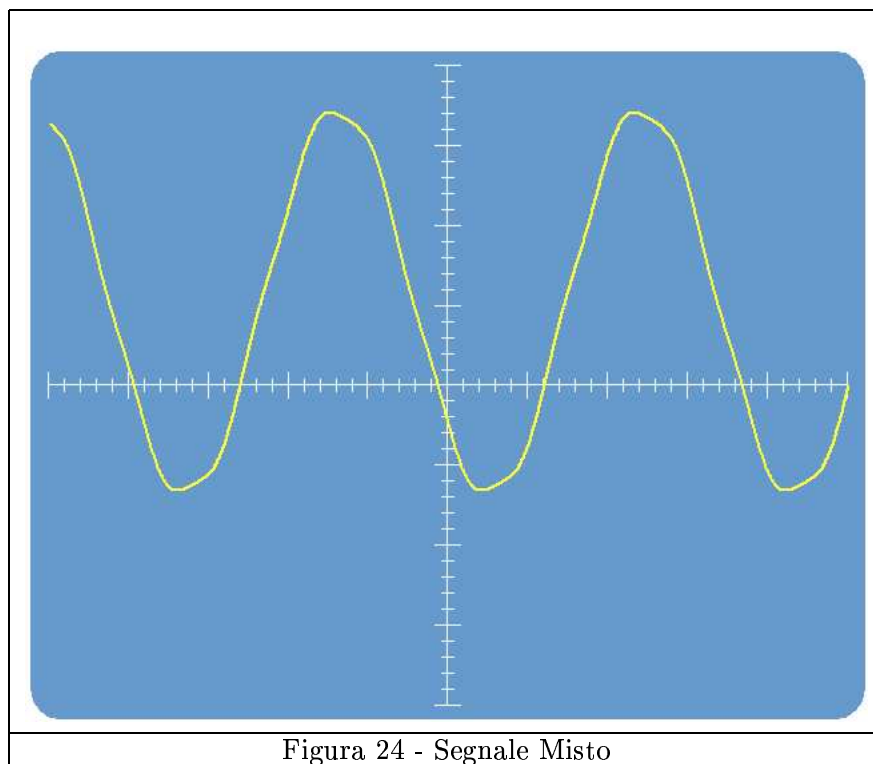
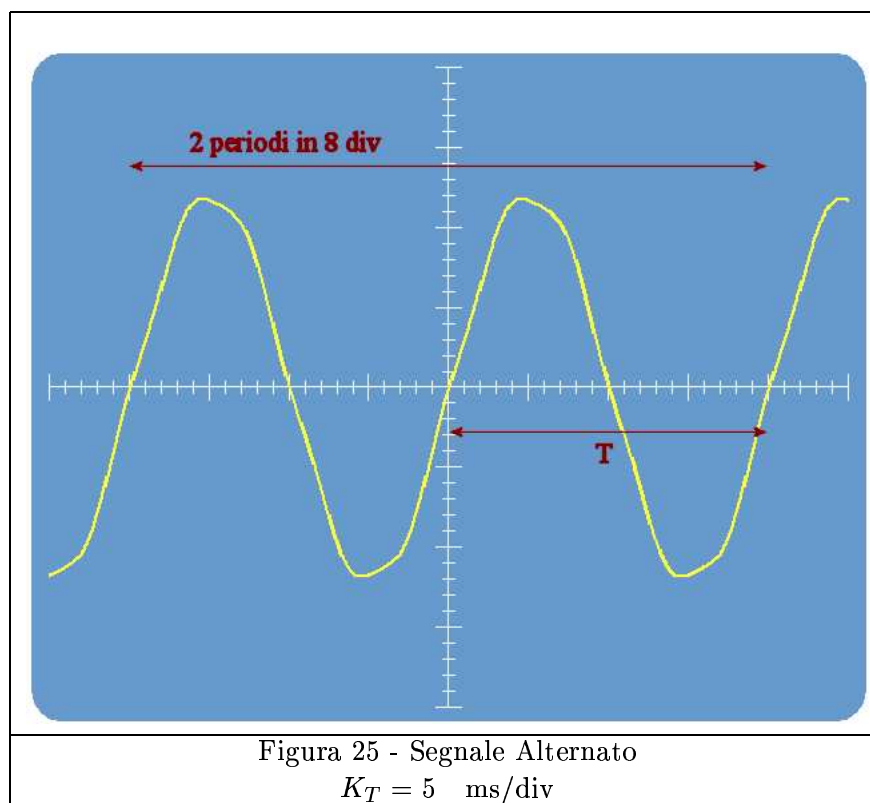


Figura 24 - Segnale Misto

Adesso, impostando il selettore DC/GND/AC su AC viene “tagliata” la componente continua del segnale; l'oscilloscopio riporta sul display la sola componente alternata.

### 1.6.4 Misura di Frequenza

Tagliata la componente continua, si agisce sulle opportune manopole per riportare l'inizio del periodo del segnale in corrispondenza dell'origine del sistema di riferimento<sup>9</sup>:



Dalla lettura risultano 2 periodi in 8 divisioni, per cui:

$$2T = [8.0 \pm 0.1] \cdot K_T = [8.0 \pm 0.1] \cdot 5 = 40.0 \pm 0.5 \text{ ms}$$

$$T = 20.00 \pm 0.25 \text{ ms}$$

Indichiamo con  $\hat{T} = 20.00 \text{ ms}$  e con  $\delta T = 0.25 \text{ ms}$ .

Dalla teoria della propagazione dell'errore, risulta:

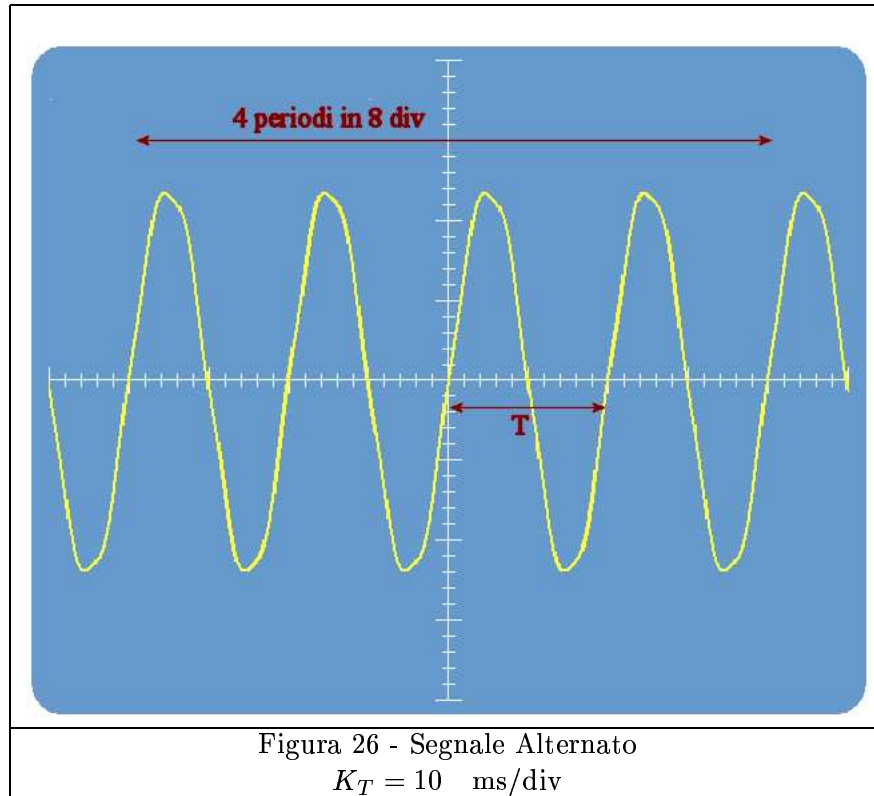
$$\nu = \frac{1}{\hat{T}} \pm \frac{\delta T}{\hat{T}^2} = \frac{1}{20.00 \times 10^{-3}} \pm \frac{0.25 \times 10^{-3}}{400 \times 10^{-6}}$$

$$\nu = 50.000 \pm 0.625 \text{ Hz} \Rightarrow$$

$$\nu = 50.0 \pm 0.6 \text{ Hz}$$

Si commuta il selettore TIME/DIV su 10 ms/div, e si esegue la suddetta operazione di centramento dell'onda; si ottiene:

<sup>9</sup>Questa operazione facilita la lettura del periodo del segnale, e quindi della frequenza dello stesso.



Dalla lettura risultano 4 periodi in 8 divisioni, per cui:

$$4T = [8 \pm 0.1] \cdot K_T = [8 \pm 0.1] \cdot 10 = 80 \pm 1 \text{ ms}$$

$$T = 20.00 \pm 0.25 \text{ ms}$$

Il risultato non cambia in quanto si è lasciato inalterato il numero di divisioni lette, mentre si è raddoppiata la costante strumentale (passando da 5 ms/div a 10 ms/div) e quindi anche il numero di periodi visualizzati.

L'operazione eseguita, corrisponde quindi a moltiplicare per 2 entrambi i membri dell'equazione precedente:

$$2 \cdot 2T = [8.0 \pm 0.1] \cdot 2 \cdot K_T$$

La Frequenza misurata risulta pari a:

Frequenza [Hz]	Incertezza [Hz]	Err.Relativo %
50.0	0.6	1.2%

### Osservazione

Riprendiamo il primo caso:  $K_T = 5 \text{ ms/div}$ .

Dall'oscilloscopio risulta che un periodo ricopra 4 divisioni, per cui:

$$T = [4 \pm 0.1] \cdot 5 = 20.0 \pm 0.5 \text{ ms}$$

quindi

$$\nu = 50.00 \pm 1.25 \text{ Hz}$$

Mentre, nel caso in cui  $K_T = 10 \text{ ms/div}$ , si ha una corrispondenza di 1 periodo in 2 divisioni:

$$T = [2 \pm 0.1] \cdot 10 = 20 \pm 1 \text{ ms}$$

quindi

$$\nu = 50.0 \pm 2.5 \text{ Hz}$$

Quindi, nel caso in cui si esegua la misurazione osservando un solo periodo, si commette un errore superiore:

$K_T$ [ms/div]	Frequenza [Hz]	Incertezza [Hz]	Err.Relativo %
5	50.00	1.25	2.5%
10	50.0	2.5	5%

Appare evidente, quindi, il vantaggio di effettuare il conteggio di più periodi, e l'osservazione delle divisioni corrispondenti, considerando, tuttavia, che incrementare eccessivamente il numero di periodi visualizzati dallo strumento può produrre maggiore difficoltà nel conteggio dei periodi stessi; infatti può accadere che non si riesca a distinguere l'inizio di un periodo con la fine di quello precedente.

La scelta della scala di lettura opportuna è dettata dal buon senso dell'operatore.

(Stesura completata in data 16/11/2003)



## Relazione 2

# Circuiti RC ed RLC

Nei successivi due paragrafi, verrà trattata la metodologia con la quale, attraverso misure di laboratorio, si ricavano i valori dei parametri legati ai modelli teorici che descrivono i seguenti fenomeni:

1. Scarica di un Condensatore.
2. Dinamica di un circuito RLC.

E' da sottolineare il fatto che, di entrambi i fenomeni summensionati, si conosce l'equazione differenziale che ne descrive la dinamica, e le relative soluzioni. Si è, quindi in possesso del modello teorico e si vogliono determinare i parametri che lo descrivono (p.e. costante di tempo del circuito RC, periodo di oscillazione di quello RLC ecc.).

### 2.1 Scarica del Condensatore

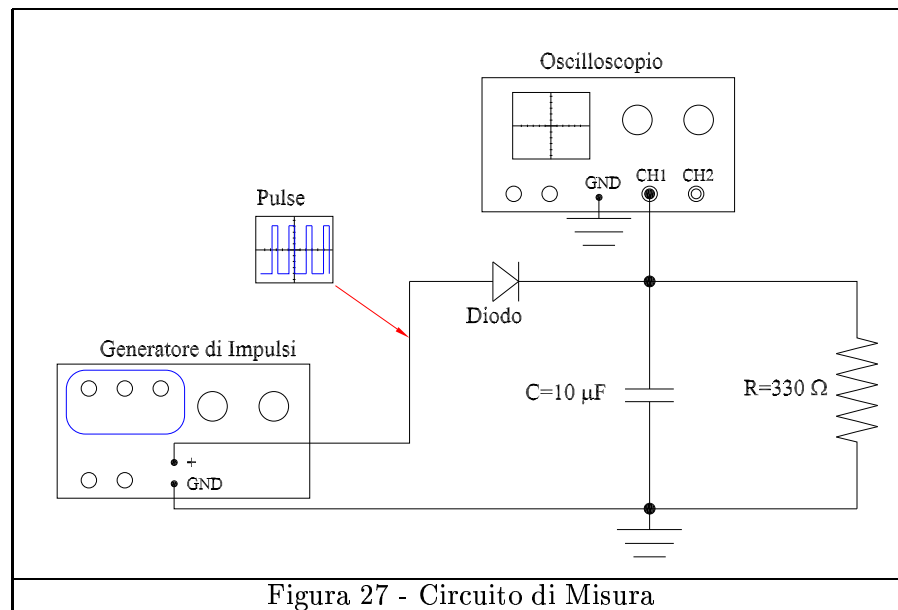
La scarica di un condensatore attraverso una resistenza, è un fenomeno cosiddetto ad andamento esponenziale, nel senso che la tensione, comune ad entrambi i componenti elettrici, segue un andamento del tipo:

$$v(t) = V_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

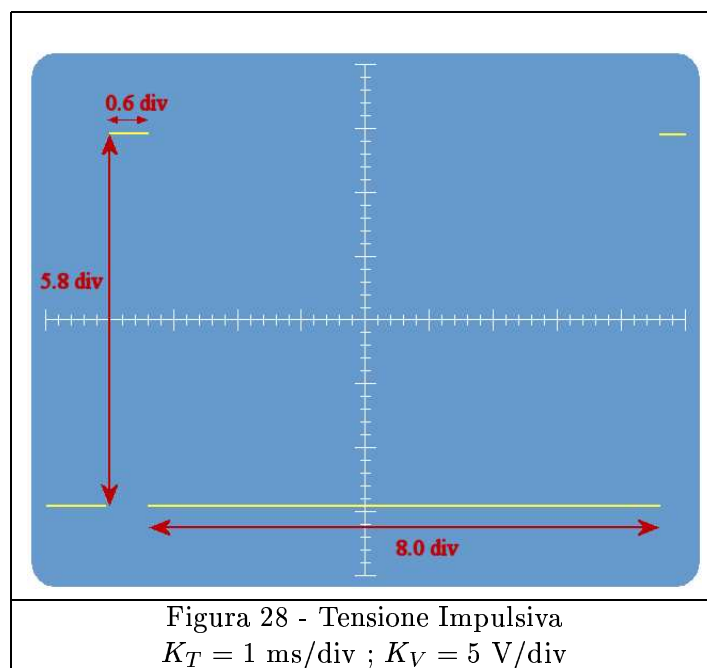
In questo paragrafo ci occuperemo della determinazione dei due parametri  $V_0$  e  $\tau$  (rispettivamente denominati 'tensione iniziale' e 'costante di tempo') mediante misure opportune.

### 2.1.1 Descrizione del Circuito

Per monitorare la scarica del condensatore si utilizza il seguente circuito:



Il generatore di impulsi, genera un segnale in tensione che appare sul display dell'oscilloscopio nel seguente modo:



La tensione picco-picco vale:

$$V_{pp} = (5.8 \pm 0.1) \cdot K_V \Rightarrow$$

$$V_{pp} = 29.0 \pm 0.5 \text{ V}$$

Il valor massimo della tensione vale  $V_M = \frac{V_{pp}}{2} \Rightarrow$

$V_M = 14.5 \pm 0.4 \text{ V}$	(comprensivo di errore di offset)
--------------------------------	-----------------------------------

Il periodo vale:  $T = (8.6 \pm 0.1) \cdot K_T \Rightarrow$

$T = 8.6 \pm 0.1 \quad \text{ms}$
-----------------------------------

Per la disposizione del diodo, il condensatore si può caricare soltanto durante l'intervallo di tempo in cui la tensione risulta positiva, mentre durante l'intervallo in cui è negativa il diodo provvede ad isolare il condensatore dal generatore.

Mediante questa inserzione, quindi, è possibile caricare il condensatore, e farlo scaricare soltanto attraverso la resistenza<sup>1</sup>  $R$  da  $330 \quad \Omega$ .

### 2.1.2 Considerazioni teoriche

La costante di tempo del circuito RC risulta:

$$\tau = R \cdot C \pm \delta\tau$$

$$\text{dove } R = 330\Omega \pm 5\% \quad C = 10\mu\text{F} \pm 20\%$$

Considerando che sia la resistenza, sia la capacità sono affette da incertezza; in particolare la resistenza ha un'incertezza del 5% a cui corrisponde  $\delta R = 16.5 \quad \Omega$  mentre l'incertezza sulla capacità è pari al 20%, cioè  $\delta C = 2 \quad \mu\text{F}$ , e che esse sono assolutamente indipendenti si ha:

$$\delta\tau = \sqrt{\left(\frac{\partial\tau}{\partial R} \cdot \delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial C} \cdot \delta C\right)^2} = \sqrt{(C \cdot \delta R)^2 + (R \cdot \delta C)^2} = 0.68 \quad \text{ms}$$

$\tau = 3.3 \pm 0.7 \quad \text{ms}$
--------------------------------------

**Il tempo di dimezzamento** è definito come l'intervallo di tempo necessario affinché la tensione ai capi del condensatore divenga la metà di quella iniziale.

La tensione ai capi di C ha il seguente andamento:

$$v(t) = V_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

quindi  $v(\delta) = \frac{V_0}{2} \Rightarrow$

$$e^{-\frac{\delta}{\tau}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \delta = \ln(2) \cdot \tau$$

$\delta = 2.3 \pm 0.5 \quad \text{ms}$
--

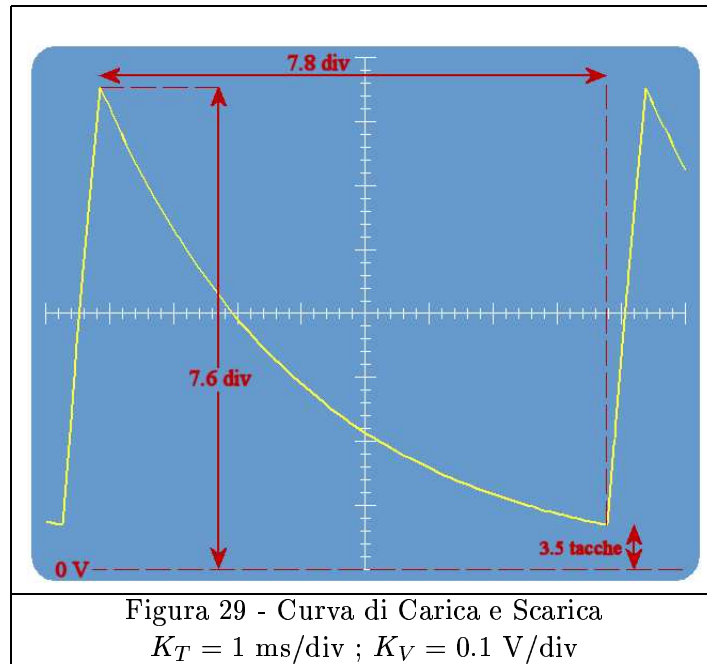
Alla fine questi valori saranno confrontati con gli analoghi ottenuti sperimentalmente.

---

<sup>1</sup>Se non ci fosse il diodo, l'analisi della fase di scarica del condensatore sarebbe molto più complessa, in quanto la resistenza di scarica non sarebbe la sola  $R$ , ma anche quella interna del generatore (che non si conosce); per non parlare dell'effetto che avrebbe l'inversione della tensione ai capi del condensatore!

### 2.1.3 Forme d'onda

Dopo aver posto la linea di riferimento coincidente con linea più bassa del display (mediante il selettore DC/GND/AC posto su GND: regolazione dell'offset), si ottiene<sup>2</sup>:



Quindi si osserva che il valore di picco della tensione ai capi del condensatore vale:

$$V_{Cmax} = (7.6 \pm 0.1) \cdot K_V \Rightarrow$$

$$V_{Cmax} = 0.76 \pm 0.01 \quad \text{V} \quad (\text{ricordare che } \sigma = 0.01 \cdot \sqrt{2} \simeq 0.01 \text{ V})$$

Questo valore è notevolmente inferiore al valore di picco della tensione impulsiva fornita, a vuoto, dal generatore ( $V_M = 14.5 \pm 0.4 \text{ V}$ ); ciò è dovuto, fondamentalmente, alla presenza dell'impedenza interna del generatore (ed anche alla resistenza del diodo) che produce, in presenza del carico resistivo ( $R = 330 \text{ }\Omega$ ), una caduta di tensione<sup>3</sup>.

Il valor minimo della tensione corrisponde a 3.5 tacche; essendo 1 tacca uguale a 0.2 divisioni, si ha:

$$V_{Cmin} = [3.5 \cdot 0.2 \pm 0.1] K_V$$

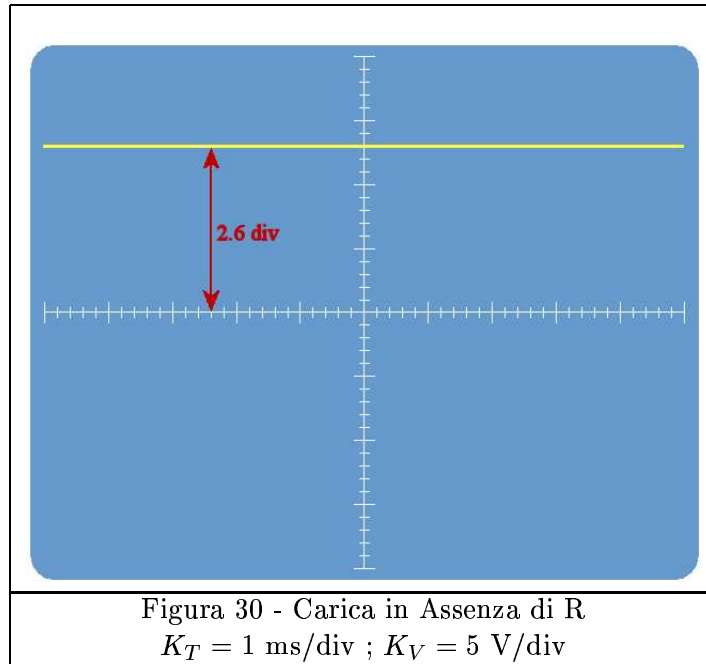
$$V_{Cmin} = 70 \pm 10 \quad \text{mV}$$

Proviamo a disinserire la resistenza da  $330\Omega$  lasciando sotto alimentazione il circuito costituito dal diodo e dal condensatore; si ottiene<sup>4</sup>:

<sup>2</sup>Questa forma d'onda è ottenuta mediante una simulazione con OrCAD. Tale simulazione è descritta dettagliatamente in Appendice

<sup>3</sup>In Appendice sono stati riportati i criteri in base ai quali si è arrivati alle suddette conclusioni, in particolare si è eseguita una simulazione mediante OrCAD del circuito di misura, riuscendo così a stimare anche la resistenza interna del generatore:  $R_{int} \simeq 1k\Omega$

<sup>4</sup>Anche questa simulazione è descritta in dettaglio, nell'Appendice



In questo caso il condensatore raggiunge una tensione pari a:

$$(2.6 \pm 0.1) \cdot K_V = 13.0 \pm 0.5 \text{ V}$$

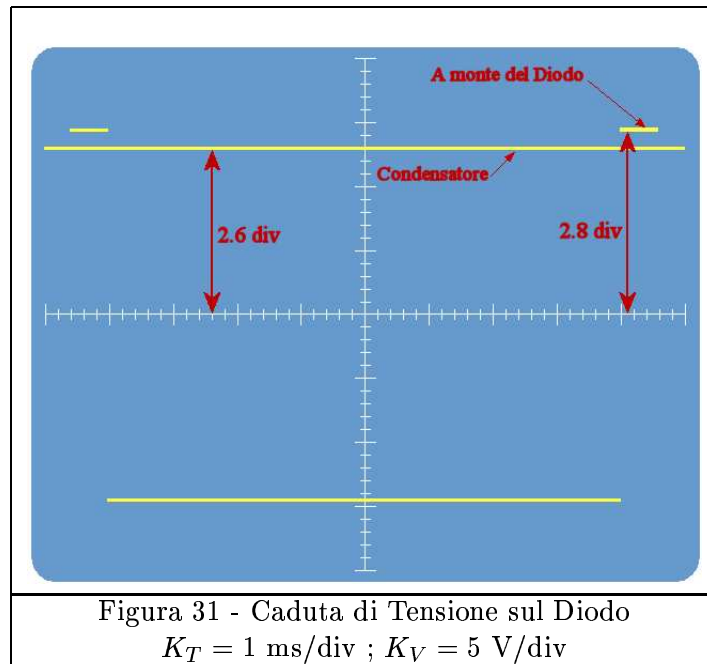
$$V_C = 13.0 \pm 0.7 \text{ V (Comprende l'errore di Offset)}$$

Una tensione notevolmente superiore al caso precedente, e ciò è dovuto al fatto che, trascurando l'ammettenza interna dell'oscilloscopio e quella di dispersione, il condensatore si carica durante l'intervallo di tempo in cui la tensione di alimentazione è positiva, e, non potendosi scaricare attraverso la resistenza, mantiene la carica negli istanti successivi. La carica, quindi, aumenta intervallo per intervallo fino a che la tensione sul condensatore non raggiunge il valore massimo possibile.

Il valor massimo di tensione sul condensatore non eguaglia quello di alimentazione in quanto nel circuito vi sono comunque delle cadute di tensione<sup>5</sup>.

Utilizzando anche il secondo canale dell'oscilloscopio si riesce a monitorare anche il potenziale a monte del diodo, e valutare così la caduta di tensione ai suoi capi:

<sup>5</sup> Anche se la resistenza interna dell'oscilloscopio è elevata (piccola ammettenza) si ha comunque un passaggio di corrente il quale genera, sulla resistenza interna dell'alimentatore e sul diodo un'inevitabile c.d.t.



La c.d.t. sul diodo vale:

$$\Delta V_D = [(2.8 \pm 0.1) - (2.6 \pm 0.1)] \cdot K_V \Rightarrow$$

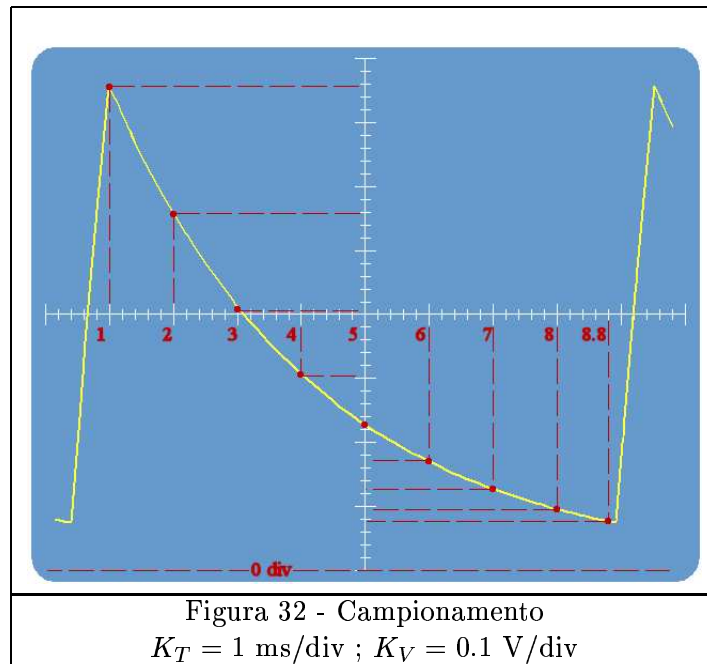
$$\Delta V_D = 1 \pm 1 \quad \text{V}$$

Da notare l'errore relativo del 100% dovuto all'operazione di sottrazione di misure che differiscono di una quantità confrontabile con la propria incertezza. E' evidente che questo metodo di misura della caduta di tensione sul diodo, è del tutto inadeguato. Per valutarla con maggiore precisione sarebbe stato necessario diminuire la costante  $K_V$ ; operazione che non è stata eseguita in virtù del fatto che non era necessario valutare la c.d.t., ma soltanto accertarne la presenza.

#### 2.1.4 Determinazione Sperimentale dei Parametri

Si effettua il campionamento del segnale in tensione relativo alla scarica del condensatore<sup>6</sup>:

<sup>6</sup>Il circuito è quello composto da Diodo, Condensatore e Resistenza da  $330\Omega$



Indicando con  $x$  le grandezze relative all'asse orizzontale, e con  $y$  quelle dell'asse verticale, si ha:

$i$	$\text{div} x_i$	$\text{div} y_i$	$x_i$ [ms]	$y_i$ [V]	$\delta x$ [ms]	$\delta y$ [V]
1	1.0	7.6	1.0	0.760	0.1	0.01
2	2.0	5.6	2.0	0.560	0.1	0.01
3	3.0	4.0	3.0	0.400	0.1	0.01
4	4.0	3.0	4.0	0.300	0.1	0.01
5	5.0	2.2	5.0	0.220	0.1	0.01
6	6.0	1.8	6.0	0.180	0.1	0.01
7	7.0	1.2	7.0	0.120	0.1	0.01
8	8.0	1.0	8.0	0.100	0.1	0.01
9	8.8	0.8	8.8	0.080	0.1	0.01

(Si è tenuto conto del fatto che l'incertezza su  $y$  è data da  $\sqrt{2} \cdot \delta y \simeq 0.01 \text{ V}$ )

Si è visto che la tensione ai capi del condensatore, in fase di scarica segue la legge:

$$v_c(t) = V_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\tau = RC)$$

Bisogna determinare il valore dei parametri  $V_0$  e  $\tau$ .

Per rendere più leggibili le equazioni si eseguono le seguenti sostituzioni:

$$\begin{cases} y = v_c(t) \\ a = V_0 \\ b = -\frac{1}{\tau} \\ x = t \end{cases}$$

L'equazione diviene:

$$y = a \cdot e^{bx} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{a} = e^{bx}$$

Si LINEARIZZA la relazione:

$$\ln\left(\frac{y}{a}\right) = b \cdot x$$

Il parametro  $a$  ha le dimensioni di  $y$ , cioè si misura in V.

$\frac{y}{a}$  è un numero puro, quindi lo è anche  $b \cdot x$ ; allora  $b$  ha le dimensioni di  $[x^{-1}]$ , e quindi si misura in  $\frac{1}{\text{ms}}$ .

Si fa l'ulteriore sostituzione:

$$\begin{cases} \tilde{y} = \ln(y) \\ \tilde{a} = \ln(a) \end{cases}$$

L'equazione finale risulta:

$$\tilde{y} = \tilde{a} + b \cdot x$$

che è una relazione lineare nei parametri  $\tilde{a}$  e  $b$  ( e nelle variabili  $\tilde{y}$  e  $x$  ).

Avendo posto  $\tilde{y} = \ln(y)$ , si ha che:

$$\delta\tilde{y}_i = \frac{\delta y_i}{y_i}$$

Il nostro scopo è quello di effettuare l'interpolazione dei dati per determinare i parametri di interesse, si ricordi che per effettuare l'interpolazione con il metodo dei minimi quadrati sono necessarie due ipotesi:

1. Gli errori devono essere gaussiani.

2. Deve essere  $\left| \frac{\delta\tilde{y}_i}{\tilde{y}_i} \right| >> \left| \frac{\delta x_i}{x_i} \right|$ .

Nel nostro caso non c'è motivo di credere che gli errori non siano gaussiani, per cui resta da verificare la seconda ipotesi; a tal fine si riporta la seguente tabella:

$i$	$x_i$ [ms]	$y_i$ [V]	$\delta x_i$ [ms]	$\delta y_i$ [V]	$\tilde{y}_i = \ln(y_i)$	$\delta\tilde{y}_i$	$\left  \frac{\delta x_i}{x_i} \right $	$\left  \frac{\delta\tilde{y}_i}{\tilde{y}_i} \right $	$\left  \frac{\delta\tilde{y}_i}{\tilde{y}_i} \right  >> \left  \frac{\delta x_i}{x_i} \right  ?$
1	1.0	0.76	0.1	0.01	-0.1192	0.0132	0.1000	0.110	FALSO
2	2.0	0.56	0.1	0.01	-0.2518	0.0182	0.0500	0.072	FALSO
3	3.0	0.40	0.1	0.01	-0.3979	0.0250	0.0333	0.063	FALSO
4	4.0	0.30	0.1	0.01	-0.5229	0.0333	0.0250	0.064	FALSO
5	5.0	0.22	0.1	0.01	-0.6576	0.0454	0.0200	0.069	VERO
6	6.0	0.18	0.1	0.01	-0.7447	0.0556	0.0167	0.074	VERO
7	7.0	0.12	0.1	0.01	-0.9208	0.0833	0.0143	0.090	VERO
8	8.0	0.10	0.1	0.01	-1.0000	0.1000	0.0125	0.100	VERO
9	8.8	0.08	0.1	0.01	-1.0969	0.1250	0.0114	0.114	VERO

La condizione  $\left| \frac{\delta\tilde{y}_i}{\tilde{y}_i} \right| >> \left| \frac{\delta x_i}{x_i} \right|$  si intende VERA quando

$$\left| \frac{\delta\tilde{y}_i}{\tilde{y}_i} \right| \geq 3 \cdot \left| \frac{\delta x_i}{x_i} \right|$$

Si noti che la condizione suddetta non sia verificata nei primi 4 casi, per questo verranno seguite due diverse metodologie di calcolo dei parametri:

- Metodo del FIT Lineare
- Metodo del FIT Iterativo



### 2.1.5 Metodo del FIT Lineare

Consiste nell'applicazione del metodo dei minimi quadrati, nel caso in cui sia verificata la condizione  $\left| \frac{\delta \tilde{y}_i}{\tilde{y}_i} \right| \gg \left| \frac{\delta x_i}{x_i} \right|$ .

Supponiamo che lo sia  $\forall i$ , si pone:

$$S = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\tilde{y}_i - f_{\tilde{a},b}(x_i)}{\tilde{\sigma}_i} \right)^2$$

dove si intende:

$$\begin{cases} N = 9 \\ f_{\tilde{a},b}(x_i) = \tilde{a} + b \cdot x_i \\ \tilde{\sigma}_i = \delta \tilde{y}_i \end{cases}$$

Determinare i migliori estimatore di  $\tilde{a}$  e  $b$  significa minimizzare  $S$ , rispetto ad  $\tilde{a}$  e  $b$ :

$$\begin{cases} \frac{dS}{d\tilde{a}} = -2 \sum_{i=1}^9 \left( \frac{\tilde{y}_i - \tilde{a} - b \cdot x_i}{\tilde{\sigma}_i^2} \right) = 0 \\ \frac{dS}{db} = -2 \sum_{i=1}^9 \left( \frac{\tilde{y}_i - \tilde{a} - b \cdot x_i}{\tilde{\sigma}_i^2} \cdot x_i \right) = 0 \end{cases}$$

Le quali conducono al seguente sistema:

$$\begin{cases} \tilde{a} \cdot \sum_{i=1}^9 \frac{1}{\tilde{\sigma}_i^2} + b \cdot \sum_{i=1}^9 \frac{x_i}{\tilde{\sigma}_i^2} = \sum_{i=1}^9 \frac{\tilde{y}_i}{\tilde{\sigma}_i^2} \\ \tilde{a} \cdot \sum_{i=1}^9 \frac{x_i}{\tilde{\sigma}_i^2} + b \cdot \sum_{i=1}^9 \frac{x_i^2}{\tilde{\sigma}_i^2} = \sum_{i=1}^9 \frac{\tilde{y}_i \cdot x_i}{\tilde{\sigma}_i^2} \end{cases}$$

Si fanno le seguenti sostituzioni:

$$\begin{cases} S_1 = \sum_{i=1}^9 \frac{1}{\tilde{\sigma}_i^2} \\ S_x = \sum_{i=1}^9 \frac{x_i}{\tilde{\sigma}_i^2} \\ S_y = \sum_{i=1}^9 \frac{\tilde{y}_i}{\tilde{\sigma}_i^2} \\ S_{xx} = \sum_{i=1}^9 \frac{x_i^2}{\tilde{\sigma}_i^2} \\ S_{xy} = \sum_{i=1}^9 \frac{\tilde{y}_i \cdot x_i}{\tilde{\sigma}_i^2} \end{cases}$$

Si pone il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_x \\ S_x & S_{xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_y \\ S_{xy} \end{bmatrix}$$

Se la matrice del sistema non è singolare, la soluzione del sistema è:

$$\begin{bmatrix} \tilde{a} \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_x \\ S_x & S_{xx} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} S_y \\ S_{xy} \end{bmatrix}$$

Le incertezze sugli estimatori  $\tilde{a}$  e  $b$  sono rispettivamente:

$$\sigma_{\tilde{a}} = \sqrt{\frac{S_{xx}}{S_1 \cdot S_{xx} - S_x^2}}$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{S_1}{S_1 \cdot S_{xx} - S_x^2}}$$

Per eseguire i suddetti calcoli si usa un listato MATLAB<sup>7</sup>, e si ottiene:

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= 0.0197 & \sigma_{\tilde{a}} &= 0.0153 \\ b &= -0.3011 \text{ } 1/ms & \sigma_b &= 0.0057 \text{ } 1/ms \end{aligned}$$

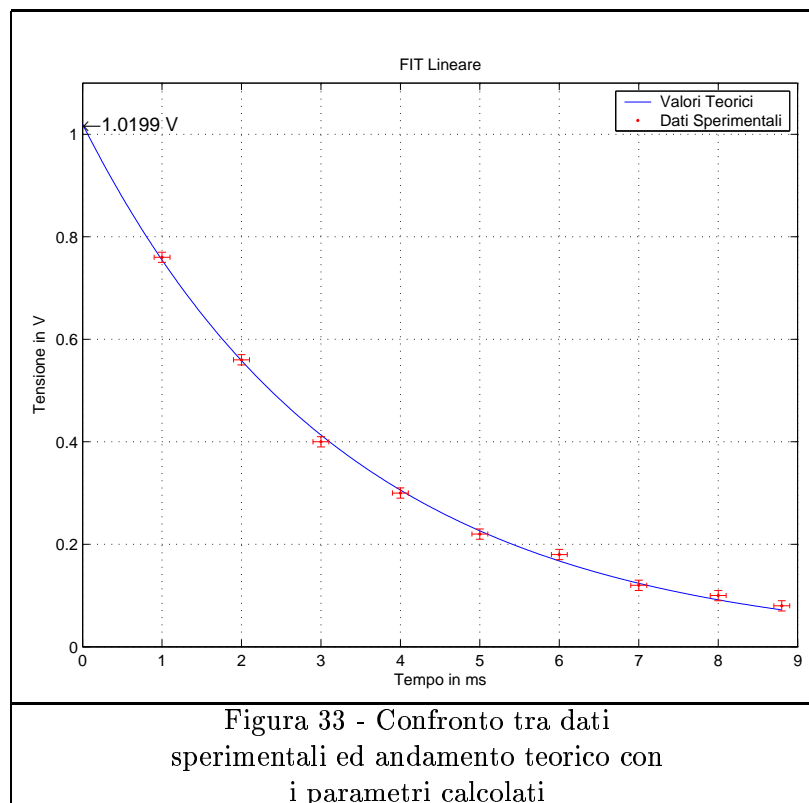
Si deve ricordare che

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \ln(a) \Rightarrow a = e^{\tilde{a}} \\ \sigma_a &= e^{\tilde{a}} \cdot \sigma_{\tilde{a}} \end{aligned}$$

Il programma restituisce:

$a = 1.0199 \text{ V}$	$\sigma_a = 0.0156 \text{ V}$
------------------------	-------------------------------

Il listato è in grado di fornire anche l'andamento grafico relativo alle variabili sperimentali e teoriche:



<sup>7</sup>riportato in Appendice

Riepilogando, i risultati sono:

$$V_0 = 1.02 \pm 0.02 \text{ V}$$

Valore ottenuto dalle Misure	Valore Teorico
$\tau = 3.3 \pm 0.1 \text{ ms}$	$\tau = 3.3 \pm 0.7 \text{ ms}$
Valore ottenuto dalle Misure	Valore Teorico
$\delta = 2.3 \pm 0.1 \text{ ms}$	$\delta = 2.3 \pm 0.5 \text{ ms}$

Si osservi la minore incertezza associata alle grandezze misurate rispetto alle incertezze stimate teoricamente. Questo fatto è generale, nel senso che: effettuare più misure della stessa grandezza permette di stimarla con maggior precisione. In questo caso non si sono effettuate più misure della stessa grandezza, ma si dispone comunque di tante informazioni (Il campionamento della tensione di scarica) che permettono di valutare ‘meglio’ il  $\tau$ .

**Osservazione** L'errore su  $\tau$  (Ottenuto dalle misure) si ricava da:

$$\tau = -\frac{1}{b} \Rightarrow \delta\tau = \left| \frac{\partial\tau}{\partial b} \right| \cdot \delta b = \frac{1}{b^2} \cdot \delta b = 0.0633 \text{ ms}$$

### 2.1.6 Metodo del FIT iterativo

Verrà trattato il metodo sempre con riferimento alla relazione

$$\tilde{y} = \tilde{a} + b \cdot x \text{ con } \begin{cases} \tilde{y} = \ln(y) \\ \tilde{a} = \ln(a) \end{cases}$$

Si indicherà con

$$\sigma_i \quad \alpha^{(k)} = (\tilde{a}^{(k)}, b^{(k)})$$

rispettivamente l'incertezza relativa a  $\tilde{y}_i = \ln(y_i)$  ed il vettore le cui componenti sono i parametri  $\tilde{a}$  e  $b$  calcolati al passo k-esimo di iterazione.

Con le suddette convenzioni si indica con:

$$f_{\alpha^{(k)}}(x_i) = \tilde{a}^{(k)} + b^{(k)} \cdot x_i \quad \text{Funzione al passo k-esimo}$$

$$\sigma_{eff_i}^{(k)} = \sqrt{[\sigma_i]^2 + \left[ \frac{df}{dx} \right]_{x_i, \alpha^{(k)}}^2 \cdot \sigma_{x_i}^2} \quad \text{Errore Efficace al passo k-esimo}$$

Si osservi che:

$$\left[ \frac{df}{dx} \right]_{x_i, \alpha^{(k)}} = b^{(k)} \quad \forall k \in [0, +\infty[$$

quindi l'errore efficace assume la forma:

$$\sigma_{eff_i}^{(k)} = \sqrt{[\sigma_i]^2 + [b^{(k)}]^2 \cdot \sigma_{x_i}^2}$$

### Descrizione del processo iterativo

1. Si suppone valida la condizione  $\left| \frac{\delta \tilde{y}_i}{\tilde{y}_i} \right| \gg \left| \frac{\delta x_i}{x_i} \right|$  e, dalla minimizzazione di

$$S^{(0)} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\tilde{y}_i - f_{a^{(0)}}(x_i)}{\sigma_i} \right)^2, \text{ si determinano i valori iniziali di iterazione}^8 \tilde{a}^{(0)} \text{ e } b^{(0)}.$$

2. Si pone  $\sigma_{eff}^{(1)} = \sqrt{(\sigma_i)^2 + [b^{(0)} \cdot \sigma_{x_i}]^2}$ .

3. Dalla minimizzazione di

$$S^{(1)} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\tilde{y}_i - f_{a^{(1)}}(x_i)}{\sigma_{eff}^{(1)}} \right)^2, \text{ si determinano i valori } \tilde{a}^{(1)} \text{ e } b^{(1)}.$$

4. Si pone  $\sigma_{eff}^{(2)} = \sqrt{(\sigma_i)^2 + [b^{(1)} \cdot \sigma_{x_i}]^2}$ , e si continua l'iterazione fin qui descritta.

5. Il processo di calcolo ha termine quando si verifica la condizione:

$$\left( \left| \frac{\tilde{a}^{(k)} - \tilde{a}^{(k-1)}}{\tilde{a}^{(k-1)}} \right| \leq \varepsilon \right) \text{ AND } \left( \left| \frac{b^{(k)} - b^{(k-1)}}{b^{(k-1)}} \right| \leq \varepsilon \right)$$

con  $\varepsilon$  di valore arbitrario.

Il listato MATLAB che esegue la suddetta iterazione (denominato "FitIter.m") è riportato in Appendice.

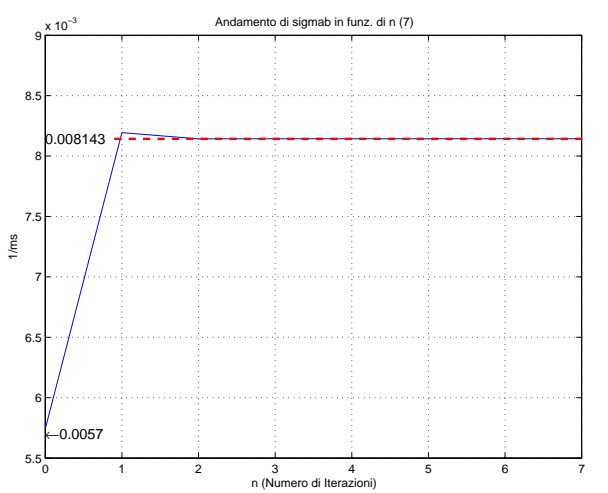
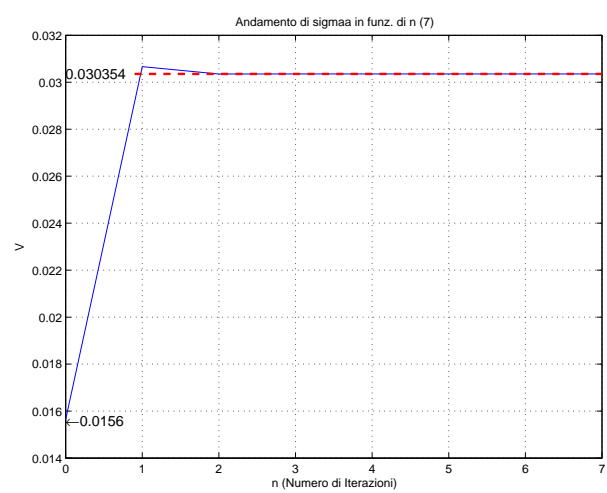
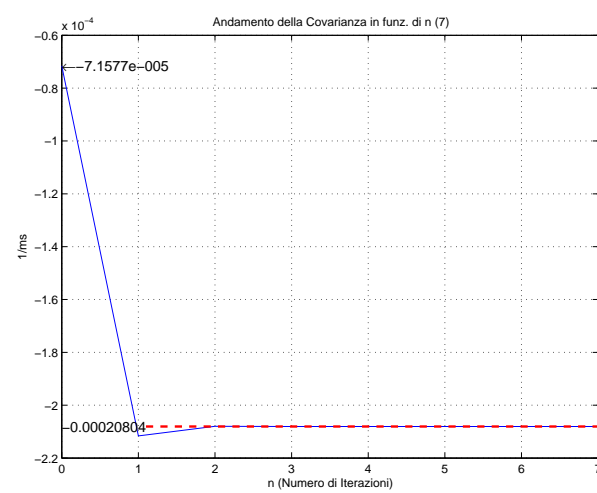
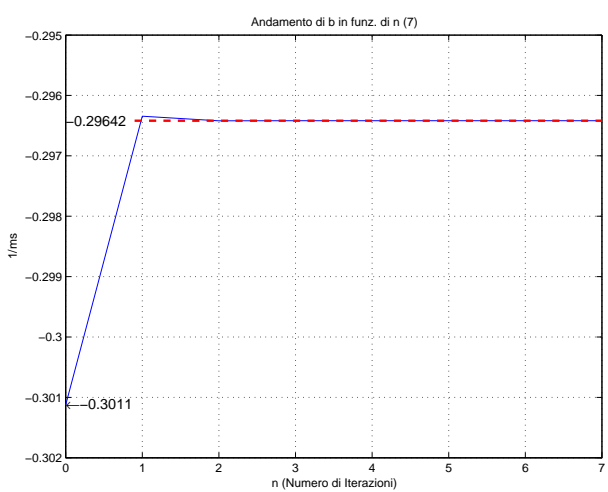
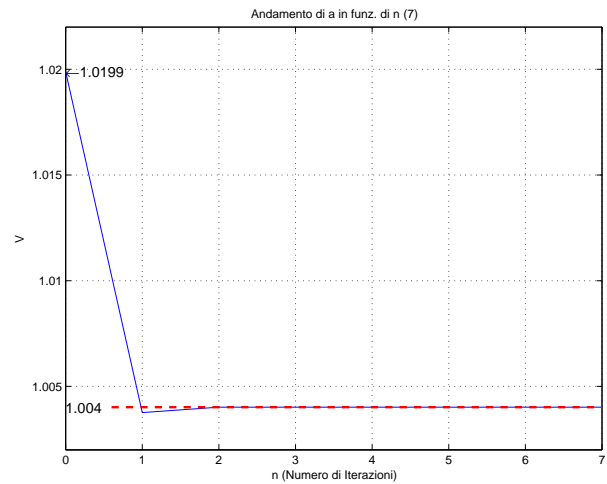
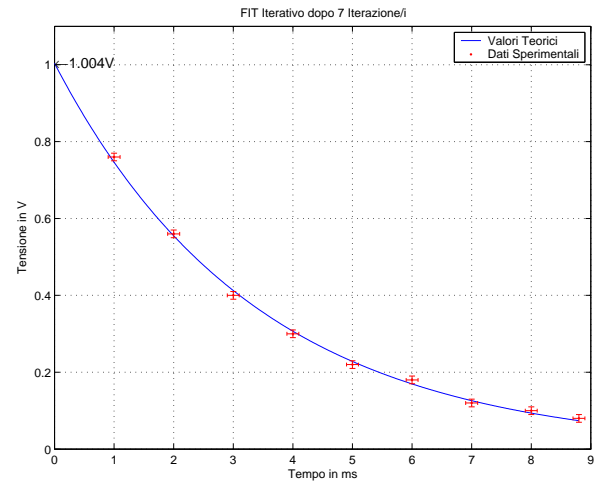
I risultati ottenuti, al variare di  $\varepsilon$ , sono:

$\varepsilon$	$n$ (n.iter.)	$a$ [V]	$b$ [ $\frac{1}{\text{ms}}$ ]	$\sigma_a$ [V]	$\sigma_b$ [ $\frac{1}{\text{ms}}$ ]	Covarianza [ $\frac{1}{\text{ms}}$ ] ( $\tilde{a}, b$ )
$10^{-3}$	4	1.004020	-0.296420	0.030349	0.008143	$-2.080412 \times 10^{-4}$
$10^{-6}$	5	1.004020	-0.296420	0.030349	0.008143	$-2.080412 \times 10^{-4}$
$10^{-9}$	7	1.004020	-0.296420	0.030349	0.008143	$-2.080412 \times 10^{-4}$

Si osserva che già dopo sole 4 iterazioni i parametri assumono valori tali che l'ultima cifra significativa riportata non vari più, incrementando il numero di iterazioni. Ciò sottolinea l'estrema rapidità di convergenza del metodo iterativo.

Si riportano gli andamenti per ciascuna delle grandezze riportate in tabella:

<sup>8</sup>Questo lo si fa avviando il programma "Fitlin.m"



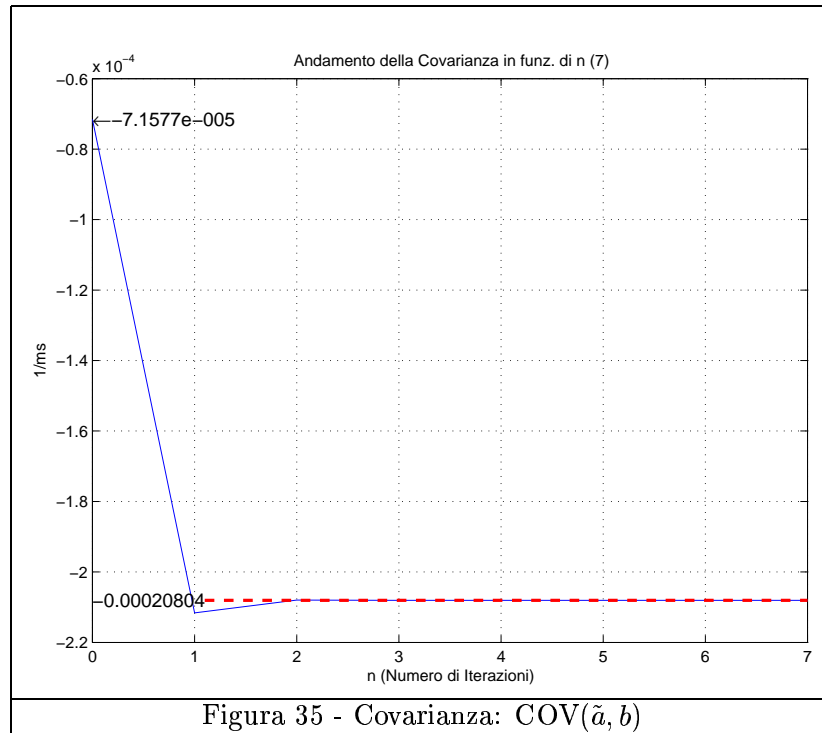
Andamento dei dati, per  $\epsilon=10^{-9}$  (Gli asintoti sono stati determinati con  $\epsilon=10^{-14}$ )

Un particolare sguardo deve essere rivolto alla Covarianza<sup>9</sup>: si osserva un aumento, in valore assoluto, nel passaggio dal metodo lineare a quello iterativo. Per quanto riguarda il metodo del FIT Lineare si ottiene:

$$\text{Cov} = -7.1577 \times 10^{-5} \quad \frac{1}{\text{ms}}$$

mentre con il metodo del FIT iterativo, si ottiene:

$$\text{Cov} = -2.08041196 \times 10^{-4} \quad \frac{1}{\text{ms}}$$



Questa tendenza ad aumentare, del valore assoluto della Covarianza, è dovuta alla richiesta di maggiore precisione per quanto riguarda il calcolo dei parametri; infatti all'aumentare del numero di iterazioni tutti i valori precedentemente indicati convergono verso dei valori limite i quali rappresentano le migliori stime dei parametri stessi, conseguentemente il legame che sussiste per i parametri  $\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$  (e, conseguentemente tra  $a$  e  $b$ ) si accentua, ovvero diventa “più difficile modificare il valore di  $a$  senza modificare quello di  $b$ ”. Essendo la covarianza un indice di quanto i due parametri  $\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$  siano tra essi correlati, appare evidente e significativo un suo aumento (in modulo!).

### 2.1.7 Curve Fitting Tool di MATLAB6.5

Per verificare la correttezza degli algoritmi ‘Fitlin.m’ e ‘FitIter.m’, si utilizza un pacchetto fornito con MATLAB 6.5 denominato **Curve Fitting Tool**.

L'applicazione si avvia digitando ‘cftool’ al prompt di MATLAB.

Dopo aver avviato il programma Fititer.m, si hanno nel Workspace di MATLAB, i dati sperimentali, in particolare i vettori  $x$  ed  $y$ .

1. Si apre il menù ‘Data’.
2. Si seleziona il vettore  $x$  per quanto riguarda ‘X Data’.

<sup>9</sup>Relativa ad  $\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$ .

3. Si seleziona il vettore  $y$  per quanto riguarda 'Y Data'.
4. Si clicca su 'Create data set'. Si chiude la finestra con 'Close'; i punti sperimentali vengono plottati.
5. Si apre il menù 'Fitting...'.
6. Si clicca su 'New fit'.
7. Dal menù 'Type of fit:', si seleziona 'Exponential', e quindi si evidenzia  $a \cdot \exp(b \cdot x)$ .
8. Si clicca su 'Apply' per avviare il processo di calcolo.

Ridimensionando gli assi cartesiani, si ottiene:

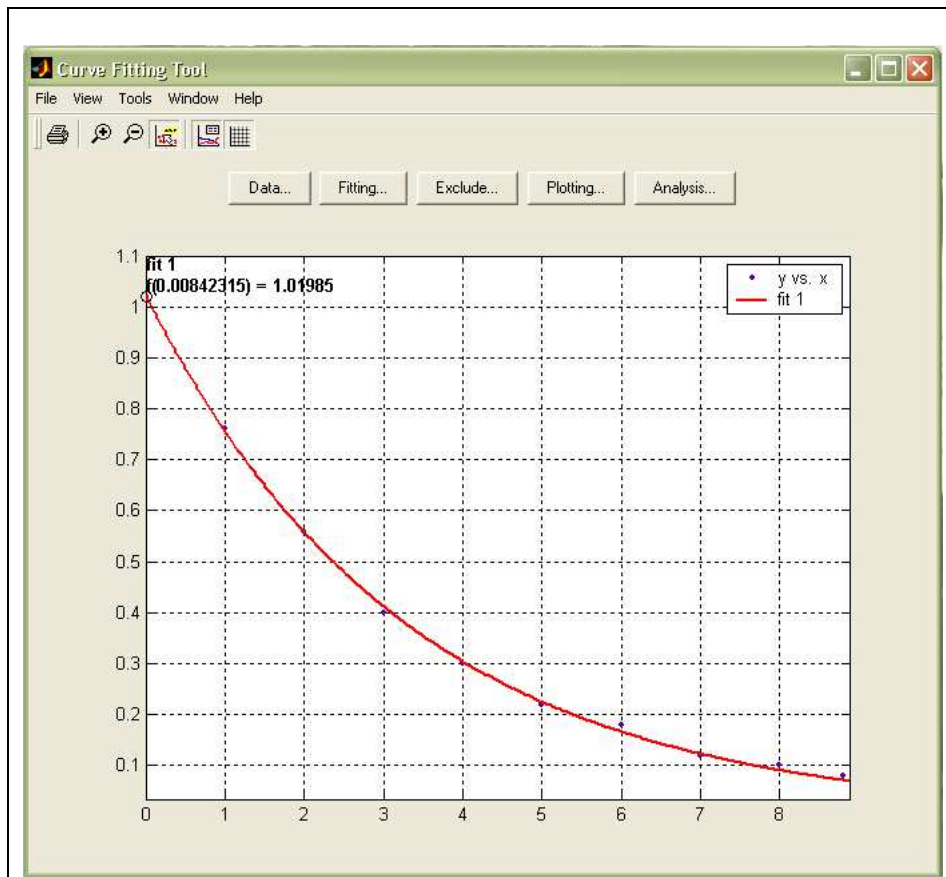


Figura 36 - Curve Fitting Tool

Il programma restituisce anche i valori in forma testuale:

General model Exp1:

$$f(x) = a \cdot \exp(b \cdot x)$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$\begin{aligned} a &= 1.022 \quad (0.9881, 1.057) \\ b &= -0.3026 \quad (-0.3153, -0.2899) \end{aligned}$$

Goodness of fit:

SSE: 0.0005818

R-square: 0.9986

Adjusted R-square: 0.9985

RMSE: 0.009117

Confrontando questi valori con quelli ottenuti mediante gli algoritmi 'Fitlin' e 'FitIter' ci si convince della qualità di questi ultimi.

## 2.2 Dinamica del Circuito RLC

Come è noto dall'Elettrotecnica, un circuito RLC, ovvero composto da una Resistenza, una Induttanza ed una Capacità in serie costituisce un sistema Asintoticamente Stabile; quindi a partire da una certa condizione iniziale, il suo stato elettrico evolve verso una condizione di regime permanente, in cui le varie grandezze elettriche (tensioni e correnti) assumono valore nullo.

La tensione ai capi del condensatore avrà un andamento oscillatorio smorzato. La costante di tempo del circuito dipenderà dal valore di  $R$  di  $L$  e di  $C$  e comunque (come vedremo) sarà dell'ordine dei ms. Data l'esiguità della durata di tale fenomeno, è necessario che esso si ripeta ricorsivamente in modo tale che sia possibile l'osservazione con un oscilloscopio; per questo si costruisce il seguente circuito:

### 2.2.1 Descrizione del Circuito

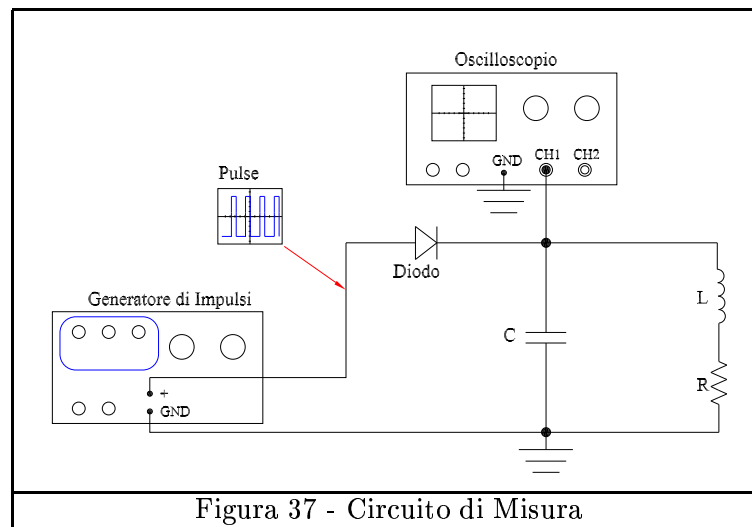


Figura 37 - Circuito di Misura

Il Generatore di impulsi genera un segnale in tensione analogo al caso precedente, ma con le seguenti caratteristiche:

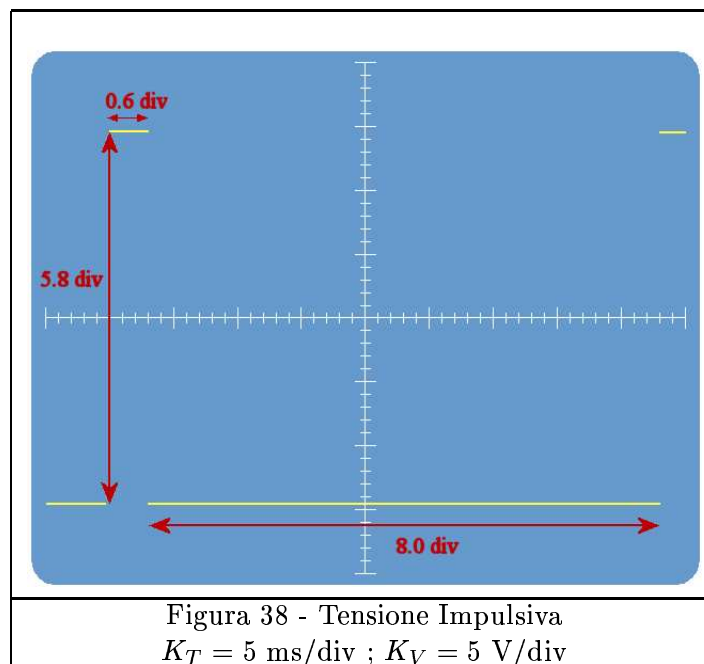


Figura 38 - Tensione Impulsiva  
 $K_T = 5 \text{ ms/div}$  ;  $K_V = 5 \text{ V/div}$

Quindi risulta

$$T = (8.6 \pm 0.1) \cdot K_T = 43.0 \pm 0.5 \text{ ms}$$



$$V_{pp} = (5.8 \pm 0.1) \cdot K_V = 29.0 \pm 0.5 \quad \text{V}$$

$$V_M = \frac{V_{pp}}{2} = 14.5 \pm 0.4 \quad \text{V}$$

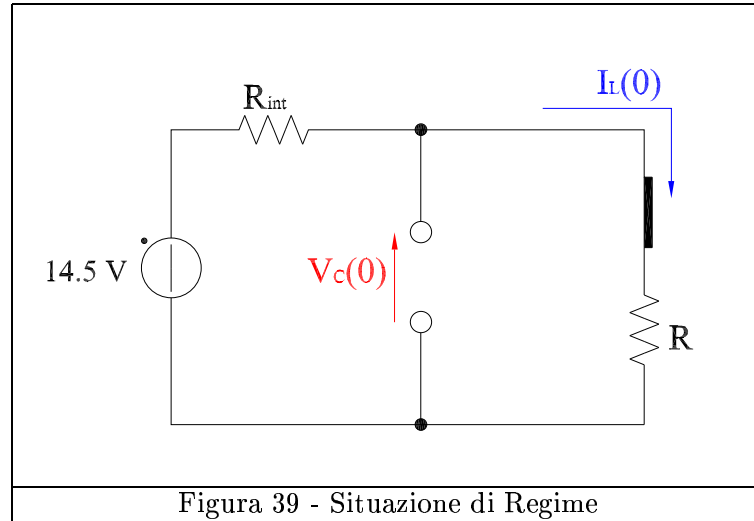
Il Diodo ha la solita funzione di isolare il circuito dal Generatore durante l'intervallo di tempo in cui la tensione risulta negativa.

La resistenza che compare nel circuito è quella interna dell'induttanza il cui valore non lo si conosce, ma verrà stimato così come verrà stimato il valore dell'induttanza stessa. Si osservi che, in questo caso, l'intervallo di tempo in cui la tensione fornita dal generatore è positiva, vale:

$$\Delta T = (0.6 \pm 0.1) \cdot K_T = 3.0 \pm 0.5 \quad \text{ms}$$

### 2.2.2 Descrizione della Dinamica

Durante l'intervallo di tempo in cui la tensione è positiva ( $\Delta T$ ), il condensatore si carica, raggiungendo una tensione di regime; anche la corrente nell'induttore raggiunge un valore di regime. Tali valori sono ricavabili dall'analisi del seguente circuito:



Purtroppo, in questo stadio della trattazione, non possiamo determinare le grandezze iniziali in quanto non si conosce il valore della resistenza  $R$  (mentre quella interna del Generatore di impulsi si ipotizza uguale a quella stimata nella prova di scarica del condensatore, ovvero  $R_{int} = 1030\Omega$ ). Saranno indicati i criteri in base ai quali si giunge alla determinazione di  $R, L$  e di altre caratteristiche del circuito in oggetto.

Quando la tensione di alimentazione passa dal valore di picco positivo a quello negativo, il diodo provvede ad isolare il generatore di impulsi, quindi si può considerare la maglia costituita dal condensatore, induttanza e resistenza come se fosse isolata.

Il comportamento di un tale circuito è descritto dalle seguenti relazioni istantanee:

$i_c(t) = C \frac{dv_c}{dt}$	$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$
$v_c(t) = v_L(t) + v_R(t)$	$v_R(t) = R \cdot i_L(t)$
$i_L(t) = -i_c(t)$	

con riferimento al circuito seguente:

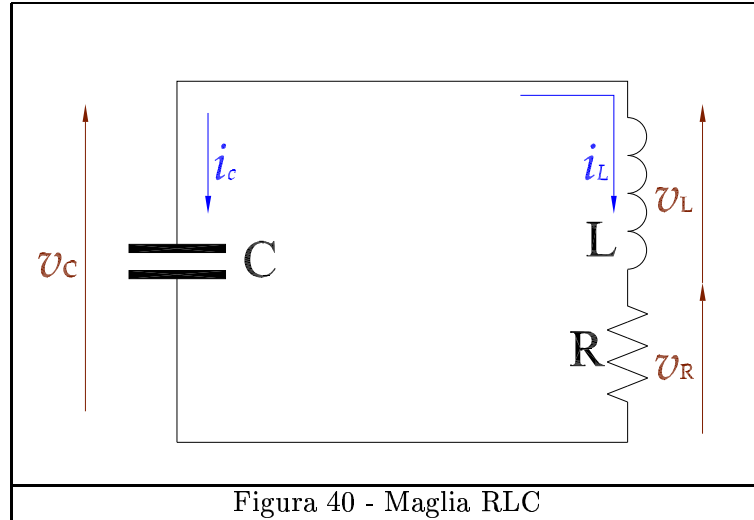


Figura 40 - Maglia RLC

Si ottiene:

$$v_c = L \frac{di_L}{dt} + R \cdot i_L = L \frac{d}{dt}(-i_c) - R \cdot i_c \Rightarrow$$

$$v_c = L \frac{d}{dt} \left( -C \frac{dv_c}{dt} \right) - RC \frac{dv_c}{dt} \Rightarrow$$

$$LC \frac{d^2 v_c}{dt^2} + RC \frac{dv_c}{dt} + v_c = 0$$

equazione che può essere anche scritta in termini di quantità di carica sulle armature del condensatore  $q = q(t) = C \cdot v_c(t) \Rightarrow v_c = \frac{q}{C}$ :

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

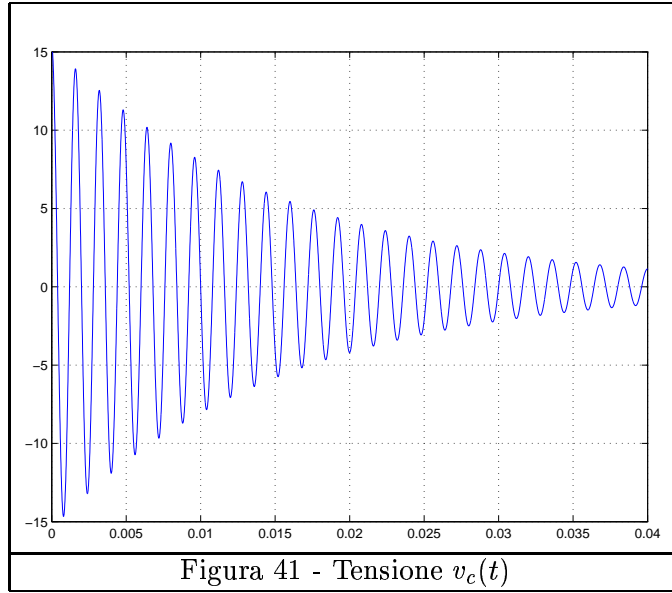
La risoluzione della prima equazione è riportata per intero in Appendice; tale soluzione è:

$$v_C(t) = \frac{v_C(0)}{\omega RC} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \varphi)$$

dove:

$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{\tau^2}}$	$\tau = \frac{2L}{R}$	$\cos(\varphi) = \omega RC$
---	-----------------------	-----------------------------

L'andamento qualitativo della  $v_C(t)$  è il seguente:



I valori massimi di tensione si hanno quando

$$\cos(\omega t + \varphi) = 1 \Rightarrow \omega t + \varphi = 2n\pi \Rightarrow$$

$$t_n = \frac{2n\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega} \text{ per } n \in \mathbb{Z}$$

Si indica con  $Y_n$  il valore di tensione di picco (n-esimo), ovvero il valore della tensione all'istante  $t_n = \frac{2n\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega}$ ; si ha:

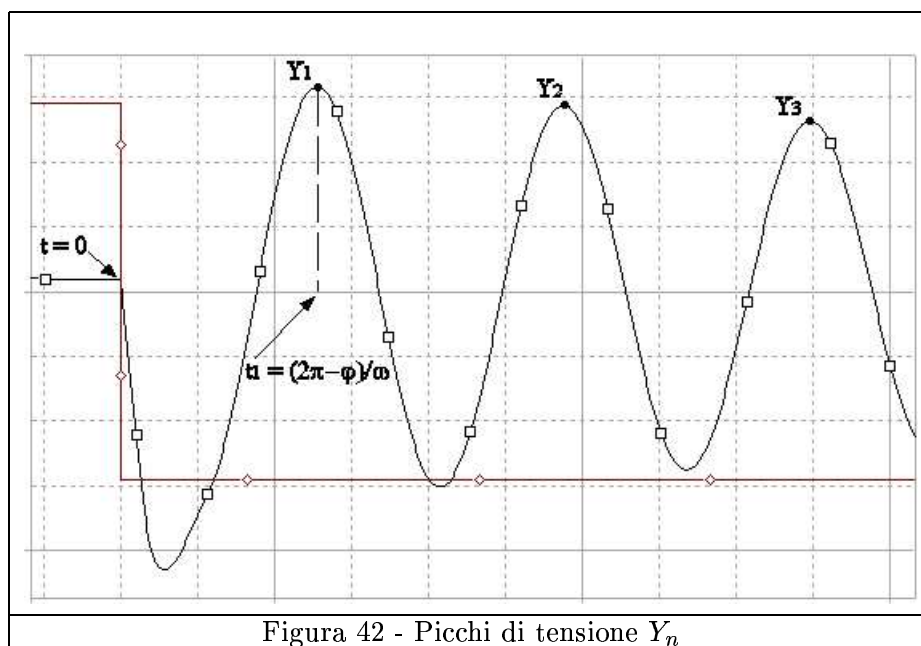
$$Y_n = \frac{v_c(0)}{\omega RC} e^{-\frac{t_n}{\tau}}$$

Ogni intervallo tra due picchi successivi di tensione vale:

$$T_Y = t_{n+1} - t_n = \frac{2(n+1)\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega} - \frac{2n\pi}{\omega} + \frac{\varphi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

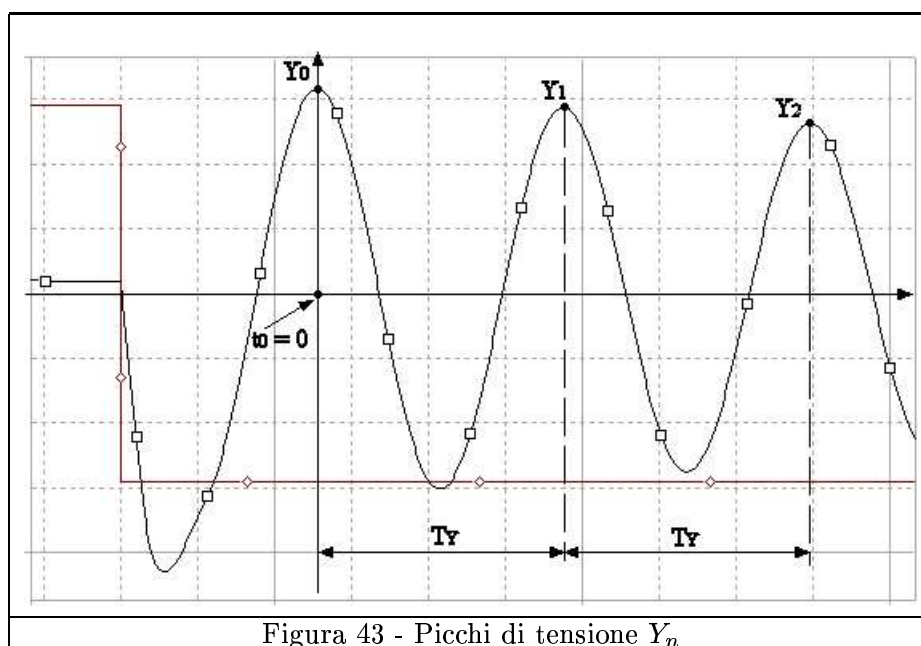
$$T_Y = \frac{2\pi}{\omega}$$

Il primo picco di tensione si verifica all'istante  $t_1 = \frac{2\pi - \varphi}{\omega}$ :


 Figura 42 - Picchi di tensione  $Y_n$ 

A questo punto è conveniente spostare il sistema di riferimento, facendo coincidere l'origine dei tempi con l'istante  $t_1$ ; in questo modo il primo picco si ha all'istante  $t_0 = 0$  e si ha che

$$t_n = n \cdot T_Y$$


 Figura 43 - Picchi di tensione  $Y_n$ 

I valori dei picchi di tensione, con le suddette convenzioni, seguono la legge:

$$Y_n = Y_0 e^{-\frac{t_n}{\tau}}$$

da cui si ottiene facilmente:

$$\tau = \frac{n \cdot T_Y}{\ln\left(\frac{Y_0}{Y_n}\right)}$$

### 2.2.3 Considerazioni Teoriche per l'Analisi dei dati

Si indicherà con  $T$  l'intervallo di tempo  $T_Y$

A questo punto si possono seguire due vie diverse per la determinazione dei parametri  $\tau$ ,  $L$  ed  $R$ :

1. Si suppone  $\tau \gg T$  ("Smorzamento Lento"), da cui derivano le seguenti considerazioni:

$$\tau \gg T \Rightarrow \tau \gg \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \tau \cdot \omega \gg 2\pi \Rightarrow \tau \cdot \omega \gg 1 \Rightarrow \tau \cdot \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{\tau^2}} \gg 1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{\tau^2}{LC} - 1} \gg 1 \Rightarrow \frac{\tau^2}{LC} \gg 2 \Rightarrow \tau^2 \gg LC \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\tau^2} \ll \frac{1}{LC}}$$

quindi sotto questa ipotesi:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{\tau^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{e quindi:}$$

$$\boxed{T \simeq 2\pi\sqrt{LC}}$$

Quindi dalla misura di  $T$  e dei picchi di tensione si può valutare  $\tau$ .

2. Privandosi dell'ipotesi  $\tau \gg T$ , e considerando che i picchi di tensione seguono la legge

$$Y_n = Y_0 e^{-\frac{t_n}{\tau}}$$

(del tutto analoga alla relazione che descrive la scarica del condensatore) è possibile effettuare una interpolazione dei valori assunti dai picchi di tensione ed ottenere il valore di  $\tau$ .

### 2.2.4 Caso 1: $\tau \gg T$

La misura di  $T$  è stata effettuata contando 13 periodi di tensione in 10.4 divisioni; considerando che  $K_T = 2 \text{ ms/div}$ , si ha:

$$13T = (10.4 \pm 0.1) \cdot K_T \Rightarrow$$

$$\boxed{T = 1.60 \pm 0.02 \quad \text{ms}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow L = \frac{1}{C} \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2$$

Il valore della capacità è  $C = 0.1 \quad \mu\text{F}$  e la sua incertezza è pari al 20%, quindi

$$\delta C = 0.02 \quad \mu\text{F}$$

$$L = 648.5 \text{ mH}$$

$$\delta L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial C}\right)^2 \cdot (\delta C)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)^2 \cdot (\delta T)^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial C} = -\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{C^2} \quad \frac{\partial L}{\partial T} = \frac{T}{2\pi^2 C}$$

$$\delta L = 130 \text{ mH}$$

Si può considerare:

$$L = 650 \pm 130 \text{ mH}$$

Si determina la costante di tempo  $\tau$  mediante la già citata relazione

$$\tau_n = \frac{nT}{\ln\left(\frac{Y_0}{Y_n}\right)}$$

Si riportano nella seguente tabella i valori misurati ed i relativi calcoli, considerando che  $K_V = 5 \text{ V/div.}$

$n$	div	$Y_n$ [V]	$\ln\left(\frac{Y_0}{Y_n}\right)$	$\tau_n$ [s]
0	3.2	16.0	0	—
1	2.8	14.0	0.133531	0,011982
2	2.6	13.0	0.207639	0,015411
3	2.4	12.0	0.287682	0,016685
4	2.0	10.0	0.470004	0,013617
5	1.8	9.0	0.575364	0,013904
6	1.6	8.0	0,693147	0,013850
7	1.4	7.0	0,826679	0,013548
8	1.2	6.0	0,980829	0,013050
9	1.2	6.0	0,980829	0,014681
10	1.1	5.5	1,067841	0,014984
11	1.0	5.0	1,163151	0,015131
12	1.0	5.0	1,163151	0,016507
13	0.8	4.0	1,386294	0,015004

Essendo  $\tau_0$  indefinito, si hanno un totale di  $N = 13$  valori di  $\tau$ :

$$\bar{\tau} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tau_n = 14.5 \text{ ms} \quad (\text{Media})$$

$$\sigma_{\tau} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\tau_n - \bar{\tau})^2} = 1.3 \text{ ms} \quad (\text{Dev.Standard del Campione})$$

$$\sigma_{\bar{\tau}} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sqrt{N}} = 0.4 \text{ ms} \quad (\text{S.D.O.M.})$$

$$\tau = 14.5 \pm 0.4 \text{ ms}$$

Dalla definizione di  $\tau = \frac{2L}{R}$  si ricava  $R$ :

$$R = \frac{2L}{\tau} = \frac{2 \cdot 650}{14.5} = 90 \text{ } \Omega$$

$$\delta R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial L}\right)^2 \cdot (\delta L)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \tau}\right)^2 \cdot (\delta \tau)^2} = 18 \text{ } \Omega$$

$$R = 90 \pm 18 \text{ } \Omega$$

Con i valori ottenuti si esegue una simulazione mediante **OrCAD Capture**:

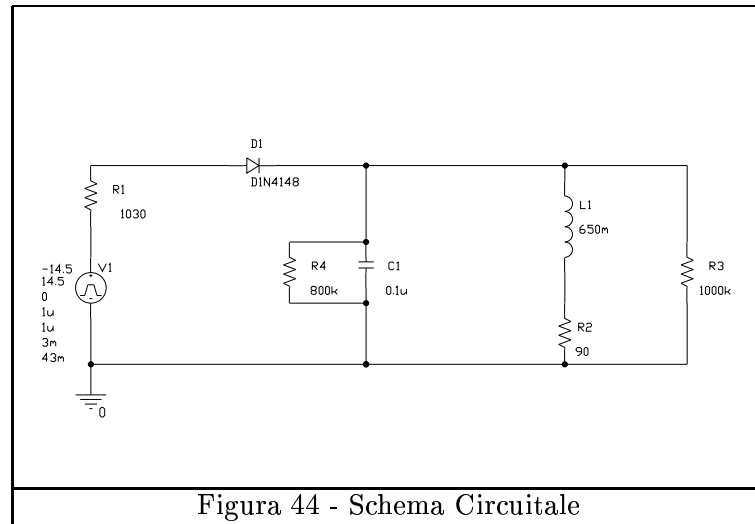


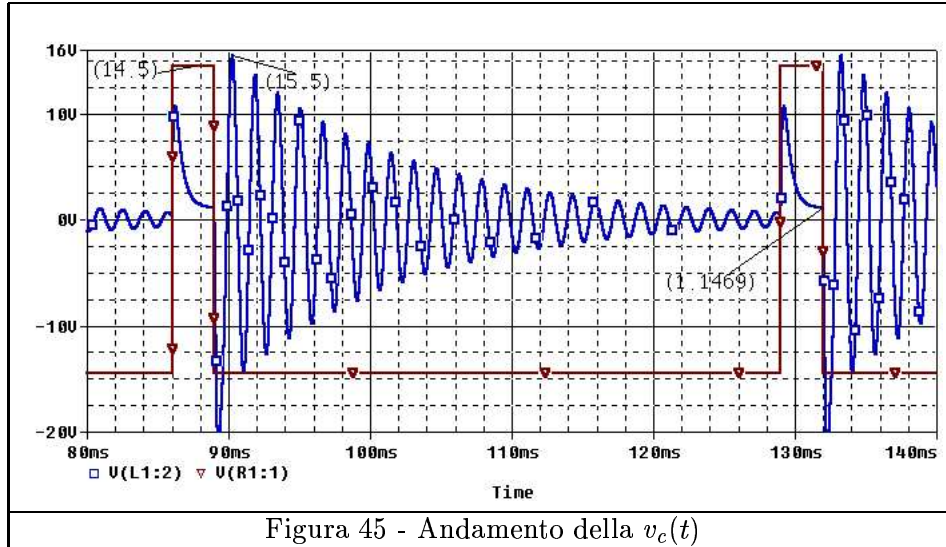
Figura 44 - Schema Circuitale

(Come al solito  $R_3 = 1M\Omega$  ed  $R_4 = 800k\Omega$  rappresentano rispettivamente la resistenza interna dell'Oscilloscopio<sup>10</sup> e quella di dispersione del condensatore<sup>11</sup>).

Si esegue la simulazione monitorando un intervallo di tempo [80, 140] ms:

<sup>10</sup>La resistenza di ingresso dell'oscilloscopio è stata posta pari a  $1M\Omega$  in quanto così dichiarato dal costruttore dello strumento: TEKTRONIX (Vedi Appendici)

<sup>11</sup>Se il condensatore è di buona fattura, la propria resistenza di dispersione è elevata: si è supposto che tale resistenza sia di  $800 \text{ k}\Omega$ , a cui corrisponde, per una pulsazione pari a  $\omega = 3930 \text{ rad/s}$ , un **fattore di perdita**  $D_p = 3.2 \times 10^{-3}$ . Nei cataloghi dei costruttori di condensatori di tale taglia sono riportati valori dei fattori di perdita  $2 \times 10^{-3} \leq D_p \leq 10^{-2}$  per frequenze fino ad  $1 \text{ kHz}$



### Osservazione:

il valore indicato sul grafico 1.1469 V si riferisce al valore iniziale della tensione ai capi del condensatore (a suo tempo indicata con  $v_c(0)$ ); ovvero il valore di tensione raggiunto in fase di carica.

Questo valore di tensione, come descritto nella sezione dedicata alla **descrizione della dinamica**, può essere determinato mediante il circuito di pag. 40

$$v_c(0) = E \cdot \frac{R}{R_{int} + R}$$

L'incertezza si ricava utilizzando la relazione generale:

$$\delta v_c(0) = \sqrt{\left(\frac{\partial v_c(0)}{\partial R}\right)^2 \cdot (\delta R)^2 + \left(\frac{\partial v_c(0)}{\partial E}\right)^2 \cdot (\delta E)^2}$$

Ricordando che  $E = 14.5 \pm 0.4$  V, che  $R = 90 \pm 18$   $\Omega$ , e non considerando l'incertezza sulla resistenza interna, si ha:

$$\delta v_c(0) = 0.216 = 0.2 \text{ V}$$

$$v_C(0) = 1.2 \pm 0.2 \text{ V}$$

### 2.2.5 Caso 2: interpolazione

In questo caso **non** si fa l'ipotesi di "smorzamento lento", quindi

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{\tau^2}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{\tau^2}}}$$

Si ricordi che i valori di picco hanno la seguente espressione:

$$Y_n = Y_0 \cdot e^{-\frac{t_n}{\tau}} \quad (\text{con } t_n = nT)$$

$T$  ha lo stesso valore determinato prima:

$$T = 1.60 \pm 0.02 \text{ ms} \Rightarrow$$

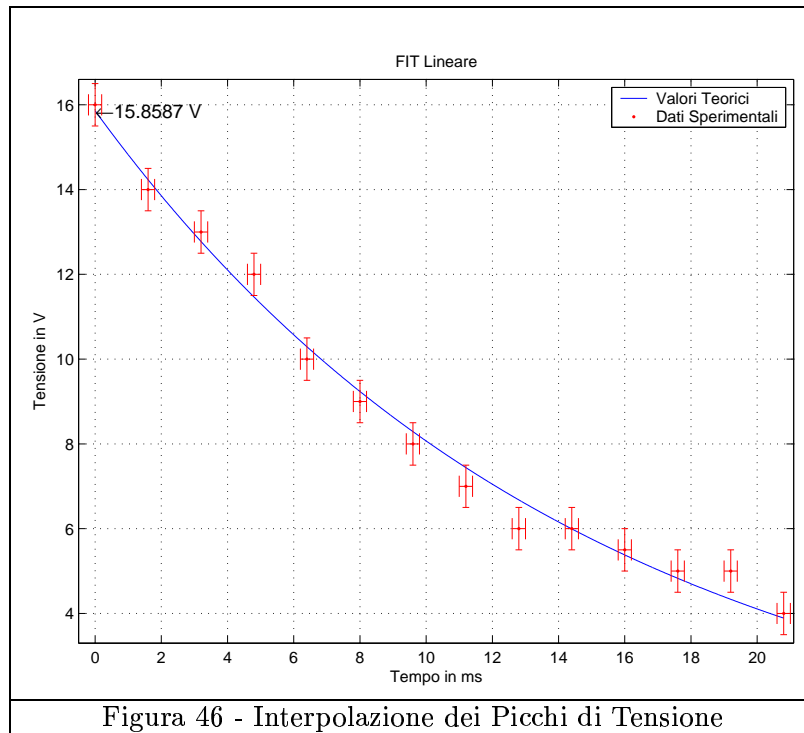


$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 3927 \text{ rad/s}$$

$$\delta\omega = \left| \frac{\partial\omega}{\partial T} \right| \cdot \delta T = \frac{2\pi}{T^2} \cdot \delta T = 49 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 3930 \pm 50 \text{ rad/s}$$

Si riportano su un grafico i valori dei picchi di tensione misurati e, mediante il programma 'Fitlin.m' (lo stesso utilizzato per l'interpolazione dei dati relativi alla scarica del condensatore, opportunamente modificato) si esegue l'interpolazione:



Il programma fornisce il valore di  $\tau$  e la relativa incertezza:

$$\tau = 14.8 \pm 0.6 \text{ ms}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{\tau^2}} \Rightarrow$$

$$L = \frac{\tau^2}{C(\omega^2 \cdot \tau^2 + 1)} \Rightarrow L = 647.3 \text{ mH}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} = \frac{1}{C} \left[ \frac{2\tau}{(\omega^2 \cdot \tau^2 + 1)^2} \right] \quad \frac{\partial L}{\partial C} = -\frac{1}{C^2} \frac{\tau^2}{\omega^2 \cdot \tau^2 + 1} \quad \frac{\partial L}{\partial \omega} = -\frac{2\omega\tau^4}{C(\omega^2 \cdot \tau^2 + 1)^2}$$

$$\delta L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial \tau} \cdot \delta \tau\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial C} \cdot \delta C\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial \omega} \cdot \delta \omega\right)^2} \Rightarrow \delta L = 130.5 \text{ mH}$$

$$\tau = \frac{2L}{R} \Rightarrow R = \frac{2L}{\tau} = 87.47 \Omega$$

$$\frac{\partial R}{\partial L} = \frac{2}{\tau} \quad \frac{\partial R}{\partial \tau} = -\frac{2L}{\tau^2}$$

$$\delta R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial L} \delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \tau} \delta \tau\right)^2} = 17.98 \Omega$$

Appare evidente che l'ipotesi  $\tau \gg T$  è più che lecita!

### 2.2.6 Prove con altri Condensatori

Analizziamo adesso il comportamento del circuito RLC nei due seguenti casi in cui si sostituisce il condensatore.

Si faranno due misurazioni: con  $C_2 = 0.22 \mu\text{F}$  e  $C_3 = 0.47 \mu\text{F}$ .

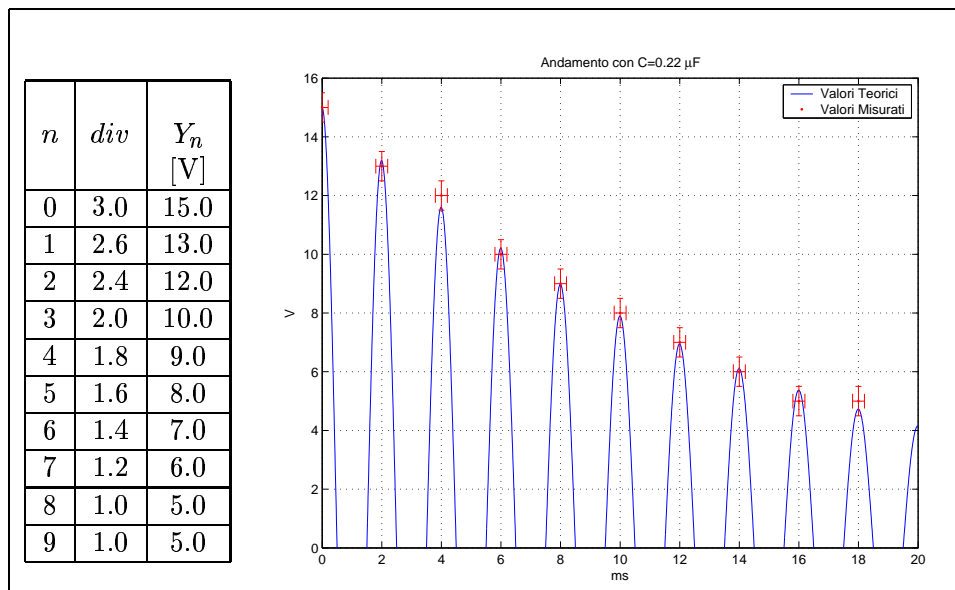
B)  $C_2 = 0.22 \mu\text{F} \pm 20\%$

Sul display dell'oscilloscopio si osservano 10 periodi in 10 divisioni, con costanti strumentali:  $K_T = 2 \text{ ms/div}$  e  $K_V = 5 \text{ V/div}$ .

$$10 \cdot T_2 = (10.0 \pm 0.1) \cdot K_T \Rightarrow$$

$$T_2 = 10.00 \pm 0.02 \text{ ms}$$

Si misurano i primi 10 picchi di tensione, e mediante l'algoritmo di calcolo che presuppone gli "smorzamenti lenti" si determinano le grandezze di interesse:



$C_2$	$L_2$	$R_2$	$\tau_2$	$T_2$	$\omega_2$	$f_2$
[ $\mu\text{F}$ ]	[mH]	[ $\Omega$ ]	[ms]	[ms]	[rad/s]	[Hz]
0.22	$460 \pm 93$	$59 \pm 12$	$15.6 \pm 0.4$	$2.00 \pm 0.02$	$3142 \pm 31$	$500 \pm 5$

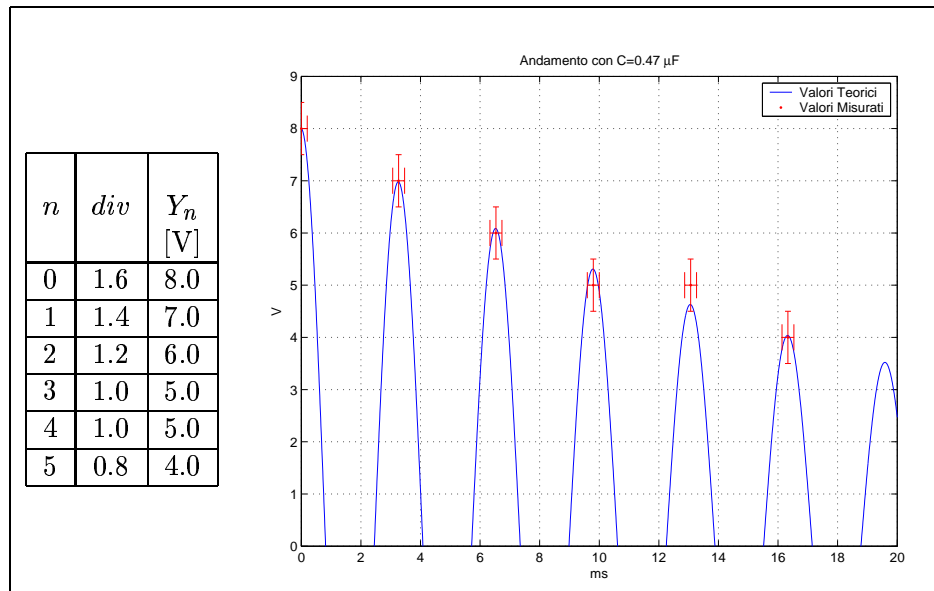
C)  $C_3 = 0.47\mu\text{F} \pm 20\%$

Sul display dell'oscilloscopio si osservano 6 periodi in 9.8 divisioni, con costanti strumentali:  $K_T = 2 \text{ ms/div}$  e  $K_V = 5 \text{ V/div}$ .

$$6 \cdot T_3 = (9.8 \pm 0.1) \cdot K_T \Rightarrow$$

$$T_3 = 3.30 \pm 0.03 \text{ ms}$$

Si misurano i primi 6 picchi di tensione, e mediante l'algoritmo di calcolo che presuppone gli "smorzamenti lenti" si determinano le grandezze di interesse:



$C_3$	$L_3$	$R_3$	$\tau_3$	$T_3$	$\omega_3$	$f_3$
[ $\mu\text{F}$ ]	[mH]	[ $\Omega$ ]	[ms]	[ms]	[rad/s]	[Hz]
0.47	$575 \pm 116$	$48 \pm 10$	$23.9 \pm 1.1$	$3.30 \pm 0.03$	$1923 \pm 20$	$306 \pm 3$

### 2.2.7 Riepilogo Risultati ed Osservazioni

Per una maggiore chiarezza, si riportano tutti i valori determinati nei tre casi:

$i$	$C_i$	$L_i$	$R_i$	$\tau_i$	$T_i$	$\omega_i$	$f_i$
	[ $\mu\text{F}$ ]	[mH]	[ $\Omega$ ]	[ms]	[ms]	[rad/s]	[Hz]
1	0.10	$650 \pm 130$	$90 \pm 18$	$14.5 \pm 0.4$	$1.60 \pm 0.02$	$3927 \pm 38$	$625 \pm 6$
2	0.22	$460 \pm 93$	$59 \pm 12$	$15.6 \pm 0.4$	$2.00 \pm 0.02$	$3142 \pm 31$	$500 \pm 5$
3	0.47	$575 \pm 116$	$48 \pm 10$	$23.9 \pm 1.1$	$3.30 \pm 0.03$	$1923 \pm 20$	$306 \pm 3$

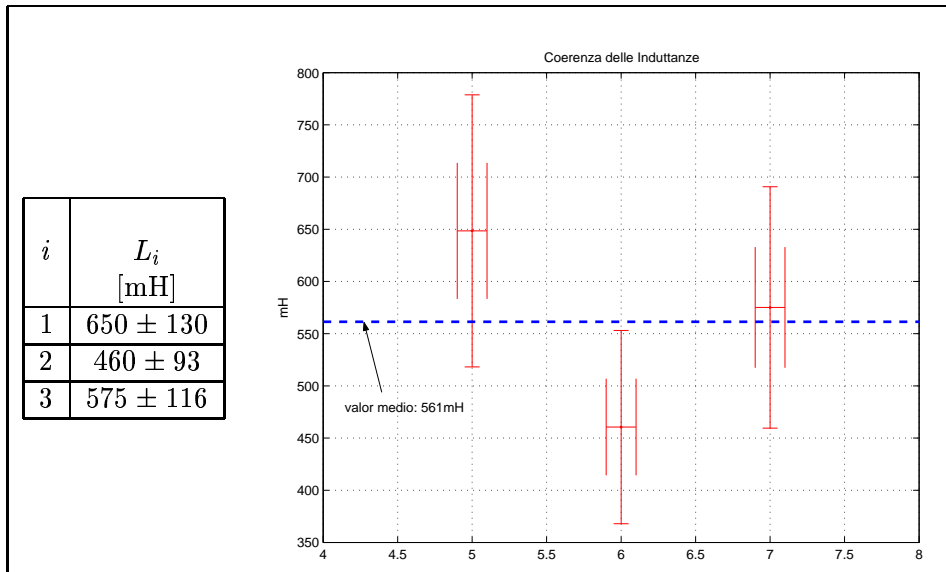
Per una rapida verifica dei risultati si osserva che, essendo  $T_i = 2\pi\sqrt{L \cdot C_i}$ , si deve confrontare  $\frac{T_2}{T_1}$  e  $\frac{T_3}{T_1}$  con  $\sqrt{\frac{C_2 \pm \delta C_2}{C_1 \pm \delta C_1}}$  e  $\sqrt{\frac{C_3 \pm \delta C_3}{C_1 \pm \delta C_1}}$ , rispettivamente. Utilizzando le regole di propagazione dell'errore<sup>12</sup>, si ha:

Teorico	Misurato
$\sqrt{\frac{C_2 \pm \delta C_2}{C_1 \pm \delta C_1}} = 1.5 \pm 0.3$	$\frac{T_2}{T_1} = 1.25 \pm 0.03$
$\sqrt{\frac{C_3 \pm \delta C_3}{C_1 \pm \delta C_1}} = 2.2 \pm 0.4$	$\frac{T_3}{T_1} = 2.06 \pm 0.04$

Si conclude che i dati ottenuti sono compatibili con i valori aspettati.

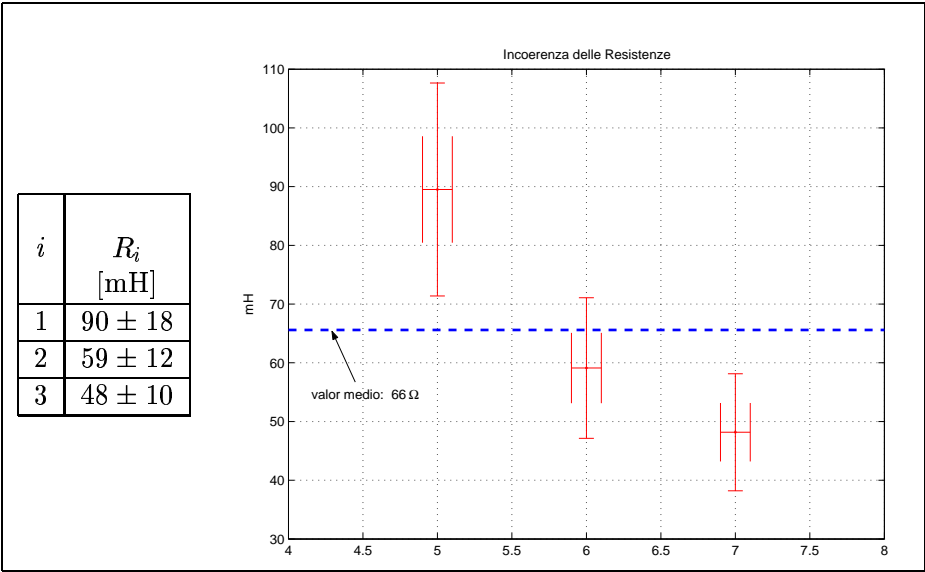
## 2.3 Osservazione finale: Effetto Pelle

Un particolare sguardo deve essere dato ai valori dell'induttanza e della resistenza, ricavati nei tre casi. Si osserva che i tre valori di induttanza sono tra di loro compatibili, e questo fa intuire che le varie fluttuazioni dal valore medio, sono dovute, magari, alla inadeguatezza del metodo di misura utilizzato:



**Contrariamente** i valori ottenuti per le resistenze denotano un andamento particolare. Prima di tutto i tre valori **non** sono compatibili fra di loro:

<sup>12</sup>Precisamente si adottano le formule di propagazione per il **Rapporto**  $\frac{x}{y}$  e per la **Potenza**  $x^n$  con  $n = \frac{1}{2}$



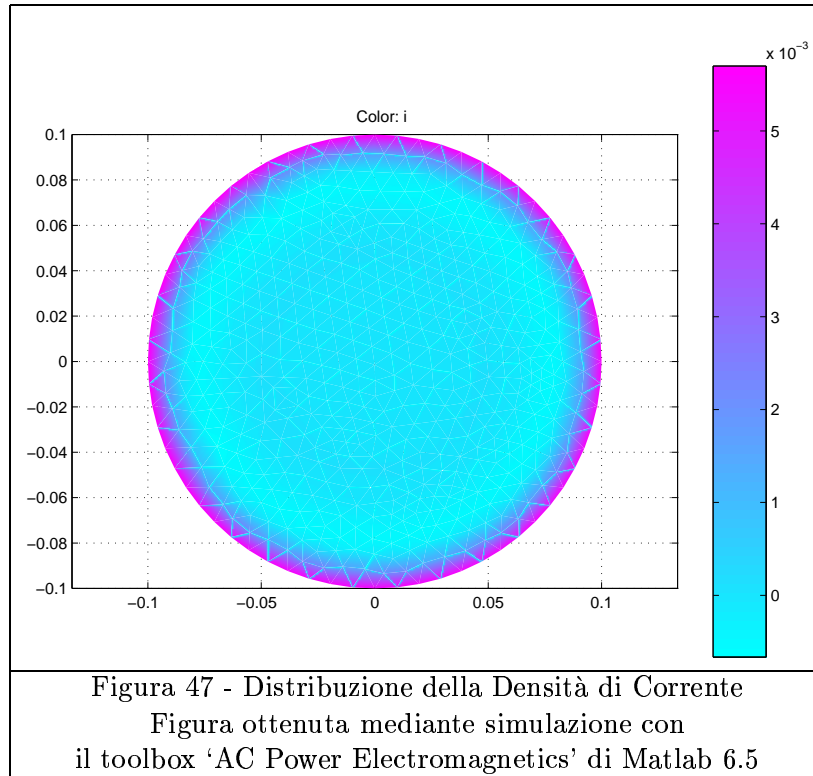
Inoltre si osserva che al diminuire della frequenza, il valore della resistenza diminuisce. La spiegazione di questa apparente anomalia, è la seguente: modificando il valore della capacità, si modifica il periodo ( $T$ ), e quindi la frequenza ( $f$ ) delle oscillazioni:

$i$	$C_i$ [ $\mu$ F]	$f_i$ [Hz]	$R_i$ [ $\Omega$ ]
1	$0.10 \pm 0.02$	$625 \pm 6$	$90 \pm 18$
2	$0.22 \pm 0.04$	$500 \pm 5$	$59 \pm 12$
3	$0.47 \pm 0.09$	$306 \pm 3$	$48 \pm 10$

Le frequenze hanno valori di gran lunga superiori al valore della frequenza industriale (50Hz).

Il fenomeno che regola l'aumento della resistenza all'aumentare della frequenza, molto noto nell'ambito delle macchine elettriche, e denominato **Effetto Pelle**, consiste in un addensamento delle cariche elettriche, sulla periferia del conduttore.

Questo addensamento è tanto più pronunciato quanto più la frequenza è elevata; questo comporta che la corrente che circola nel conduttore, non sia distribuita in maniera uniforme nella sezione del conduttore(come avviene in corrente continua), ma scorra prevalentemente sulla periferia.



Appare evidente, quindi, che la superficie 'utile' in cui passa la corrente si riduce e di conseguenza la resistenza aumenta:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Senza entrare troppo nell'ambito di tale fenomeno, basti considerare un parametro molto significativo dell'effetto pelle, e cioè lo **spessore di penetrazione**<sup>13</sup> il quale, per il rame, segue la legge

$$\delta = \frac{68}{\sqrt{f}} \quad [\text{mm}]$$

nei tre casi esaminati, si ha:

$i$	$f_i$ [Hz]	$\delta_i$ [mm]
1	$625 \pm 6$	2.72
2	$500 \pm 5$	3.04
3	$306 \pm 3$	3.89

Non è stata eseguita una misura del raggio del conduttore con cui è fatto l'induttore, ma è sicuro che il rapporto tra tale raggio e lo spessore di penetrazione è significativamente lontano da zero, quindi non si può ritenere trascurabile l'effetto pelle.

(Stesura completata in data 12/12/2003)

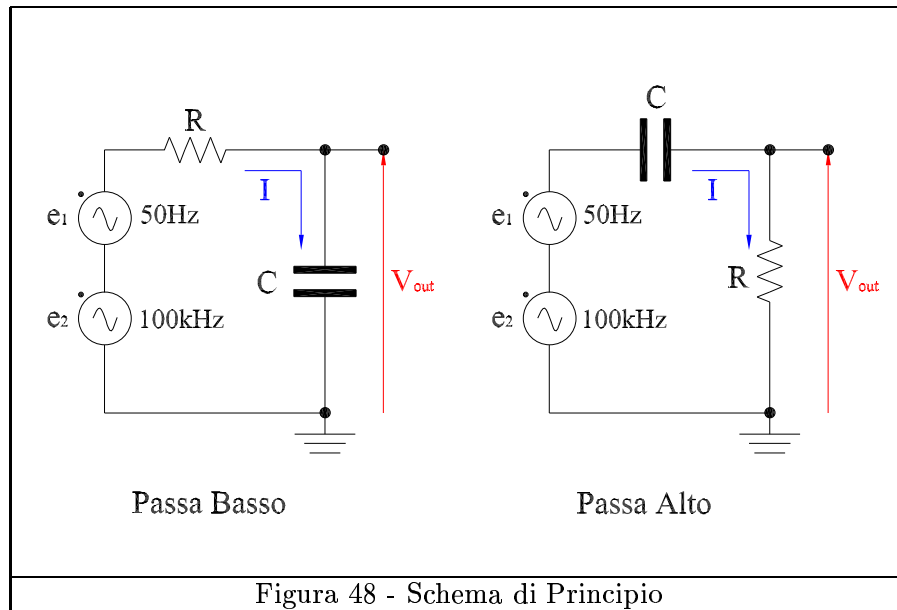
<sup>13</sup>Per il rame a 20°C ed una frequenza di 50 Hz vale circa 10 mm questo valore, e la formula riportata, sono stati presi dal libro di testo 'ELETTROTECHNICA GENERALE' Giovanni Sameda

## Relazione 3

# Filtri Passivi

In questa relazione sarà valutato l'effetto dell'inserzione di un filtro passivo (passa-basso e passa-alto) in cascata ad un circuito alimentato con due generatori a diversa frequenza; in particolare, una componente di tensione avrà una frequenza di 50 Hz e l'altra una frequenza di 100kHz.

Il circuito, costituente il filtro, è composto da una resistenza ed un condensatore in serie; asseconda della disposizione di tali elementi, si ha un filtro **Passa-Basso** o uno **Passa-Alto**:



### 3.1 Considerazioni Teoriche

In una condizione di regime sinusoidale, per entrambi i circuiti valgono le seguenti relazioni:

$$V_C(t) = \frac{\omega_0 \cdot E_{1M} \cdot \sin(\omega_1 t + \phi_1)}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}} + \frac{\omega_0 \cdot E_{2M} \cdot \sin(\omega_2 t + \phi_2)}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_2^2}}$$
$$V_R(t) = \frac{\omega_1 \cdot E_{1M} \cdot \cos(\omega_1 t + \phi_1)}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}} + \frac{\omega_2 \cdot E_{2M} \cdot \cos(\omega_2 t + \phi_2)}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_2^2}}$$

dove si è posto:

$\omega_0 = \frac{1}{RC}$	$\phi_1 = \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)$	$\phi_2 = \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega_2}\right)$
---------------------------	--	--

e le tensioni  $V_C$  e  $V_R$  sono rispettivamente la tensione ai capi del condensatore e quella ai capi della resistenza<sup>1</sup>.

Nel caso in cui

$\omega_1 \ll \omega_0 \ll \omega_2$
--------------------------------------

ovvero nel caso in cui si possa dire che  $\frac{\omega_0}{\omega_1} \rightarrow +\infty$  e  $\frac{\omega_0}{\omega_2} \rightarrow 0$  si ha:

$\phi_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\phi_2 \rightarrow 0$	$\sin(\omega_1 t + \phi_1) \rightarrow \cos(\omega_1 t)$
$\cos(\omega_1 t + \phi_1) \rightarrow \sin(\omega_1 t)$	$\sin(\omega_2 t + \phi_2) \rightarrow \sin(\omega_2 t)$	$\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}} \rightarrow 1$
$\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_2^2}} \rightarrow \frac{\omega_0}{\omega_2}$	$\frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}} \rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_0}$	$\frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_2^2}} \rightarrow 1$

Quindi con questa ipotesi sulla “Pulsazione di Taglio” ( $\omega_0$ ), ci si aspetta, dalle misure di laboratorio:

$V_C \simeq E_{1M} \cos(\omega_1 t) + \frac{\omega_0}{\omega_2} E_{2M} \sin(\omega_2 t) \simeq E_{1M} \cos(\omega_1 t)$
---

$V_R \simeq \frac{\omega_1}{\omega_0} E_{1M} \sin(\omega_1 t) + E_{2M} \cos(\omega_2 t) \simeq E_{2M} \cos(\omega_2 t)$
---

### 3.2 Filtro ‘PASSA-BASSO’

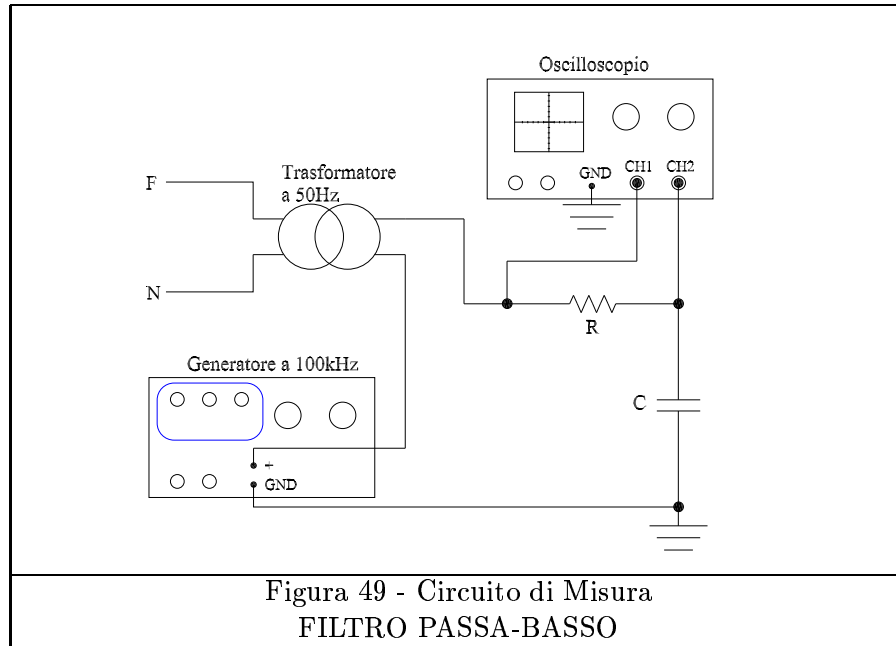
Come il nome stesso suggerisce, questa particolare disposizione dei componenti, permette ai segnali di tensione, che abbiano una frequenza relativamente piccola<sup>2</sup>, di manifestarsi in maniera praticamente immutata (per quanto riguarda l'ampiezza), mentre comporta una notevole attenuazione per quanto riguarda i segnali di tensione aventi frequenza maggiore di  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ .

Per verificare quanto detto, si dispone il seguente circuito di misura:

<sup>1</sup>In Appendice sono riportate tutte le considerazioni che hanno permesso di ottenere le suddette relazioni.

<sup>2</sup>Rispetto alla **Frequenza di Taglio**  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$





Il canale 2 dell'oscilloscopio è adibito al monitoraggio della tensione ai capi del condensatore (considerata come tensione di uscita dal filtro), il cui valore è descritto dalla già citata equazione:

$$V_C(t) = \frac{\omega_0 \cdot E_{1M} \cdot \sin(\omega_1 t + \phi_1)}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}} + \frac{\omega_0 \cdot E_{2M} \cdot \sin(\omega_2 t + \phi_2)}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_2^2}}$$

I valori scelti per la resistenza e la capacità sono:

$$R = 330\Omega \pm 5\%$$

$$C = 0.47\mu F \pm 20\%$$

da cui si ricava:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = 6.45 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

$$\delta\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial\omega_0}{\partial R} \cdot \delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_0}{\partial C} \cdot \delta C\right)^2} = 1.33 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

$$\omega_0 = 6.45 \pm 1.33 \text{ krad/s} \Rightarrow f_0 = 1.0 \pm 0.2 \text{ kHz}$$

Si è precedentemente accennato al fatto che il segnale di tensione di ingresso è composto (prevalentemente<sup>3</sup>) da due sinusoidi a frequenza diversa:

$$f_1 = 50 \text{ Hz} \quad f_2 = 100 \text{ kHz}$$

quindi

$$\omega_1 = 314.15 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = 628.32 \text{ krad/s}$$

<sup>3</sup>In realtà nel segnale di tensione vi sono altre componenti di armonica

Si può considerare valida l'ipotesi  $\omega_1 \ll \omega_0 \ll \omega_2$ ; infatti:

$$\frac{\omega_0}{\omega_1} \simeq 20 \quad \frac{\omega_2}{\omega_0} \simeq 100$$

In seguito si userà la convenzione della ‘**tacca**’, e non della ‘**mezza tacca**’ per quantificare l’incertezza strumentale, ovvero (contrariamente alle relazioni precedenti in cui l’incertezza è stata posta pari a 0.1 divisioni<sup>4</sup>) l’incertezza verrà fissata uguale a 0.2 divisioni.

La scelta di innalzare l’incertezza strumentale è dettata dalle seguenti considerazioni:

- Per la presenza del segnale a 100 kHz il dispositivo di **Trigger** dell’oscilloscopio, può introdurre maggiori errori nella visualizzazione del segnale, rispetto al caso in cui le frequenze siano più modeste<sup>5</sup> (50 Hz).
- All’interno del circuito si potrebbero innescare fenomeni di risonanza elettrica, dovuti all’induttanza del trasformatore e ad eventuali parametri parassiti (per esempio la capacità di ingresso dell’oscilloscopio).
- La tensione di alimentazione a 50 Hz non è rigorosamente sinusoidale (come si può notare dalla forma d’onda riportata sul display dell’oscilloscopio); quindi, in qualche modo bisogna tenere conto di questa differenza rispetto alla forma d’onda teorica, considerata perfettamente sinusoidale.

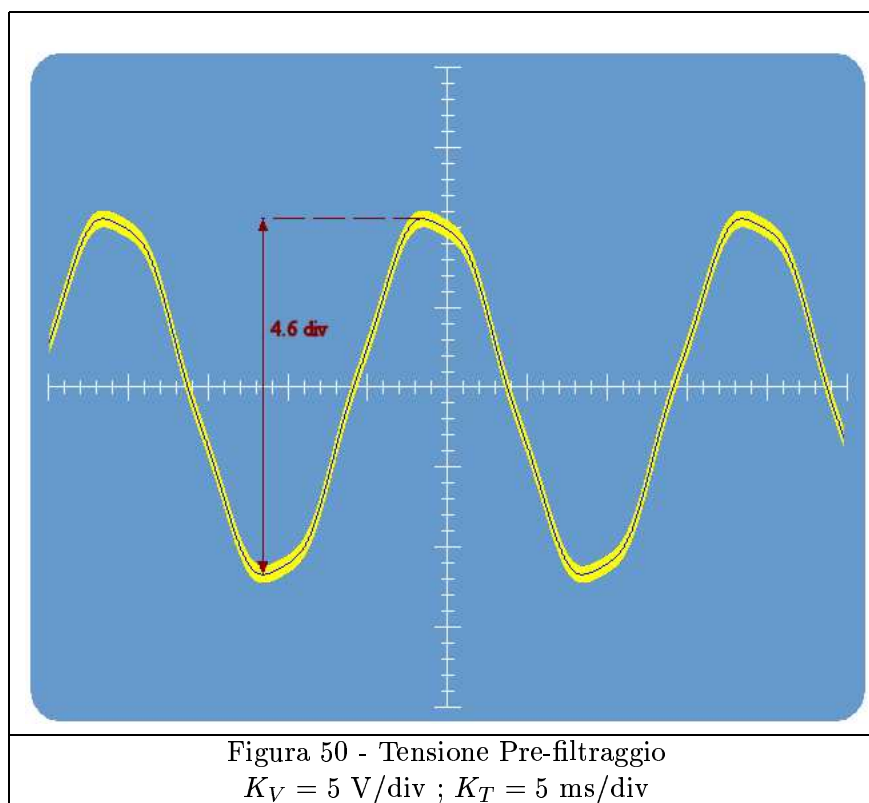
### 3.2.1 Esecuzione della Misura

Al canale 1 dell’oscilloscopio viene convogliato il segnale di tensione prima del filtraggio; si ottiene:

---

<sup>4</sup>Si tenga presente che una ‘tacca’ corrisponde ad  $\frac{1}{5}$  di divisione, ovvero 0.2 divisioni, quindi ‘mezza tacca’ vale 0.1 divisioni.

<sup>5</sup>Ciò si evince dai parametri caratteristici riportati dal costruttore (Vedi Appendice); in particolare dalla dicitura **Trigger Sensitivity** in cui appare una diminuzione della sensibilità all’aumentare della frequenza

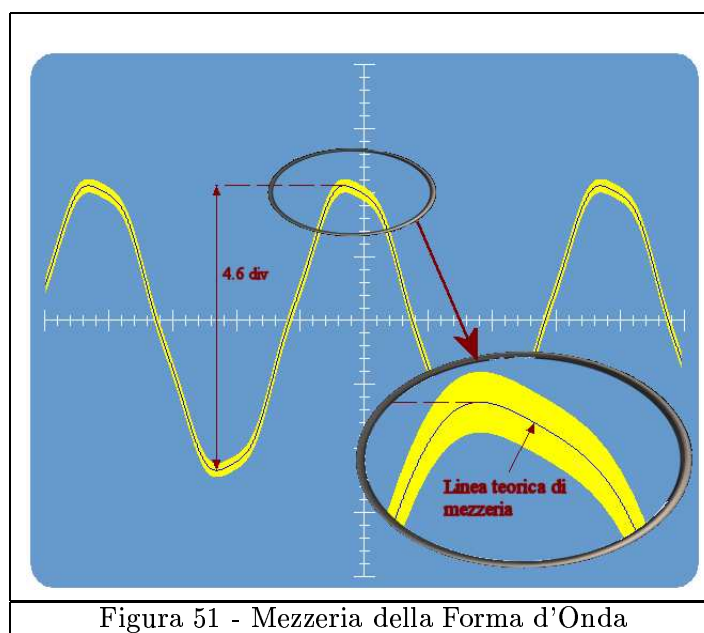


La tensione a 50 Hz ha un valore picco-picco pari a:

$$V_{1pp} = (4.6 \pm 0.2) \cdot K_V = 23 \pm 1 \text{ V}$$

(Da notare l'incertezza corrispondente a 0.2 divisioni, equivalente ad una tacca)

Le divisioni lette (4.6) sono state considerate osservando la 'mezzeria' della forma d'onda:



In definitiva il valor massimo della tensione a 50 Hz vale:

$$E_{1M} = \frac{V_{1pp}}{2} = \frac{23}{2} \pm \frac{1}{2} \text{ V}$$

$$E_{1M} = 11.5 \pm 0.5 \text{ V}$$

Il valore massimo della tensione a 100 kHz è stato valutato nel seguente modo:

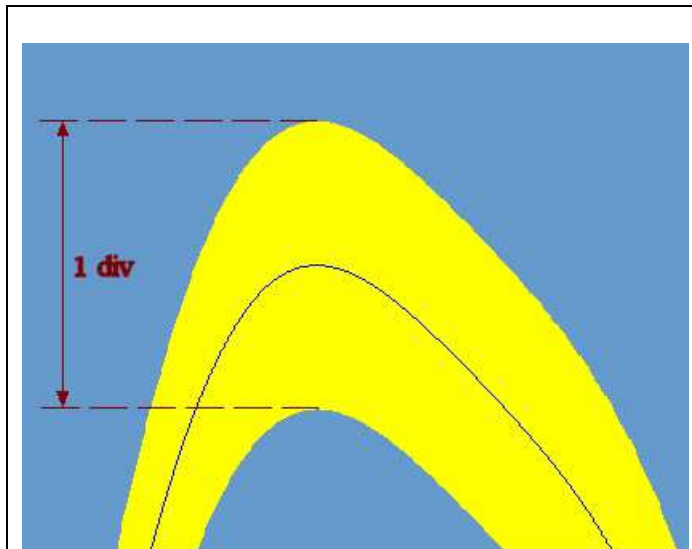


Figura 52 - Picco-picco tensione a 100 kHz  
 $K_V = 1 \text{ V/div}$  ;  $K_T = 5 \text{ ms/div}$

$$V_{2pp} = (1.0 \pm 0.2) \cdot K_V = 1.0 \pm 0.2 \text{ V}$$

$$E_{2M} = 0.5 \pm 0.1 \text{ V}$$

Al canale 2, invece, è riportato il segnale di uscita dal filtro (Tensione ai capi del condensatore), il risultato è il seguente:

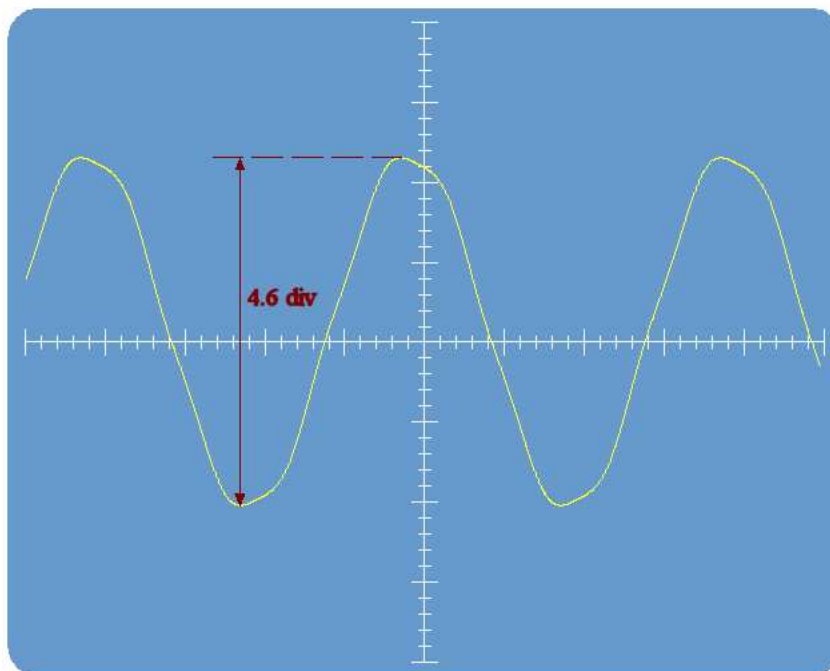


Figura 53 - Tensione Post-filtraggio  
 $K_V = 5 \text{ V/div}$  ;  $K_T = 5 \text{ ms/div}$

$$V_{1pp} = (4.6 \pm 0.2) \cdot K_V = 23 \pm 1 \quad \text{V}$$

$$E_{1M} = \frac{V_{1pp}}{2} = \frac{23}{2} \pm \frac{1}{2} \quad \text{V}$$

$$E_{1M} = 11.5 \pm 0.5 \quad \text{V}$$

Come ci si aspettava, la tensione a 50 Hz resta invariata. Per quanto riguarda la componente di tensione  $V_{2pp}$ , dopo il filtraggio, si osserva che, nonostante l'incremento della sensibilità dello strumento (ottenuto selezionando il valore minimo possibile di  $K_V$ , che permetta l'osservazione del segnale, ovvero:  $K_V = 0.5 \quad \text{V/div}$ ) non si riesca a valutarne l'ampiezza. Si può affermare, quindi, che la lettura corrispondente a  $V_{2pp}$  sia minore di mezza tacca<sup>6</sup>:

$$V_{2pp} \leq 0.1 \cdot K_V \Rightarrow V_{2pp} \leq 0.05 \quad \text{V}$$

e quindi

$$E_{2M} \leq 25 \quad \text{mV}$$

Questo limite superiore fissato per  $E_{2M}$ , è compatibile con il valore teorico aspettato:

$$E_{2M} = \frac{\omega_0}{\omega_2} \cdot (0.5 \pm 0.1) = 5 \pm 1 \quad \text{mV}$$

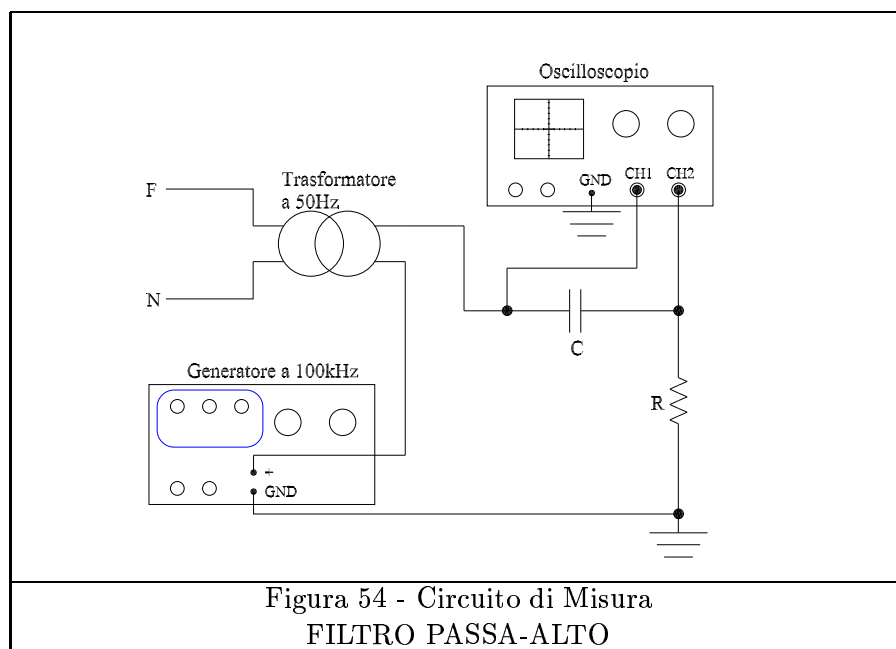
anche se ampiamente abbondante. Per ridurre questo limite superiore dell'incertezza sarebbe necessario utilizzare una strumentazione più precisa.

### 3.3 Filtro 'PASSA-ALTO'

Questa volta la componente di Tensione che subisce l'attenuazione è quella avente una frequenza minore di  $f_0$ ; mentre la componente a frequenza più elevata si manifesta, a valle del filtro, praticamente con ampiezza immutata. Per verificare questo fatto, si utilizza il seguente circuito di misura:

---

<sup>6</sup>Si ricordi che mezza tacca corrisponde a 0.1 divisioni.

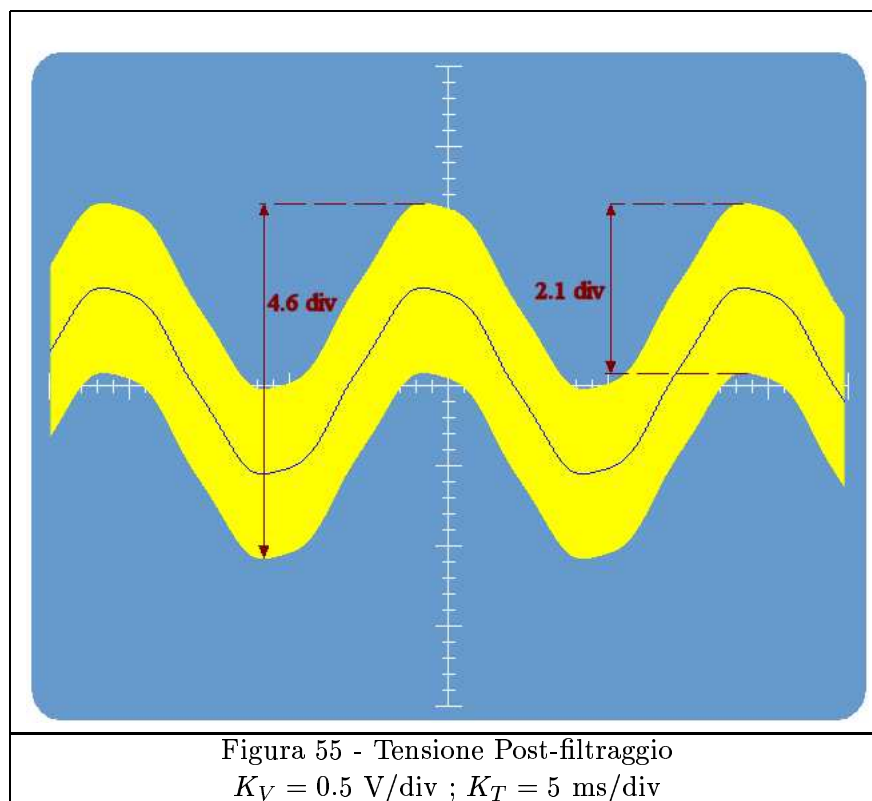


### 3.3.1 Esecuzione della Misura

Come nel caso precedente, il canale 1 dell'oscilloscopio è utilizzato per monitorare il segnale a monte del filtro, e quindi le letture sono identiche al caso visto prima.

Il canale 2 permette di visualizzare la forma d'onda della tensione di uscita dal filtro, che questa volta corrisponde alla tensione ai capi della resistenza (mentre nella misura precedente tale tensione era quella ai capi del condensatore).

Si ottiene:



Si osserva che la componente a 100 kHz, dopo il filtraggio, ha un valore picco-picco dato da:

$$V_{2pp} = (2.1 \pm 0.2) \cdot K_V = 1.05 \pm 0.10 \text{ V}$$

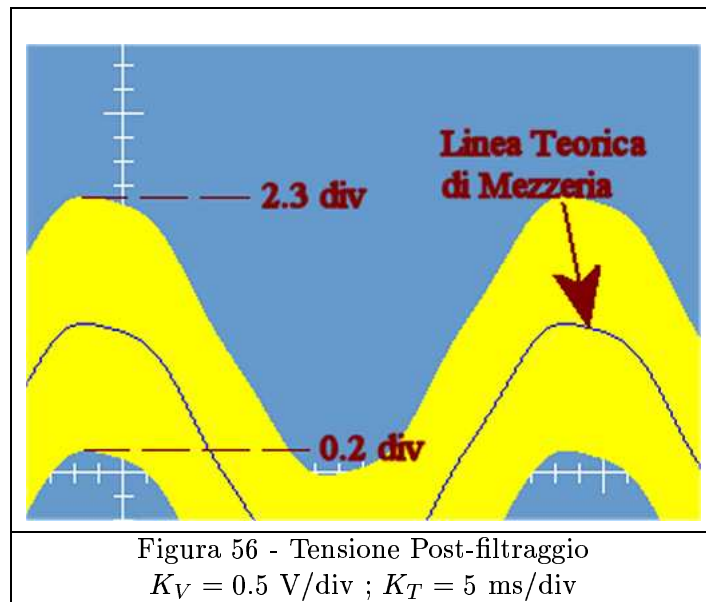
Quindi il valore massimo di tale componente è:

$$E_{2M} = \frac{V_{2pp}}{2} \Rightarrow$$

$$E_{2M} = 0.53 \pm 0.05 \text{ V}$$

Si può ragionevolmente affermare che la componente in alta frequenza si manifesta in maniera pressochè immutata, come è logico aspettarsi da un filtro passa-alto.

Per valutare l'ampiezza della componente di tensione a 50 Hz, dopo il filtraggio si procede come di seguito descritto:



Ragionando in termini di divisioni, si ha che il valor medio fra 2.3 e 0.2 divisioni è dato da:  $\frac{2.3+0.2}{2}$ ; considerando che ad ogni lettura è stata attribuita un'incertezza di 0.2 divisioni, si ha:

$$E_{1M} = \frac{(2.3 \pm 0.2) + (0.2 \pm 0.2)}{2} \cdot K_V = (1.25 \pm 0.20) \cdot K_V$$

$$E_{1M} = 0.6 \pm 0.1 \text{ V}$$

Mentre il valore teorico aspettato vale:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} \cdot (11.5 \pm 0.5 \text{ V}) \Rightarrow$$

$$E_{1M} = 0.56 \pm 0.02 \text{ V}$$

3.4 Riepilogo Risultati & Simulazioni

Per una più chiara visione d'insieme, si riportano i risultati della misura:

	PASSA-BASSO [V]	PASSA-ALTO [V]
$V_{in}(50\text{ Hz})$	$11.5 \pm 0.5$	$11.5 \pm 0.5$
$V_{out}(50\text{ Hz})$	$11.5 \pm 0.5$	$0.6 \pm 0.1$
$V_{in}(100\text{ kHz})$	$0.5 \pm 0.1$	$0.5 \pm 0.1$
$V_{out}(100\text{ kHz})$	$\leq 0.025$	$0.53 \pm 0.05$

Come al solito, per verificare la consistenza dei risultati ottenuti, ci si avvale del programma OrCAD effettuando le simulazioni dei circuiti trattati.

Simulazione filtro Passa-Basso

Il circuito per la simulazione è il seguente:

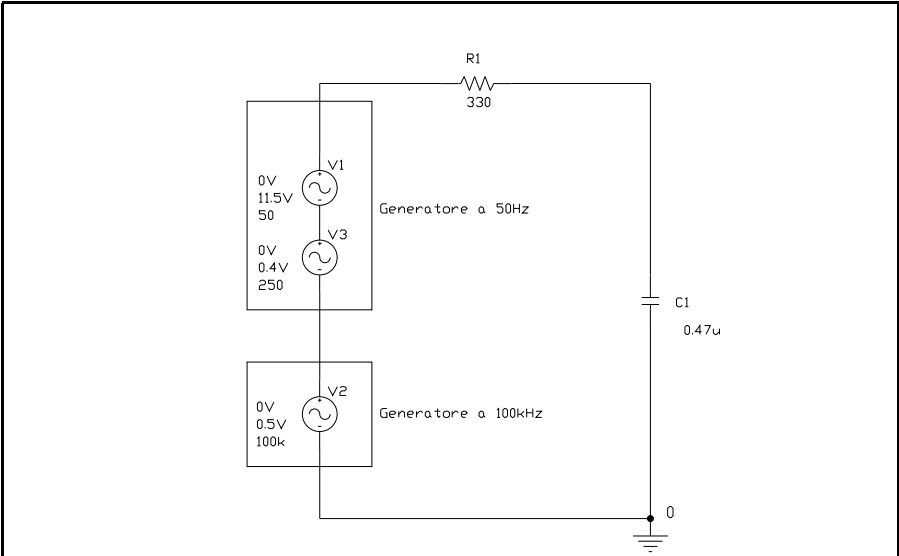
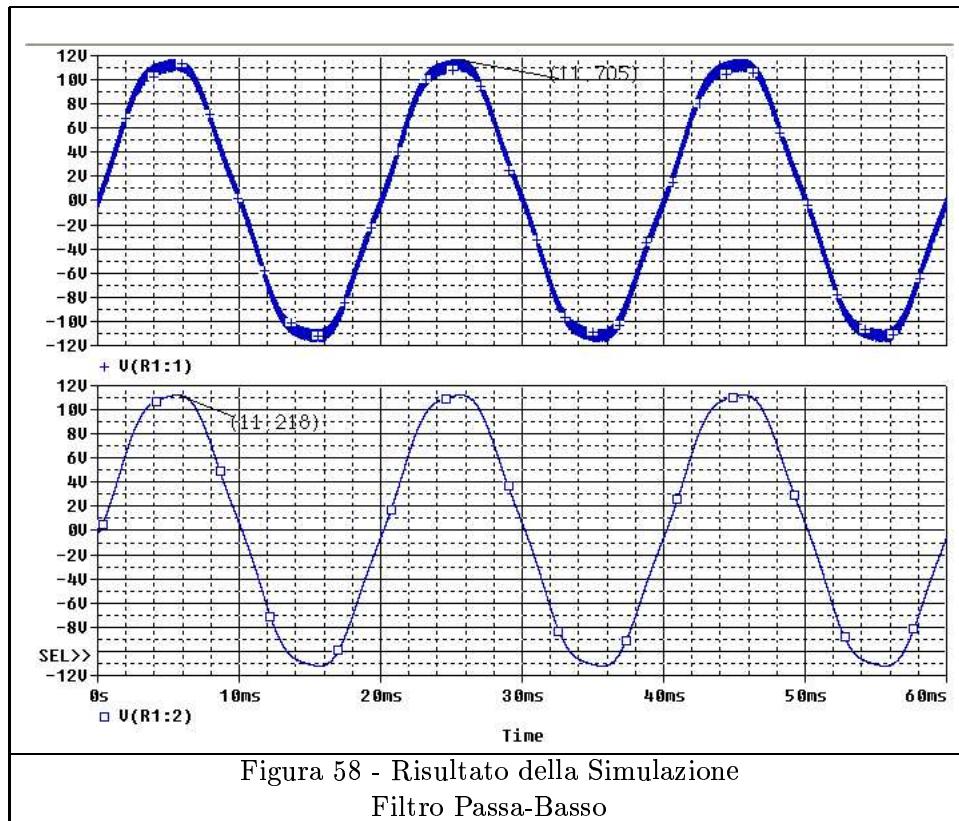


Figura 57 - Circuito per Simulazione  
Il generatore a 50 Hz comprende anche una  
componente di 5° armonica

Si avvia la simulazione, e si ottiene:





Sempre grazie alle potenzialità fornite dal programma OrCAD, è possibile effettuare l'analisi armonica del segnale filtrato, e quindi valutare l'ampiezza del segnale 'superstite'; non si descrive in dettaglio la procedura di analisi, basti sapere che i valori massimi della tensione a 50 Hz ed a 100 kHz dopo il filtraggio, forniti dal programma, sono rispettivamente:

$$E_{1M} = 11.49 \text{ V} \quad E_{2M} = 4.6 \text{ mV}$$

Il fattore di attenuazione, risulta, quindi:

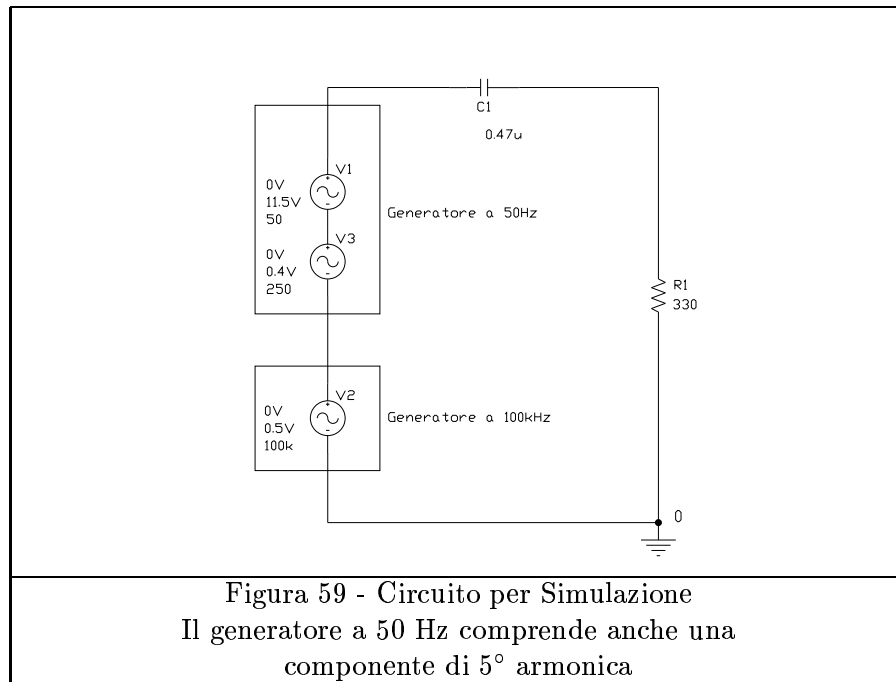
$$K_1 = \frac{11.49}{11.50} = 0.9991 \Rightarrow K_1 = -0.008 \text{ dB}$$

$$K_2 = \frac{4.6 \times 10^{-3}}{0.5} = 0.0092 \Rightarrow K_2 = -40.7 \text{ dB}$$

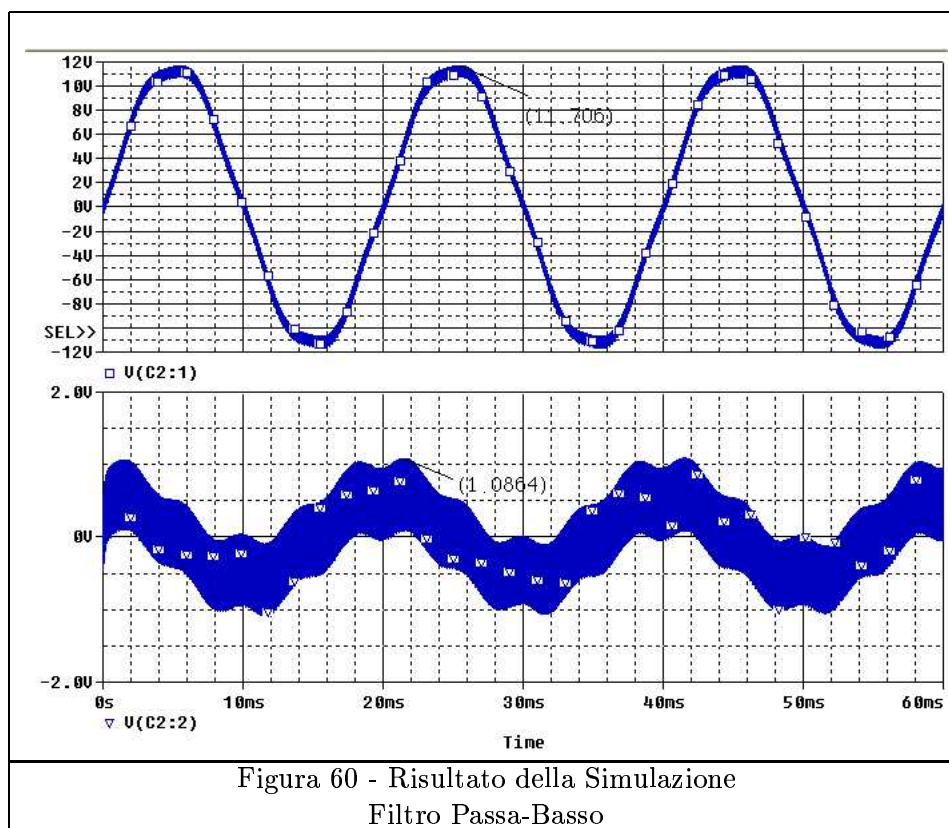
Ovvero: il segnale a 50 Hz non subisce attenuazione degna di rilievo, mentre quello a 100 kHz subisce un'attenuazione di circa 100 volte.

### Simulazione filtro Passa-Alto

Il circuito per la simulazione è il seguente:



Si avvia la simulazione, e si ottiene:



Si esegue la solita analisi armonica, ottenendo, dopo il filtraggio:

$$E_{1M} = 554 \text{ mV} \quad E_{2M} = 475 \text{ mV}$$

Il fattore di attenuazione, risulta, quindi:

$$K_1 = \frac{554 \times 10^{-3}}{11.50} = 0.0482 \Rightarrow K_1 = -26.3 \text{ dB}$$

$$K_2 = \frac{475 \times 10^{-3}}{0.5} = 0.95 \Rightarrow K_2 = -0.45 \text{ dB}$$

In questo caso la tensione a 50 Hz subisce un'attenuazione di circa 20 volte, mentre la tensione a 100 kHz resta praticamente immutata.

(Stesura completata in data 20/12/2003)

## Relazione 4

# Distribuzione di Poisson

La distribuzione di Poisson (Comunemente detta ‘Poissoniana’) è una distribuzione limite associata a fenomeni casuali in ambito discreto. Quando un certo numero di eventi casuali si verificano in un certo intervallo di tempo prefissato, si ha una certa frequenza dell’evento  $R$  (per esempio, 10 nascite alla settimana, oppure 100 decadimenti radioattivi al minuto ecc.); allora la media stimata per quel determinato evento è data da

$$\mu = R \cdot T$$

E’ ovvio che, se si esegue un’osservazione in un tempo  $T$  con scarsissima probabilità si otterrà un numero di conteggi perfettamente pari a  $\mu$ ; più probabilmente si otterrà un valore diverso, ed in particolare se si eseguono diversi conteggi ad intervalli di tempo uguali si otterranno dei valori che saranno ‘prossimi’ al valore  $\mu$ , ma che presenteranno delle fluttuazioni rispetto a tale valor medio (a testimonianza del fatto che l’evento è comunque casuale.)

Se si esegue un conteggio di tal genere è lecito chiedersi quale sia la probabilità che in un intervallo di tempo  $T$  si contino  $k$  eventi, sapendo che la media per quel determinato fenomeno è  $\mu$  eventi su  $T$ .

Questa probabilità è data dall’espressione:

$$P_{\mu}(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

Che per l’appunto esprime formalmente la **distribuzione di Poisson**<sup>1</sup>.

### 4.1 Descrizione della Relazione

In questa relazione sarà studiato un evento che, sotto opportune ipotesi, può essere ritenuto del tutto casuale e, trattandosi di un’operazione di conteggio, per questo modellabile mediante la distribuzione di Poisson.

**Il fenomeno in oggetto consiste nell’accesso al seguente sito web:**

<http://web.quipo.it/Analisi/>

---

<sup>1</sup> Come tutte le distribuzioni Discrete,  $P_{\mu}(k)$  esprime anche la frequenza relativa con cui si verificano  $k$  conteggi

ed il nostro studio verterà sul conteggio del numero di accessi giornalieri a tale indirizzo.

Lo scopo è quello di determinare i parametri di maggior interesse (come la media giornaliera, e la varianza ecc.) e di verificare che la distribuzione Poissoniana sia effettivamente quella appropriata per lo studio di tale fenomeno, in caso contrario si cercherà di determinare la distribuzione limite che più si adatta alla distribuzione dei dati; infine, con tali conoscenze, si potrà effettuare una previsione degli accessi futuri.

Per poter effettuare le suddette operazioni è necessario avere a disposizione dei dati statistici in numero sufficiente da garantire una certa attendibilità dei valori che ci accingiamo a calcolare. E' risaputo, infatti, che un numero modesto di osservazioni comporta maggiori errori nella stima dei parametri di interesse.

Per i nostri scopi si hanno a disposizione 2 anni di statistiche ottenute grazie al servizio gratuito fornito<sup>2</sup> da

<http://webtool.html.it/>

ovvero un **contatore di accessi** automatico grazie al quale è possibile monitorare e registrare tutti gli accessi al sito effettuati giornalmente dagli utenti della rete, quindi è di fondamentale importanza osservare che questi dati sono assolutamente attendibili e tali da rispecchiare la realtà dei fatti.

Il sito 'http://web.quipo.it/Analisi/' è un sito di Matematica ideato e gestito dal sottoscritto, nel quale è possibile scaricare Dispense, esercizi, Software ecc. dedicati all'Analisi Matematica.

Naturalmente il sito è frequentato prevalentemente da Studenti Universitari per cui bisogna osservare che ci sono dei periodi dell'anno (coincidenti con i periodi di esame) in cui il numero di accessi è superiore alla media degli altri mesi, ed anche che in alcuni mesi gli accessi si riducono drasticamente (vedi il mese di Agosto).

E' necessario quindi, escludere questi mesi dall'analisi statistica in quanto evidentemente comportano una 'deviazione' da quello che dovrebbe essere un comportamento casuale. Nel seguito della trattazione si renderanno noti i criteri in base ai quali verranno scartati dalla statistica i mesi summenzionati.

Si è deciso di porre tutti i dati statistici in appendice, e di prelevare, quando necessario, i valori di maggior interesse. Cominciamo col dare un'occhiata alle medie mensili di accesso:

<b>2002</b>	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto
Media	18,0	10,8	20,6	20,4	25,4	23,1	21,4	16,5

<b>2002</b>	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
Media	29,4	22,6	31,5	31,2

<sup>2</sup>Non vuole essere una promozione pubblicitaria, ma l'indicazione della metodologia usata per ricavare i dati statistici!

2003	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto
Media	27,9	24,1	23,4	21,0	20,0	20,7	15,7	14,1

2003	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
Media	20,8	21,8	22,8	20,3

Già da una rapida occhiata si osserva che il valor medio degli accessi mensili si aggira intorno a  $\bar{\mu} = 20$  acc./mese.

Una media di tal valore fa già presagire che la distribuzione (sotto le ipotesi del Teorema del Limite Centrale) sicuramente avrà delle rilevanti simmetrie e tenderà ad assumere una conformazione Gaussiana.

## 4.2 Analisi dei Dati

Nel corso dei calcoli che seguono sarà utilizzato il listato MATLAB denominato "Stat1.m" riportato per intero in Appendice.

### 4.2.1 Anno 2002

Cominciamo con l'analizzare i dati relativi all'anno 2002; si ha:

Numero di Conteggi:  $N_{02} = 365$

Il migliore **Estimatore** del valor medio, come è risaputo, è la media aritmetica:

Media Aritmetica:  $\mu_{02} = 22.6$

sotto l'ipotesi che la distribuzione limite associata ai dati statistici sia la Poissoniana, si ha che il miglior estimatore dell'errore sulla media è dato da:

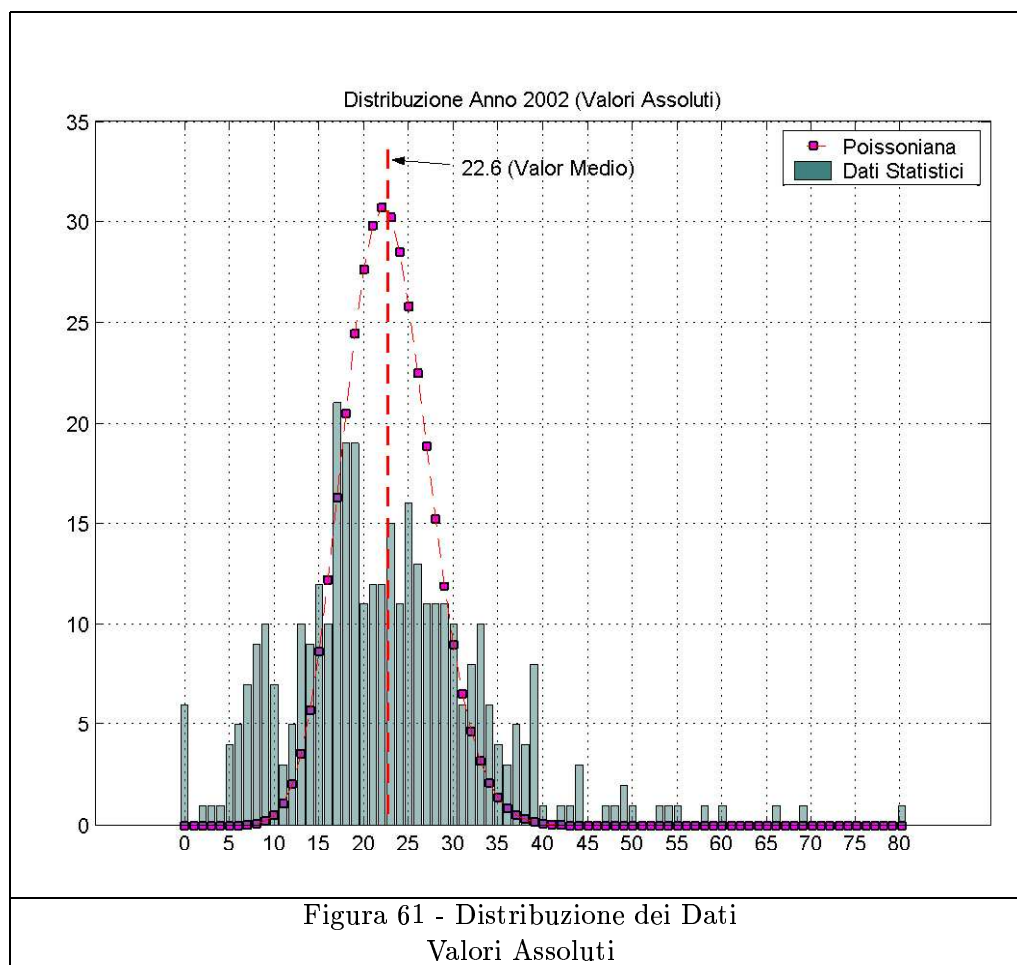
Deviazione Standard:  $\sigma_{02} = \sqrt{\mu_{02}} = 4.8$

I valori limite dei conteggi sono:

Valor massimo di Conteggi:  $\text{Max}_{02} = 80$

Valor minimo di Conteggi:  $\text{min}_{02} = 0$

Per visualizzare l'andamento della distribuzione dei conteggi, si riporta l'Istogramma relativo:



Il grafico sovrapposto all'istogramma (contrassegnato con il simbolo  $\square$ ) è relativo all'andamento della distribuzione limite di Poisson con valor medio  $\mu = \mu_{02} = 22.6$ , la cui espressione analitica è:

$$f(k) = N_{02} \cdot \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \quad k = 0, 1, \dots, 80$$

Osservando la figura precedente si possono fare le due seguenti osservazioni:

1. Come in precedenza accennato, la distribuzione limite presenta una forte simmetria rispetto al valor medio, e ciò è dovuto al fatto che il valor medio stesso è relativamente grande<sup>3</sup> ( $\geq 10$ ). Questo risultato è confermato anche dal valore della **Skewness**:  $S_k = \frac{1}{\sqrt{\mu}} = 0.2$ .
2. A colpo d'occhio la distribuzione limite di Poisson appare notevolmente discostata dalla effettiva distribuzione dei dati, e ciò pone notevoli dubbi sul fatto che i dati seguano una distribuzione Poissoniana. In virtù di tali dubbi è necessario eseguire il test del  $\chi^2$  per verificare quanto asserito.

Con l'ausilio del listato MATLAB ("Stat1.m") si eseguono tutti i calcoli richiesti, considerando la forma ridotta per il  $\chi^2$ :

<sup>3</sup>Come è risaputo, maggiore è il valor medio  $\mu$ , più la Poissoniana tende ad assumere un andamento simile ad una Gaussiana con la stessa media  $X = \mu$  e la stessa varianza  $\sigma = \sqrt{\mu}$

$$\chi^2 = \frac{1}{d} \cdot \sum_{k=1}^N \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} \quad \left\{ \begin{array}{ll} d = N - c & \text{(Gradi di Libertà)} \\ N & \text{(N.di intervalli)} \\ c & \text{(N.di vincoli)} \\ O_k & \text{(Valori Osservati)} \\ E_k & \text{(Valori Aspettati)} \end{array} \right.$$

Si eseguirà il test del  $\chi^2$  per ogni mese dell'anno 2002; questo permetterà di selezionare i mesi per i quali la distribuzione degli accessi si avvicina il più possibile alla Poissoniana.

Gennaio 2002				Febbraio 2002				Marzo 2002			
k	Int.	$O_k$	$E_k$	k	Int.	$O_k$	$E_k$	k	Int.	$O_k$	$E_k$
1	0 ÷ 12	13	2.8	1	0 ÷ 6	4	2.5	1	0 ÷ 14	3	2.6
2	13 ÷ 24	13	26	2	7 ÷ 14	19	21.9	2	15 ÷ 25	24	24
3	25 ÷ 80	5	2.1	3	15 ÷ 22	4	3.6	3	26 ÷ 49	4	4.4
$\chi^2 = 47.7$				$\chi^2 = 1.3$				$\chi^2 = 0.1$			
Aprile 2002				Maggio 2002				Giugno 2002			
k	Int.	$O_k$	$E_k$	k	Int.	$O_k$	$E_k$	k	Int.	$O_k$	$E_k$
1	0 ÷ 14	8	2.7	1	0 ÷ 19	9	3.6	1	0 ÷ 17	5	3.5
2	15 ÷ 26	15	24.5	2	20 ÷ 31	18	23.8	2	18 ÷ 30	21	24.4
3	27 ÷ 66	7	2.8	3	32 ÷ 49	4	3.6	3	31 ÷ 33	4	1.4
$\chi^2 = 20.4$				$\chi^2 = 9.6$				$\chi^2 = 5.9$			
Luglio 2002				Agosto 2002				Settembre 2002			
k	Int.	$O_k$	$E_k$	k	Int.	$O_k$	$E_k$	k	Int.	$O_k$	$E_k$
1	0 ÷ 14	6	1.9	1	0 ÷ 10	10	1.9	1	0 ÷ 21	6	2
2	15 ÷ 27	16	26.1	2	11 ÷ 22	15	26.8	2	22 ÷ 36	16	25
3	28 ÷ 37	9	3	3	23 ÷ 48	6	2.3	3	37 ÷ 60	8	2.9
$\chi^2 = 24.8$				$\chi^2 = 45.7$				$\chi^2 = 20.2$			
Ottobre 2002				Novembre 2002				Dicembre 2002			
k	Int.	$O_k$	$E_k$	k	Int.	$O_k$	$E_k$	k	Int.	$O_k$	$E_k$
1	0 ÷ 16	4	2.9	1	0 ÷ 24	6	3	1	0 ÷ 24	6	3.5
2	17 ÷ 29	23	25.6	2	25 ÷ 38	18	23.7	2	25 ÷ 38	20	24.5
3	30 ÷ 39	4	2.4	3	39 ÷ 58	6	3.3	3	39 ÷ 69	5	3
$\chi^2 = 1.7$				$\chi^2 = 6.6$				$\chi^2 = 3.9$			

I valori del  $\chi^2$  (Che si ricorda essere Ridotto) per ogni mese devono essere confrontati con 1.

Per le scelte fatte, il numero di gradi di libertà è pari a 1; infatti si ha  $c = 2$  ovvero due vincoli che sono:

1.  $\sum_{k=1}^N O_k = M$  con  $M = n.$  giorni del mese,  $N = n.$  di Intervalli considerati.
2. Il valore **Aspettato**  $E_k$  si calcola mediante l'espressione della distribuzione Poissoniana, che richiede il calcolo del valor medio  $\mu$  mensile.

quindi

$$d = N - c = 3 - 2 = 1$$

Per dare un significato ai risultati ottenuti, bisogna osservare l'andamento della distribuzione del  $z = \chi^2$ , che ricordiamo avere espressione:

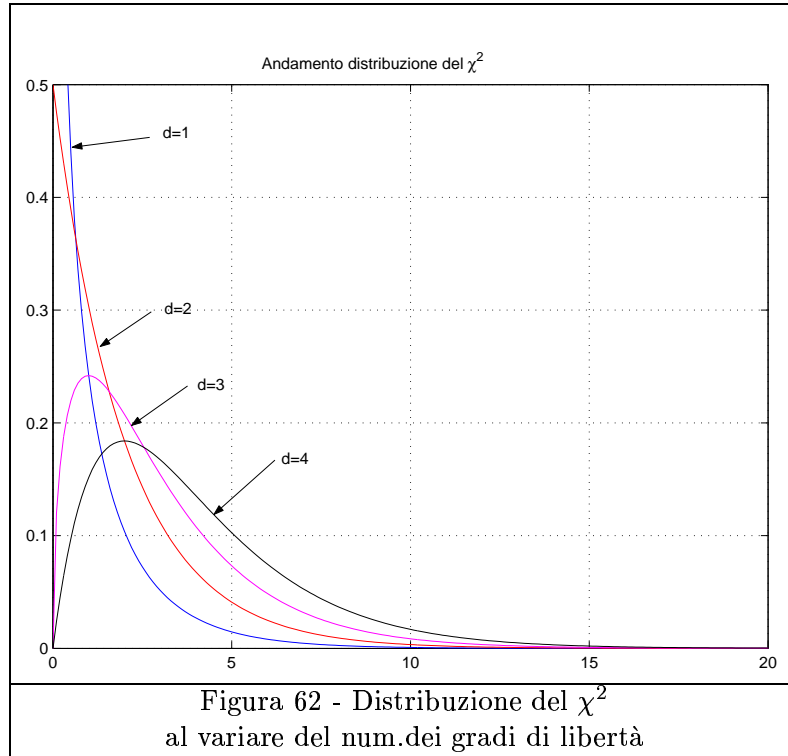


$$g_d(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{d}{2}-1} \cdot e^{-\frac{z}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$$

d=gradi di libertà

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \text{ Gamma di Eulero } (\alpha > 0)$$

Il cui andamento è:



Più opportunamente bisogna calcolare la probabilità che si ottenga un valore di  $\chi^2$  maggiore di un certo valore  $\chi_0^2$ :

$$P_d(\chi^2 \geq \chi_0^2) = \int_{\chi_0^2}^{+\infty} g_d(z) dz$$

MATLAB dispone della funzione `chi2cdf(X,V)` definita nel seguente modo:

$$\text{chi2cdf}(x, \nu) = \int_0^x \frac{t^{\frac{\nu-2}{2}} e^{-\frac{t}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} dt$$

Si userà tale funzione per calcolare la probabilità suddetta, osservando che:

$$P_d(\chi^2 \geq \chi_0^2) = 1 - \text{chi2cdf}(\chi_0^2, d)$$

Nel nostro caso si ha  $d = 1$ , quindi si riportano i valori della probabilità al variare di  $\chi_0^2$ :

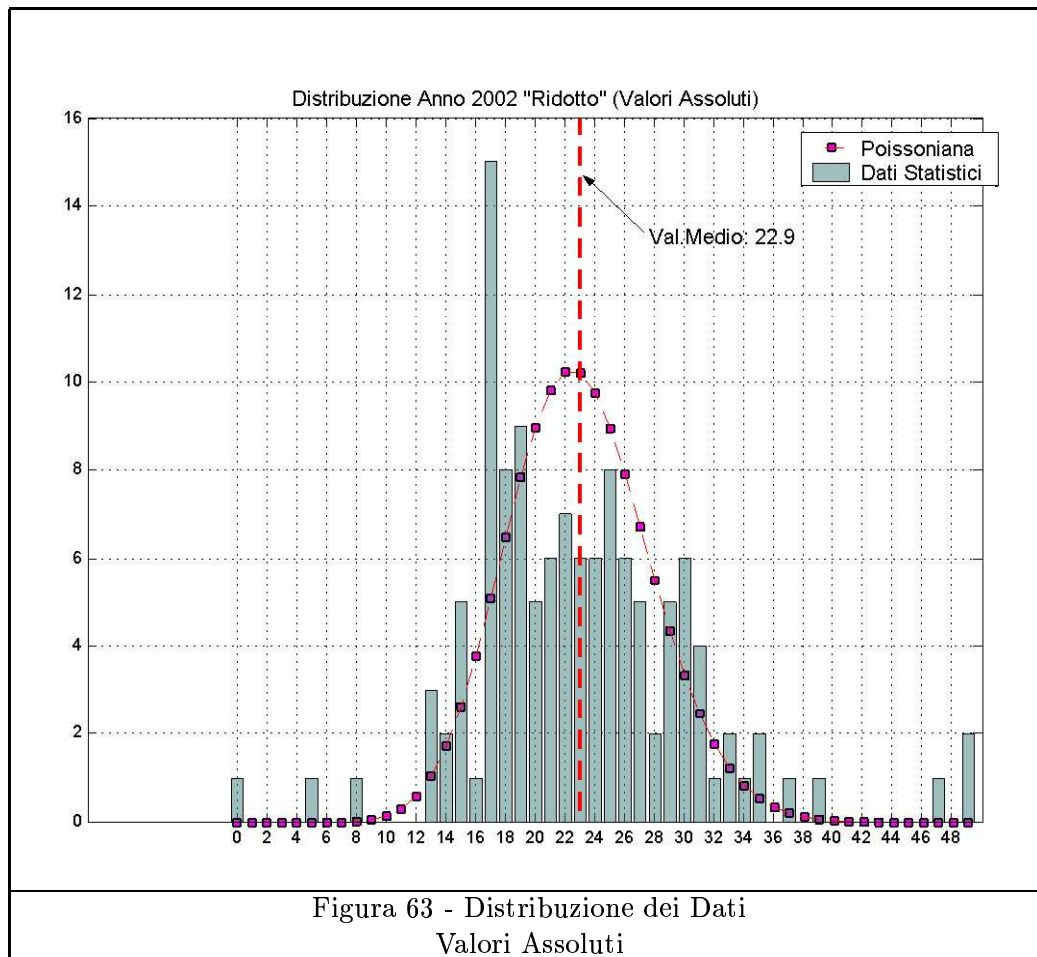
$\chi_0^2$	$P_d(\chi^2 \geq \chi_0^2)$
1	31.7%
2	15.7%
3	8.3%
4	4.6%
5	2.5%
6	1.4%

Si osserva che valori del  $\chi^2$  superiori a 4 hanno una probabilità inferiore al 5% per cui sono da ritenersi tali da smentire l'ipotesi che la distribuzione dei dati sia Poissoniana. I mesi che soddisfano la condizione  $\chi^2 \leq 4$  sono: **Febbraio, Marzo, Ottobre, Dicembre**; tuttavia è necessario fare le seguenti osservazioni:

- Febbraio, pur presentando un valido valore del  $\chi^2 = 1.3$  ha una bassa media (10.8), il che fa pensare che tale mese sia governato da eventi straordinari rispetto agli altri mesi. Lo stesso vale per il mese di Dicembre, per il quale la media è 31.2.
- Considerare soltanto 2 mesi su 12 appare un inutile spreco di dati statistici, per cui si considereranno anche quei mesi per i quali il valore del  $\chi^2$  è superiore (ma non eccessivamente) a 4.

**I mesi che saranno considerati sono: Marzo, Maggio, Giugno e Ottobre**, tutti gli altri mesi sono scartati perchè il valore del  $\chi^2$  è inaccettabile!

Si riporta l'andamento della distribuzione di tali mesi:



Pur avendo eliminato dalla statistica i mesi per i quali non sussiste alcun legame con la distribuzione Poissoniana, si nota che la distribuzione dei dati non segue tale andamento; infatti effettuando il test del  $\chi^2$  su tutti i dati presi in considerazione, si ha:

Anno 2002 Ridotto			
Marzo,Maggio Giugno,Ottobre			
k	Int.	$O_k$	$E_k$
1	$0 \div 14$	8	3.9
2	$15 \div 22$	56	54.8
3	$23 \div 31$	48	59.1
4	$32 \div 49$	11	5.2
$\chi^2 = 6.5$			

Si è visto che la probabilità che  $\chi^2 \geq 6$  è pari all' 1.4%; si può, quindi, tranquillamente affermare che la distribuzione degli accessi relativi all'anno 2002 non è Poissoniana!

#### 4.2.2 Anno 2003

Analizziamo i dati complessivi dell'anno 2003:

Numero di Conteggi:  $N_{03} = 365$

Il migliore **Estimatore** del valor medio, come è risaputo, è la media aritmetica:

Media Aritmetica:  $\mu_{03} = 21.0$

Ipotizzando ancora una volta che la distribuzione limite associata ai dati statistici sia la Poissoniana, si ha che il miglior estimatore dell'errore sulla media è dato da:

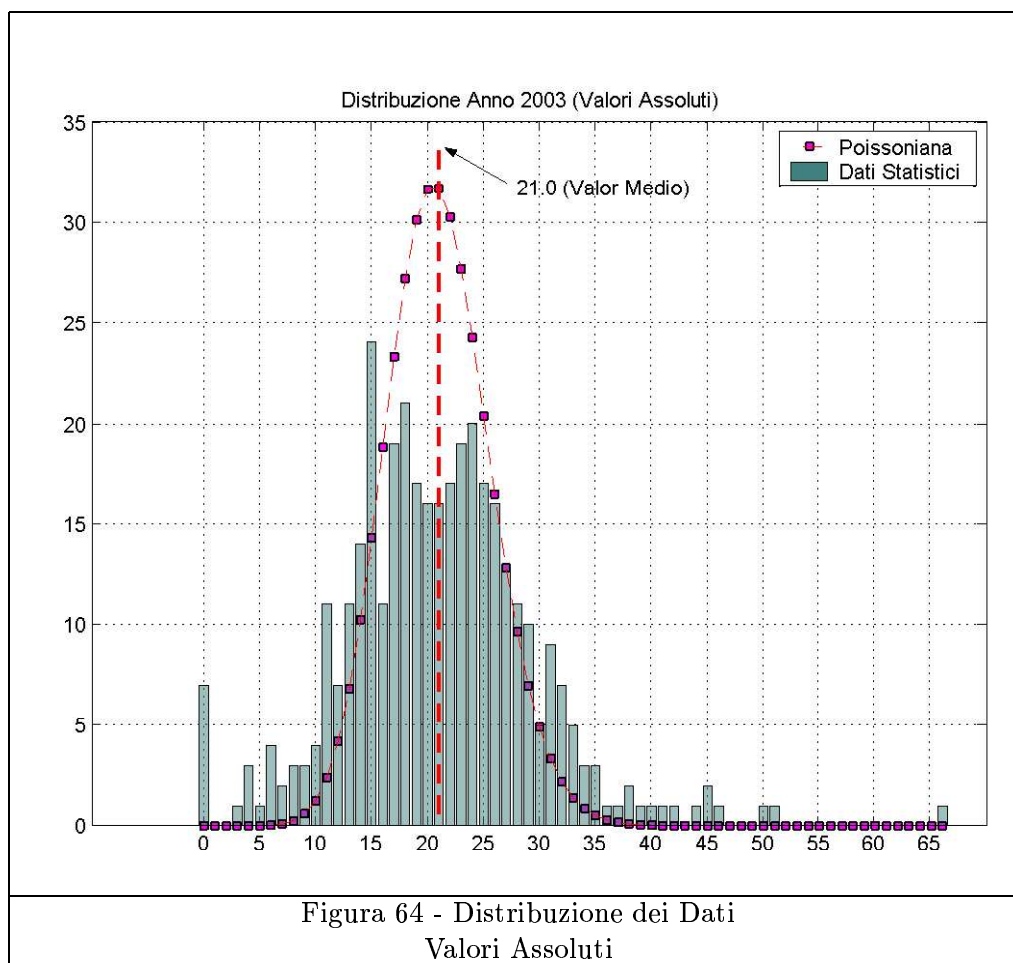
Deviazione Standard:  $\sigma_{03} = \sqrt{\mu_{03}} = 4.6$

I valori limite dei conteggi sono:

Valor massimo di Conteggi:  $\text{Max}_{03} = 66$

Valor minimo di Conteggi:  $\text{min}_{03} = 0$

Si riporta l'Istogramma relativo alla distribuzione dei dati, a confronto con quella limite Poissoniana:



In questo la distribuzione dei dati sembra “più prossima” alla distribuzione Poissoniana, rispetto all’anno 2002, anche se ancora apprezzabilmente da essa discostata. Per rendere quantitativa l’osservazione precedente, si esegue il test del  $\chi^2$  ridotto per ciascun mese dell’anno, analogamente all’anno 2002:

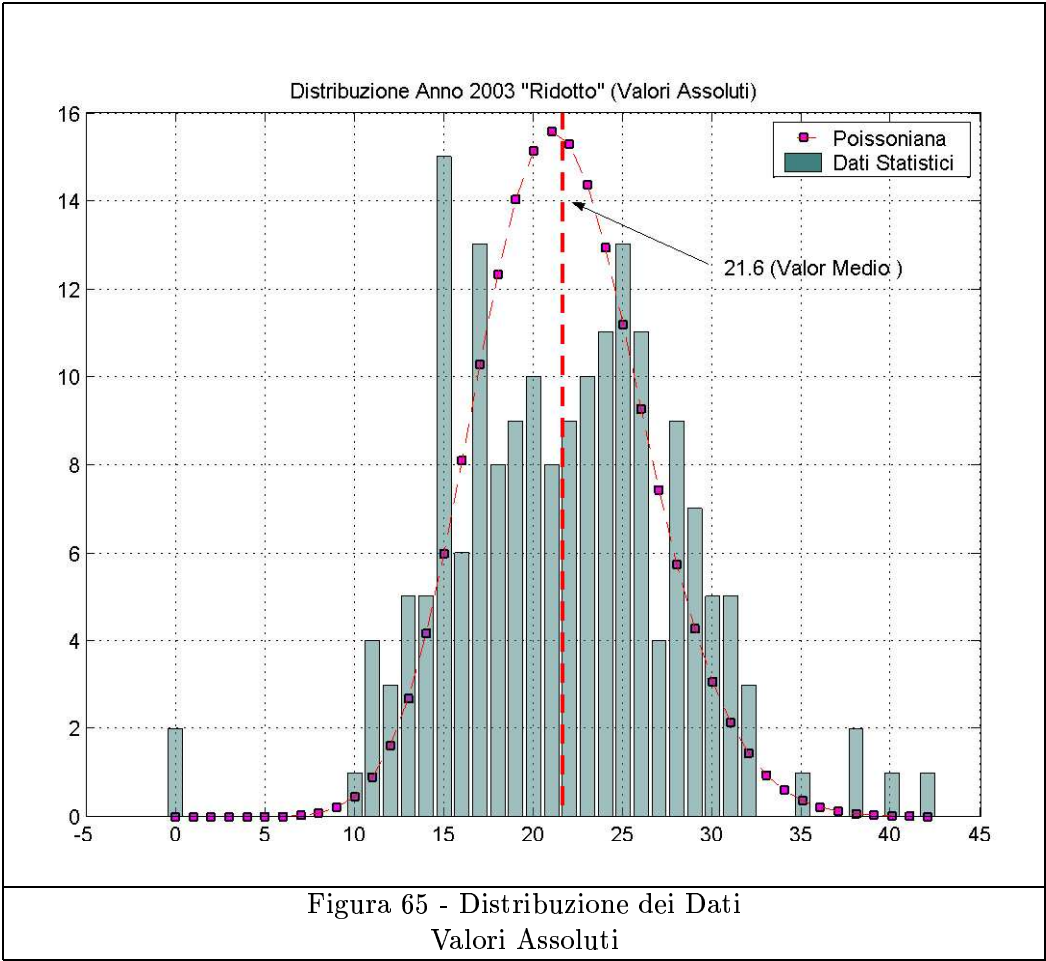
Gennaio 2003			
k	Int.	$O_k$	$E_k$
1	0 ÷ 21	7	3.4
2	22 ÷ 34	16	24.3
3	35 ÷ 50	8	3.3
$\chi^2 = 13$			
Febbraio 2003			
k	Int.	$O_k$	$E_k$
1	0 ÷ 20	5	6.7
2	21 ÷ 29	19	17.5
3	30 ÷ 40	4	3.8
$\chi^2 = 0.6$			
Marzo 2003			
k	Int.	$O_k$	$E_k$
1	0 ÷ 16	8	2.2
2	17 ÷ 27	15	22.8
3	28 ÷ 51	8	6
$\chi^2 = 18.6$			
Aprile 2003			
k	Int.	$O_k$	$E_k$
1	0 ÷ 15	8	3.3
2	16 ÷ 27	16	23.1
3	28 ÷ 46	4	2.5
$\chi^2 = 9.8$			
Maggio 2003			
k	Int.	$O_k$	$E_k$
1	0 ÷ 14	4	3.2
2	15 ÷ 25	22	24.3
3	26 ÷ 35	5	3.5
$\chi^2 = 1.1$			
Giugno 2003			
k	Int.	$O_k$	$E_k$
1	0 ÷ 14	6	2.4
2	15 ÷ 25	18	23.2
3	26 ÷ 33	6	4.2
$\chi^2 = 7.3$			
Luglio 2003			
k	Int.	$O_k$	$E_k$
1	0 ÷ 10	9	2.7
2	11 ÷ 21	17	25.9
3	22 ÷ 66	5	2.4
$\chi^2 = 20.6$			
Agosto 2003			
k	Int.	$O_k$	$E_k$
1	0 ÷ 9	9	3.3
2	10 ÷ 19	15	25.2
3	20 ÷ 34	7	2.5
$\chi^2 = 22.1$			
Settembre 2003			
k	Int.	$O_k$	$E_k$
1	0 ÷ 15	5	3.5
2	16 ÷ 26	19	23.2
3	27 ÷ 30	6	2.6
$\chi^2 = 5.8$			
Ottobre 2003			
k	Int.	$O_k$	$E_k$
1	0 ÷ 15	6	2.5
2	16 ÷ 28	21	25.9
3	29 ÷ 31	4	1.8
$\chi^2 = 8.5$			
Novembre 2003			
k	Int.	$O_k$	$E_k$
1	0 ÷ 17	7	4
2	18 ÷ 29	19	23.5
3	30 ÷ 38	4	2.5
$\chi^2 = 4$			
Dicembre 2003			
k	Int.	$O_k$	$E_k$
1	0 ÷ 13	5	1.8
2	14 ÷ 26	23	26.4
3	27 ÷ 42	3	2.8
$\chi^2 = 6.1$			

Con considerazioni del tutto analoghe al caso precedente, verranno presi in considerazione i soli mesi di **Febbraio**, **Maggio**, **Settembre**, **Ottobre**, **Novembre**, **Dicembre**

#### Osservazione:

*è interessante notare che ancora una volta il mese di Febbraio presenta un valore del  $\chi^2$  prossimo ad 1. Il fatto che il mese di **Febbraio** abbia una spiccata natura Poissoniana, suscita nello scrittore una notevole curiosità, tuttavia uno studio approfondito sulle cause che comportano tale risultato esula dallo scopo della presente trattazione.*

Si riporta l'andamento della distribuzione complessiva (a confronto con quella limite), considerando i soli mesi suddetti:



Si esegue ancora una volta il test del  $\chi^2$  per il complesso di mesi considerato; si ottiene:

Anno 2003 Ridotto			
Marzo,Maggio			
Settembre,Ottobre			
Novembre,Dicembre			
k	Int.	$O_k$	$E_k$
1	$0 \div 14$	20	10.2
2	$15 \div 22$	72	96.6
3	$23 \div 31$	75	70.3
4	$32 \div 42$	8	3.9
$\chi^2 = 10.2$			

Anche per l'anno 2003 si conclude che la distribuzione degli accessi giornalieri non segue un andamento poissoniano, infatti:

$$P_d(\chi^2 \geq 10) = 0.16\%$$

### 4.3 Gaussiana

Si è arrivati alla conclusione che la distribuzione degli accessi al sito, non segue un andamento poissoniano; ci occuperemo in questa sezione, dello studio della distribuzione

limite che meglio descrive quella dei dati.

Prima di proseguire, è necessario rendere noto il fatto che il sito, oggetto di studio, è stato pubblicato nel **Novembre 2001**, ed in seguito alla pubblicazione nel web è stata effettuata una massiccia campagna pubblicitaria<sup>4</sup> per cui l'anno 2002 non è da ritenersi assolutamente attendibile statisticamente, in quanto rappresenta l'anno di avviamento ed assestamento per quanto riguarda la media di accessi giornalieri. Infatti si osservano picchi di accessi anche rilevanti, in corrispondenza di comunicati pubblicitari mirati. Al contrario l'anno 2003 è caratterizzato da un numero di accessi giornalieri, poco influenzato da azioni propagandistiche, e quindi riveste un ruolo di maggior interesse per il nostro studio.

**In seguito si faranno osservazioni, esclusivamente riferite all'anno 2003.**

Dando un'occhiata ai valori medi giornalieri, si ritiene opportuna la scelta di eliminare dalla statistica i mesi di Gennaio, Luglio ed Agosto. Tale decisione potrebbe essere attribuibile al fatto che i mesi di Gennaio e Febbraio sono mesi in cui si ha una maggiore concentrazione di appelli d'esame, mentre Luglio ed Agosto 2003 si sono particolarmente caratterizzati per le elevate temperature e per la siccità: condizioni ambientali che, sicuramente non hanno contribuito positivamente ad incrementare il numeri di accessi al sito di Matematica!

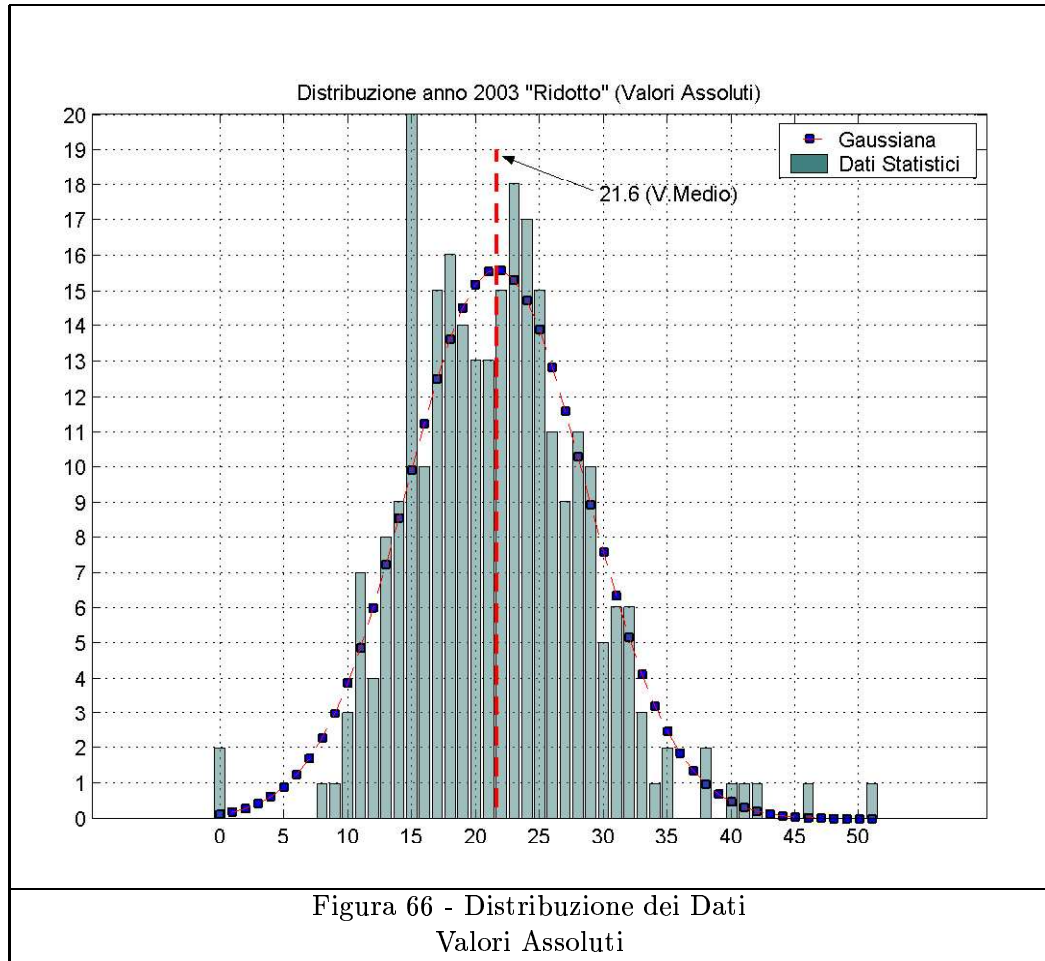
Si riportano gli andamenti della distribuzione dei dati<sup>5</sup> a confronto con la distribuzione limite Gaussiana:

---

<sup>4</sup>Attraverso la comunicazione ai vari portali presenti nel web, ed attraverso i forum di discussione che hanno per argomento la Matematica.

<sup>5</sup>Ottenuti mediante il listato MATLAB denominato "Stat2.m"





Per convincersi del fatto che la distribuzione Gaussiana sia quella più adatta alla descrizione della distribuzione dei dati, si esegue ancora una volta il test del  $\chi^2$ , prestando attenzione al fatto che, questa volta, la distribuzione di Gauss consiste in una **Densità di Probabilità** per cui è necessario eseguire il calcolo della Funzione d'errore (Error Function) negli intervalli opportuni.

Per effettuare i calcoli si farà ricorso alla funzione **erf(x)** già presente in MATLAB; bisogna tenere in considerazione che la funzione **erf(x)** è definita, in MATLAB, nel seguente modo:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (4.1)$$

Il calcolo che si deve effettuare è invece:

$$\int_a^b g_{(X,\sigma)}(x) dx \quad (4.2)$$

dove

$$g_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-X}{\sigma} \right)^2}$$

è la distribuzione di Gauss, ed  $[a, b]$  è l'intervallo su cui calcolare l'error function. Vediamo come si può utilizzare l'espressione (4.1) per calcolare l'integrale (4.2).

Si esegue la sostituzione

$$z = \frac{x-X}{\sigma}$$

da cui

$$x = \sigma z + X \quad dx = \sigma dz$$

$$\int_a^b g_{(X,\sigma)}(x)dx = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\frac{a-X}{\sigma}}^{\frac{b-X}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz$$

Ponendo  $z_a = \frac{a-X}{\sigma}$  e  $z_b = \frac{b-X}{\sigma}$ , si ha:

$$\int_a^b g_{(X,\sigma)}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_a}^{z_b} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Si esegue l'ulteriore sostituzione:

$$t = \frac{z}{\sqrt{2}} \Rightarrow z = \sqrt{2}t \Rightarrow dz = \sqrt{2}dt$$

Quindi:

$$\int_a^b g_{(X,\sigma)}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\frac{z_a}{\sqrt{2}}}^{\frac{z_b}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_0^{\frac{z_b}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt - \int_0^{\frac{z_a}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt \right]$$

Quindi si può scrivere:

$$\int_a^b g_{(X,\sigma)}(x)dx = \frac{1}{2} \cdot \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{z_b}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{z_a}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

Operazione che viene eseguita dal listato MATLAB denominato “**Gaussiana.m**”.

Si riportano i risultati del test del  $\chi^2$ :

Anno 2003 Ridotto				
Feb+Mar+Apr+Mag+Giu+Set+Ott+Nov+Dic				
k	Int.Discreto	Int.Continuo	Val.Osservato	Val.Aspettato
1	$0 \div 15$	$-0.5 \div 15.5$	55	51.2
2	$16 \div 23$	$15.5 \div 23.5$	114	113
3	$24 \div 30$	$23.5 \div 30.5$	78	79.7
4	$31 \div 51$	$30.5 \div 51.5$	25	27.6

In questo caso, i vincoli sono 3:  $\sum O_k = N$ ,  $\mu$  e  $\sigma$ , quindi:

$$d = N - c = 4 - 3 = 1$$

Si ottiene:

$$\chi^2 = 0.572$$

Da cui si evince la spiccata natura Gaussiana della distribuzione dei dati.

## 4.4 Previsione

Come abbiamo visto, tutte le considerazioni fin qui fatte, hanno portato alla conclusione che gli accessi al sito web abbiano, come distribuzione limite, quella Gaussiana i cui parametri sono:

$\mu = 21.6 \simeq 22$	<b>Media</b>
$\sigma = 6.96 \simeq 7$	<b>Deviazione Standard</b>

Quindi si può affermare, senza effettuare calcoli, che, in futuro<sup>6</sup>, la probabilità di avere un numero di accessi che stia entro una deviazione standard (ovvero che  $15 \leq N \leq 29$ ) è del 68.3%, mentre la probabilità di avere più di 29 accessi o meno di 15 vale:

$$\frac{100\% - 68.3\%}{2} \simeq 16\%$$

(Stesura completata in data 03/01/2004)

---

<sup>6</sup>Escludendo i mesi 'anomali'

## Relazione 5

# Metodo Montecarlo

In questa relazione ci occuperemo del calcolo di un integrale monodimensionale utilizzando due tecniche diverse:

- Metodo dei Trapezi (Tp)
- Metodo Montecarlo (MC)

in particolare verificheremo che la velocità di convergenza del metodo dei Trapezi segue una legge del tipo  $\frac{1}{n^2}$  mentre per il metodo Montecarlo si ha  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  dove  $n$  rappresenta il numero di punti considerati nell'intervallo di integrazione.

Il metodo MC sarà affrontato in due modalità diverse, con distribuzione uniforme della variabile aleatoria e con distribuzione opportunamente scelta per migliorare la convergenza del metodo.

Infine, fissata una certa tolleranza ( $\varepsilon$ ) del risultato, si determinerà il numero minimo di estrazioni casuali che verificano la condizione per la quale l'errore commesso nella stima dell'integrale, sia minore o uguale ad  $\varepsilon$ .

### 5.1 Calcolo Analitico

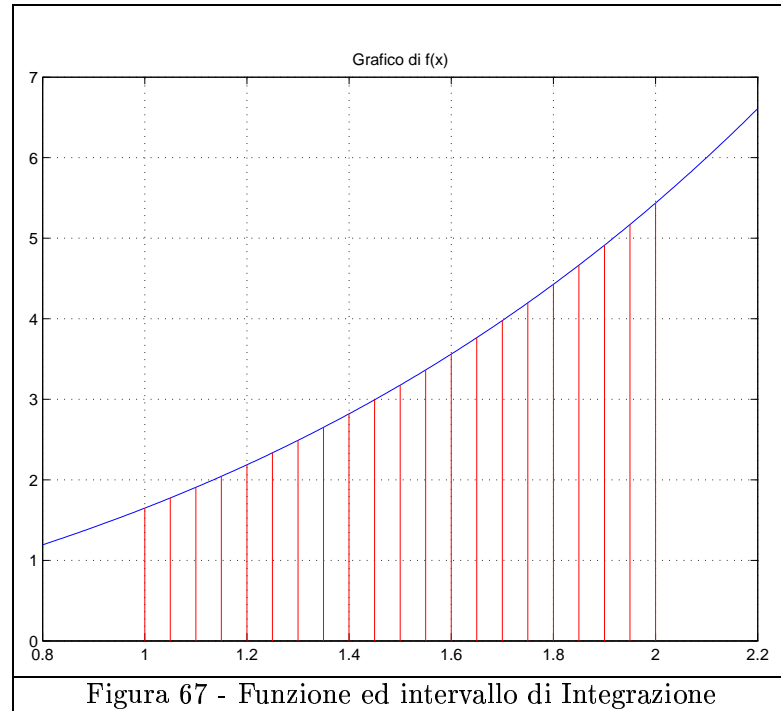
Sia data la seguente funzione reale di variabile reale:

$$f(x) = x \cdot \sqrt{e^x}$$

Si osservi che il dominio di tale funzione è tutto  $\mathbb{R}$  e che essa è di classe  $C^\infty$  nel suo dominio.

Il nostro scopo sarà quello di calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 x \cdot \sqrt{e^x} dx$$



Procediamo per via analitica, integrando per parti:

$$I = \int_1^2 x \cdot \sqrt{e^x} dx = \int_1^2 x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx = \left[ 2 \cdot x \cdot e^{\frac{x}{2}} \right]_1^2 - \int_1^2 2e^{\frac{x}{2}} dx = \dots$$

$$I = \left[ 2xe^{\frac{x}{2}} \right]_1^2 - \left[ 4e^{\frac{x}{2}} \right]_1^2$$

$$I = \left[ 2e^{\frac{x}{2}} \cdot (x - 2) \right]_1^2$$

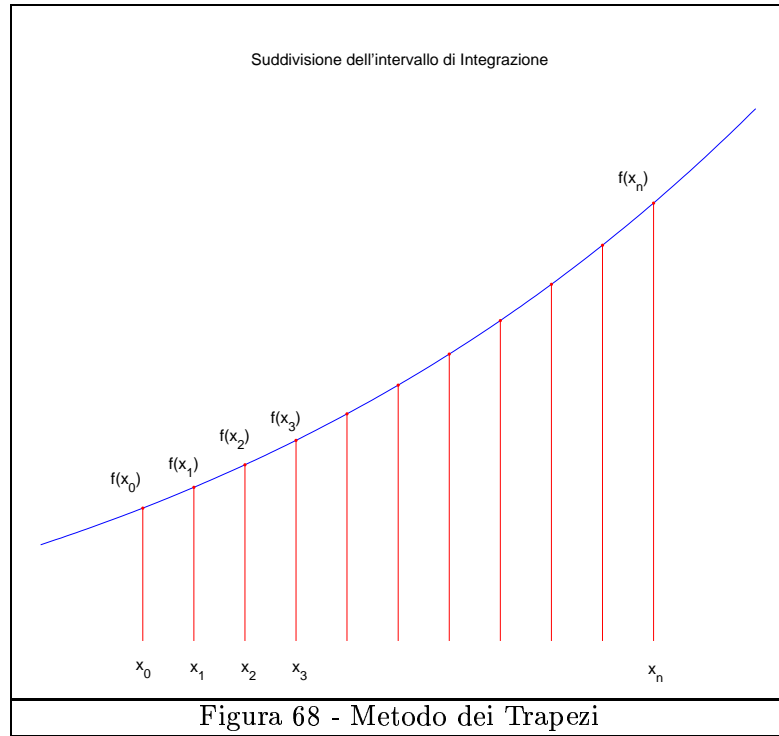
$$I = 2 \cdot \sqrt{e} = 3.29744254140026 \dots$$

Questo valore (esatto fino alla cifra meno significativa) verrà confrontato con i valori ottenuti nei due metodi numerici.

## 5.2 Metodo dei Trapezi

### 5.2.1 Descrizione del metodo

Questo metodo consiste nel suddividere l'intervallo di integrazione in  $m$  intervalli, ciascuno di ampiezza  $\Delta = \frac{b-a}{m}$ ; si hanno, quindi  $n = m + 1$  punti  $x_i$  con  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , a cui corrispondono altrettanti punti  $y_i = f(x_i)$ :



quindi per ciascun intervallo, si considera il trapezio di vertici:  $x_i, x_{i+1}, f(x_{i+1}), f(x_i)$ .

L'area del singolo trapezio vale:

$$A_i = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot \Delta \quad \text{con } i = 0, 1, \dots, m$$

Se il numero di intervalli considerato, è sufficientemente elevato, e se la funzione integranda  $f(x)$  è sufficientemente regolare, si può affermare che:

$$I = \sum_{i=0}^m A_i = \sum_{i=0}^m \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot \Delta$$

dove si pone per convenzione

$$x_0 = a \quad x_n = b$$

### 5.2.2 Osservazioni sulla Funzione

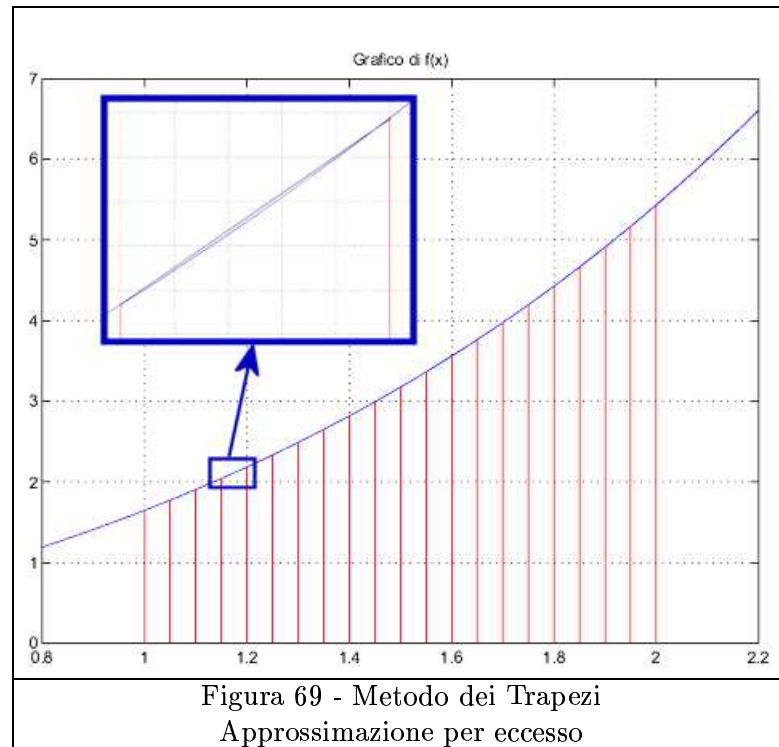
La funzione  $f(x)$  è crescente nell'intervallo di integrazione, infatti:

$$\frac{df}{dx} = \left(1 + \frac{x}{2}\right) e^{\frac{x}{2}} \geq 0 \quad \text{per } 1 \leq x \leq 2$$

inoltre rivolge la concavità verso l'alto, infatti:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \left(1 + \frac{x}{4}\right) e^{\frac{x}{2}} \geq 0 \quad \text{per } 1 \leq x \leq 2$$

Si può allora affermare che il metodo dei trapezi permette di determinare l'integrale approssimandolo per eccesso, come si evince dalla seguente figura:



Infatti l'area di ogni singolo trapezio è leggermente superiore rispetto a quella sottesa dal grafico della funzione in ogni intervallino di ampiezza  $\Delta$ .

### 5.2.3 Calcolo dell'Integrale

Si userà il listato MATLAB<sup>1</sup> denominato 'trapez.m'.

Si utilizzeranno diversi valori di  $n$  (da 10 a 100 ad intervalli di 5) e per ciascuno di tali valori si calolerà l'integrale e l'errore relativo definito come:

$$\varepsilon = \left| \frac{I_{Tp} - I_{es}}{I_{es}} \right|$$

$I_{Tp}$  = Integrale calcolato con il metodo dei Trapezi

$I_{es} = 3.29744254140026 \dots$  Valore esatto dell'integrale

Si ottiene:

---

<sup>1</sup>Riportato per intero in Appendice

Metodo dei Trapezi			
$I_{es} = 3.29744254140026 \dots$			
$n$	$I_{Tp}$	$\varepsilon \cdot 10^3$	$\frac{1}{n^2}$
10	3.29991193236723	0.74888066614491	0.01000000000000
15	3.29854009223795	0.33284911682675	0.00444444444444
20	3.29805992235856	0.18723023996805	0.00250000000000
25	3.29783766776479	0.11982812727401	0.00160000000000
30	3.29771693567136	0.08321426913713	0.00111111111111
35	3.29764413761762	0.06113714335535	0.00081632653061
40	3.29759688871603	0.04680818963135	0.00062500000000
45	3.29756449494971	0.03698428340221	0.00049382716049
50	3.29754132384181	0.02995728972099	0.00040000000000
55	3.29752417982236	0.02475810300935	0.00033057851240
60	3.29751114037815	0.02080369165941	0.00027777777778
65	3.29750099261759	0.01772622770471	0.00023668639053
70	3.29749294067597	0.01528435297343	0.00020408163265
75	3.29748644477761	0.01331437221468	0.00017777777778
80	3.29748112835897	0.01170208676109	0.00015625000000
85	3.29747672224003	0.01036586364846	0.00013840830450
90	3.29747302986863	0.00924609541878	0.00012345679012
95	3.29746990501425	0.00829843542268	0.00011080332410
100	3.29746723706380	0.00748933854945	0.00010000000000

Si osserva che il rapporto

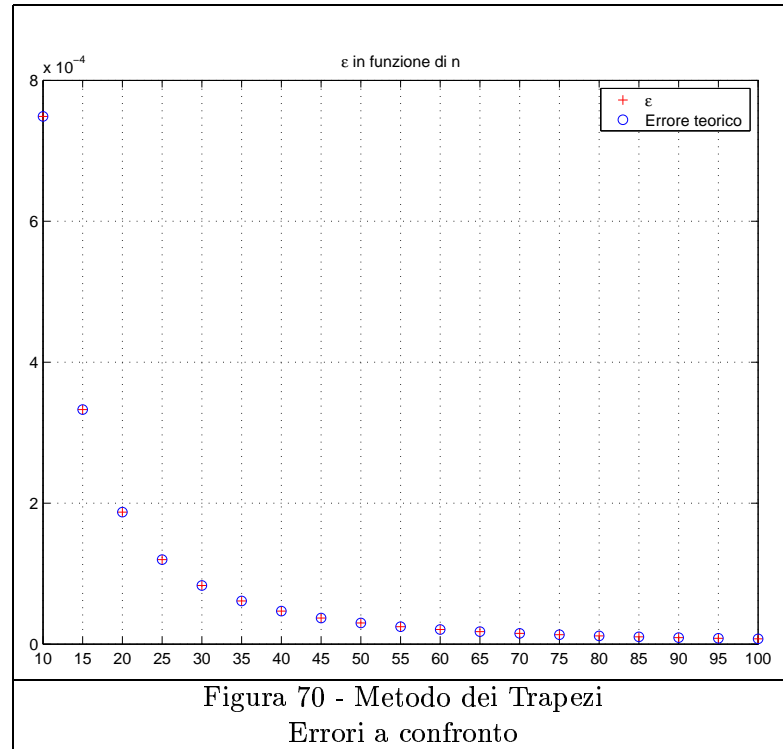
$$\frac{\varepsilon(n)}{\frac{1}{n^2}} = C = 0.0749 \quad (\text{Costante})$$

quindi si può affermare che:

$$\varepsilon(n) = \frac{C}{n^2} = \frac{0.0749}{n^2}$$

Ciò lo si evince anche dal grafico seguente:





Questo conferma il fatto che il metodo dei trapezi è convergente con legge

$$\varepsilon(n) \propto \frac{1}{n^2}$$

quindi per guadagnare di un fattore 100 in precisione, è sufficiente aumentare di un fattore 10 il numero di intervalli.

### 5.3 Metodo Montecarlo

Questo metodo consiste nell'applicare il teorema noto come **Legge dei grandi numeri**, il quale afferma che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

dove  $x_i$  è una variabile casuale con distribuzione opportuna. Dalla precedente relazione, si ricava:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

Se consideriamo, non la serie infinita, ma quella arrestata ad un certo  $N$  si può affermare che il numero

$$I_{MC}(N) = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

rappresenta un estimatore del numero

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

tanto più  $N$  è elevato e minore sarà la differenza tra  $I$  ed  $I_{MC}$ .  
Si eseguirà il calcolo dell'integrale con due differenti approcci al metodo Montecarlo:

1. Con  $x_i$  distribuita uniformemente in  $[a, b]$ .
2. Con  $x_i$  distribuita secondo una funzione  $g(x) \simeq f(x)$ .

### 5.3.1 Distribuzione Uniforme

Sia data una variabile aleatoria  $R$  distribuita uniformemente in  $[0, 1]$ ; si vuole che  $x$  sia distribuita uniformemente in  $[a, b]$ , quindi si pone:

$$x = R \cdot (b - a) + a$$

Fissato  $N$  si eseguono  $M$  set di estrazioni:

$$\begin{array}{ll} 1) & x_1, x_2, x_3, \dots x_N \\ 2) & x_1, x_2, x_3, \dots x_N \\ 3) & x_1, x_2, x_3, \dots x_N \\ \dots & \dots \\ M) & x_1, x_2, x_3, \dots x_N \end{array}$$

Come nel caso precedente (Metodo dei Trapezi) si definisce l'errore relativo:

$$\varepsilon = \left| \frac{I_{MC} - I_{es}}{I_{es}} \right|$$

dove si ricorda  $I_{es} = 3.29744254140026 \dots$

Per ogni set di estrazioni, si ottiene un valore di  $I_{MC}(k)$  e quindi un valore di  $\varepsilon(k)$  con  $k = 1, 2, 3, \dots, M$ .

I numeri  $x_i$  sono casuali, quindi i valori  $I_{MC}(k)$ ,  $\varepsilon(k)$  avranno delle fluttuazioni, quindi si avranno i valori medi  $\bar{I}_{MC}$ ,  $\bar{\varepsilon}$  e le relative varianze  $\sigma_{I_{MC}}^2$  e  $\sigma_{\varepsilon}^2$ :

$$\bar{I}_{MC} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M I_{MC}(k)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \varepsilon(k)$$

$$\sigma_{I_{MC}}^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M (I_{MC}(k) - \bar{I}_{MC})^2$$

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M (\varepsilon(k) - \bar{\varepsilon})^2$$

Tutti i calcoli sono stati effettuati mediante il listato MATLAB denominato 'MC1.m' (riportato in Appendice); si è scelto  $N$  variabile da 2 a  $10^6$  nel seguente modo:

per	$N$ vale:
$2 \leq N \leq 10$	$N = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$
$20 \leq N \leq 100$	$N = 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100$
$200 \leq N \leq 1000$	$N = 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000$
$2000 \leq N \leq 10000$	$N = 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000$
$20000 \leq N \leq 100000$	$N = 2 \cdot 10^4, 3 \cdot 10^4, 4 \cdot 10^4, 5 \cdot 10^4, 6 \cdot 10^4, 7 \cdot 10^4, 8 \cdot 10^4, 9 \cdot 10^4, 10^5$
$2 \cdot 10^5 \leq N \leq 10^6$	$N = 2 \cdot 10^5, 3 \cdot 10^5, 4 \cdot 10^5, 5 \cdot 10^5, 6 \cdot 10^5, 7 \cdot 10^5, 8 \cdot 10^5, 9 \cdot 10^5, 10^6$

Per ciascun valore di  $N$  si fanno  $M = 40$  estrazioni indipendenti

**Osservazione**

*E' interessante determinare il numero  $E$  di estrazioni casuali effettuato; si ha che:*

$$E = 2 \cdot M + 3 \cdot M + 4 \cdot M + 5 \cdot M + \dots + 20 \cdot M + 30 \cdot M + \dots + 200 \cdot M + 300 \cdot M + \dots + 10^6 \cdot M$$

*Si indica con*

$$S_0 = M \cdot \sum_{i=2}^{10} i = 54 \cdot M$$

$$S_1 = 10 \cdot S_0$$

$$S_2 = 100 \cdot S_0$$

...

$$S_{N-1} = 10^{N-1} \cdot S_0$$

*Allora si ha che*

$$E = \sum_{k=0}^{N-1} S_k = \sum_{k=0}^{N-1} 10^k \cdot S_0 = \sum_{k=0}^{N-1} 10^k \cdot M \cdot \sum_{i=2}^{10} i = 54 \cdot M \cdot \sum_{k=0}^{N-1} 10^k$$

*Nel nostro caso  $N = 10^6$  ed  $M = 40$ , quindi*

$$E = 239.999.760 \text{ estrazioni}$$

Si avvia il programma di calcolo e si ottiene:

$$I_{MC} = 3.29746675306115$$

$$\sigma_{I_{MC}} = 1.613816454986050 \cdot 10^{-4}$$

Il  $\sigma_{I_{MC}}$  esprime la S.D.O.M. relativa al calcolo dell'integrale, effettuando  $M = 40$  estrazioni con  $N = 10^6$ :

$$\sigma_{I_{MC}} = \frac{\sigma}{\sqrt{M}} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M (I_k - \bar{I}_{MC})^2}$$

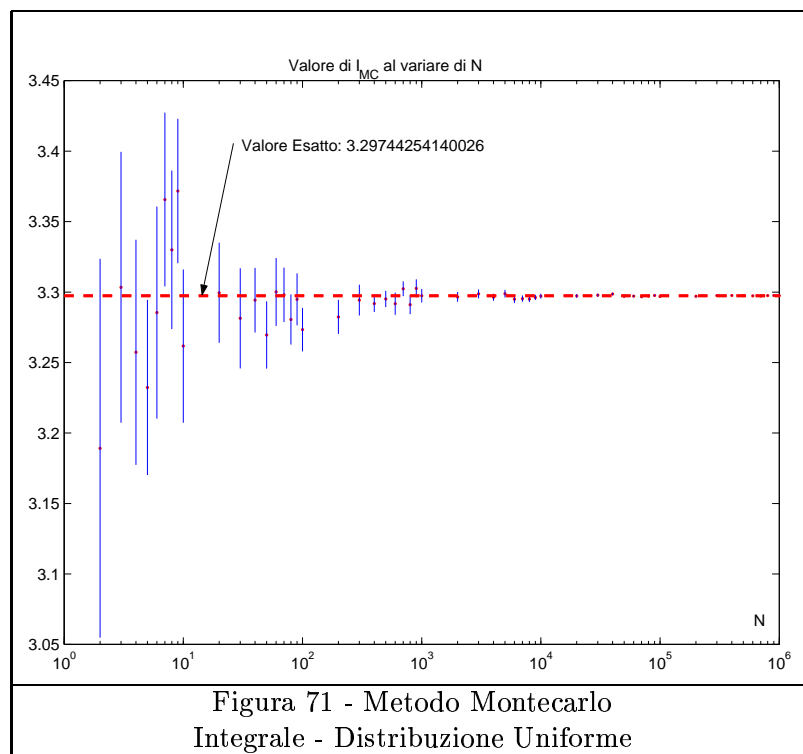
Quindi si può dire che:

$$I_{MC} = 3.2975 \pm 0.0002$$

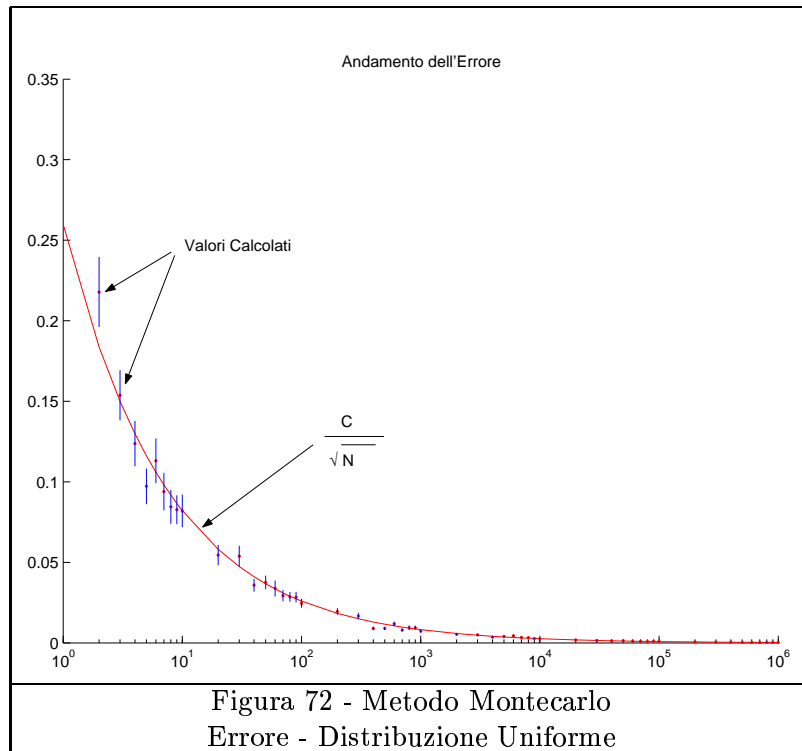
Si ricordi il valore esatto dell'integrale:

$$I_{es} = 3.29744254140026 \dots$$

Si riportano i seguenti grafici:



**Le barre verticali rappresentano le incertezze**



Per quanto riguarda l'ultima figura, si osserva il grafico della funzione  $\frac{C}{\sqrt{N}}$ ; la costante  $C$  è stata calcolata nel seguente modo:  
si è ipotizzato che l'andamento dell'errore ( $\varepsilon$ ) sia del tipo

$$\frac{1}{\sqrt{N}}$$

quindi il rapporto tra i valori di  $I_{MC}(N)$  ed i corrispondenti valori della funzione  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ , deve essere costante.

In realtà i valori  $I_{MC}(N)$  calcolati derivano dal campionamento di variabili casuali, per cui fluttuano; si è ritenuto opportuno considerare la media di tali rapporti:

$$C = 0.259759$$

Utilizzando il già citato pacchetto **cftool** di MATLAB si ottiene:

Linear model:

$$f(x) = c \cdot 1/\sqrt{x} + d$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$c = 0.2675 \quad (0.258, 0.2769)$$

$$d = -0.0008803 \quad (-0.002771, 0.001011)$$

Goodness of fit:

SSE: 0.00175

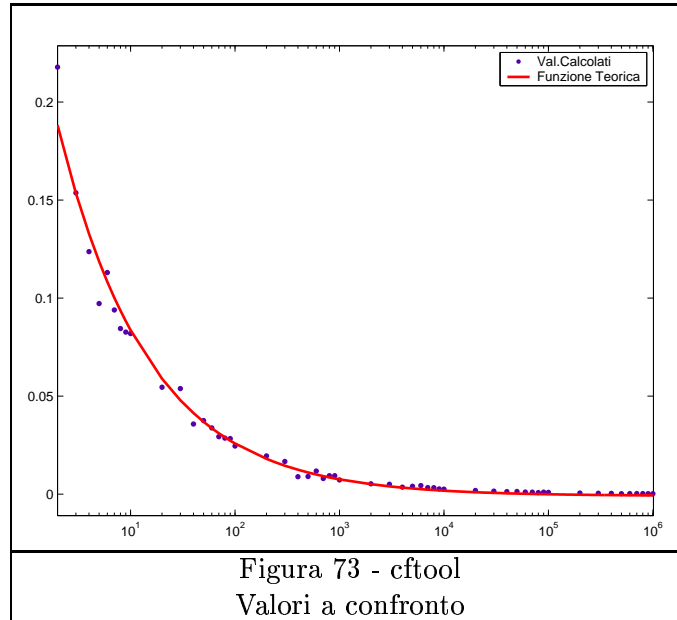
R-square: 0.984

Adjusted R-square: 0.9837

RMSE: 0.005802

ovvero:

$$0.258 \leq C \leq 0.2769$$



Non si ritiene indispensabile una più approfondita analisi per poter affermare che l'errore relativo segue la legge:

$$\varepsilon \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$$

### 5.3.2 Distribuzione Simile

Nei precedenti calcoli si è assunta, come distribuzione delle  $x$ , quella uniforme nell'intervallo di integrazione  $[a, b]$ ; è dimostrato che la scelta della distribuzione uniforme non è la migliore sotto il profilo della velocità di convergenza: la scelta migliore della distribuzione  $g(x)$  della variabile aleatoria  $x$  è quella per la quale

$$g(x) \propto |f(x)|$$

Consideriamo la retta passante per i punti

$$[a, f(a)] \quad [b, f(b)]$$

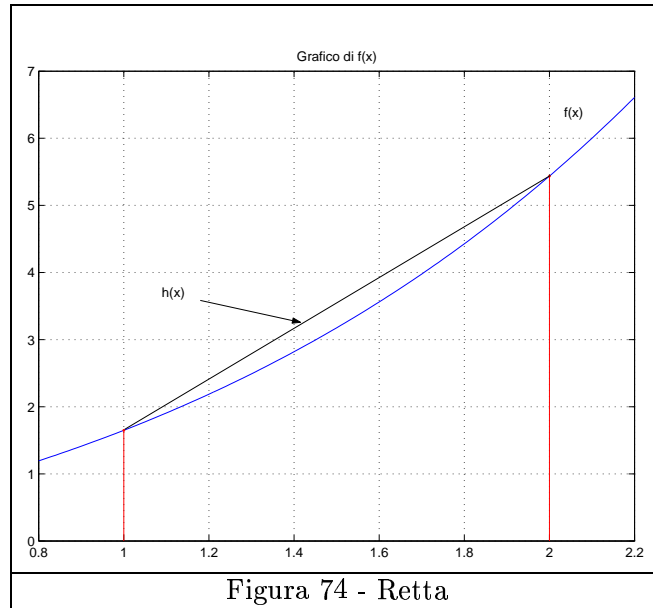


Figura 74 - Retta

tale retta ha equazione  $y = m \cdot x + q$  dove il coefficiente angolare, e l'intercetta si ottengono risolvendo il semplice sistema:

$$\begin{cases} m \cdot a + q = f(a) \\ m \cdot b + q = f(b) \end{cases}$$

Si vuole determinare l'espressione della distribuzione in modo che “assomigli” il più possibile ad  $f(x)$ ; tuttavia la funzione definita nel seguente modo:

$$h(x) = \begin{cases} m \cdot x + q & \text{per } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{per } x < 1 \text{ oppure } x > 2 \end{cases}$$

Non può essere associata ad una distribuzione, infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx \neq 1$$

è, quindi, necessario normalizzare  $h(x)$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{A} dx = \int_a^b \frac{h(x)}{A} dx = 1 \Rightarrow$$

$$A = \frac{m}{2}(b^2 - a^2) + q(b - a)$$

La funzione

$$g(x) = \frac{h(x)}{A} = \frac{m \cdot x + q}{A}$$

è la distribuzione cercata!

Si applica il metodo della Trasformazione Inversa per determinare l'espressione della  $x$ , distribuita secondo  $g(x)$ ; sia  $R$  una variabile aleatoria, con distribuzione uniforme in  $[0, 1]$ :

$$R = \int_a^x g(t) dt = \int_a^x \frac{m \cdot t + q}{A} dt \Rightarrow$$

$$R = \frac{m}{2A}x^2 + \frac{q}{A}x - \frac{\frac{ma^2}{2} + q \cdot a}{A} \Rightarrow$$

$$\frac{m}{2A}x^2 + \frac{q}{A}x - \left( \frac{\frac{ma^2}{2} + q \cdot a}{A} + R \right) = 0$$

Si pone

$$\begin{cases} \alpha = \frac{m}{2A} \\ \beta = \frac{q}{A} \\ \gamma = - \left( \frac{\frac{ma^2}{2} + q \cdot a}{A} + R \right) \end{cases}$$

Quindi l'equazione diventa:

$$\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0 \quad \text{la cui soluzione è notoriamente:}$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha \cdot \gamma$$

Verrà presa in considerazione la sola

$$x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

in quanto sempre positiva.

**Al variare di  $R \in [0, 1]$   $x$  varia tra  $[1, 2]$  ed è distribuita secondo  $g(x)$ .**

In questo caso, la **legge dei grandi numeri** afferma che:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{g(x_i)} = \int_a^b f(x) dx$$

Tutte le precedenti considerazioni sono contenute nel listato MATLAB denominato 'MC2.m' (anch'esso riportato in Appendice); si pone ancora una volta  $N = 10^6$  ed  $M = 40$ , si avvia tale programma, e si ottiene:

$$I_{MC} = 3.29742877185384$$

$$\sigma_{I_{MC}} = 2.035057548103963e - 005$$

Quindi si può dire che

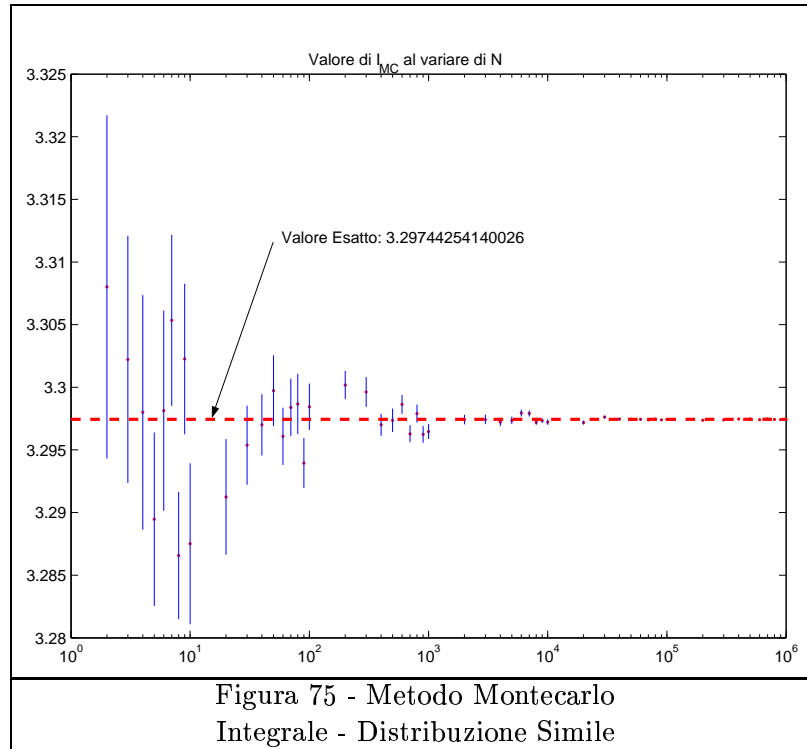
$$I_{MC} = 3.29743 \pm 0.00002$$



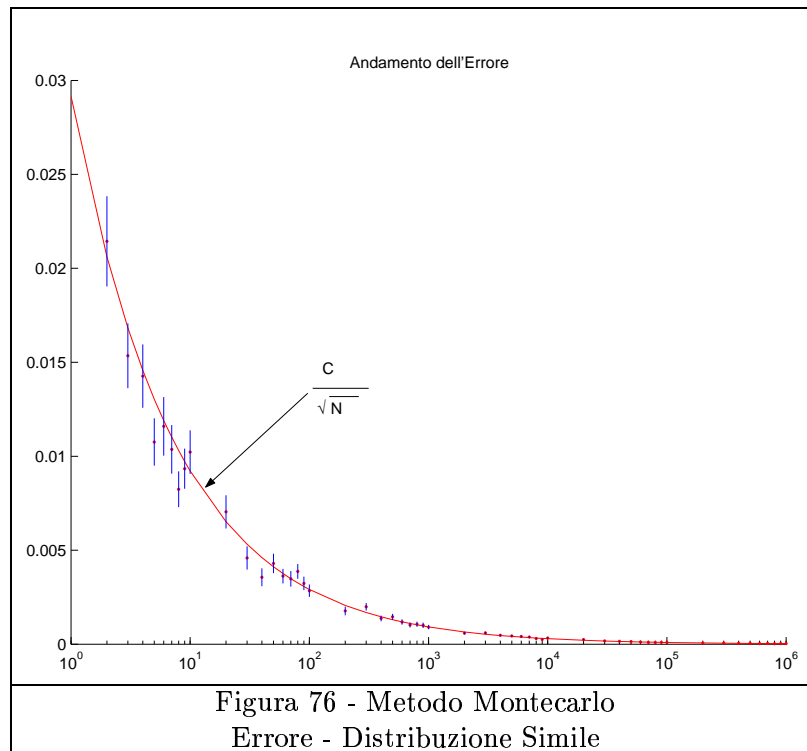
Si ricordi il valore esatto dell'integrale  $I_{es} = 3.29744254140026 \dots$

Si noti come si sia guadagnato un fattore 10 lasciando inalterato il numero  $N$ ; il lato negativo di questo metodo, rispetto al precedente, è il tempo di calcolo più prolungato, dovuto al maggior onere computazionale.

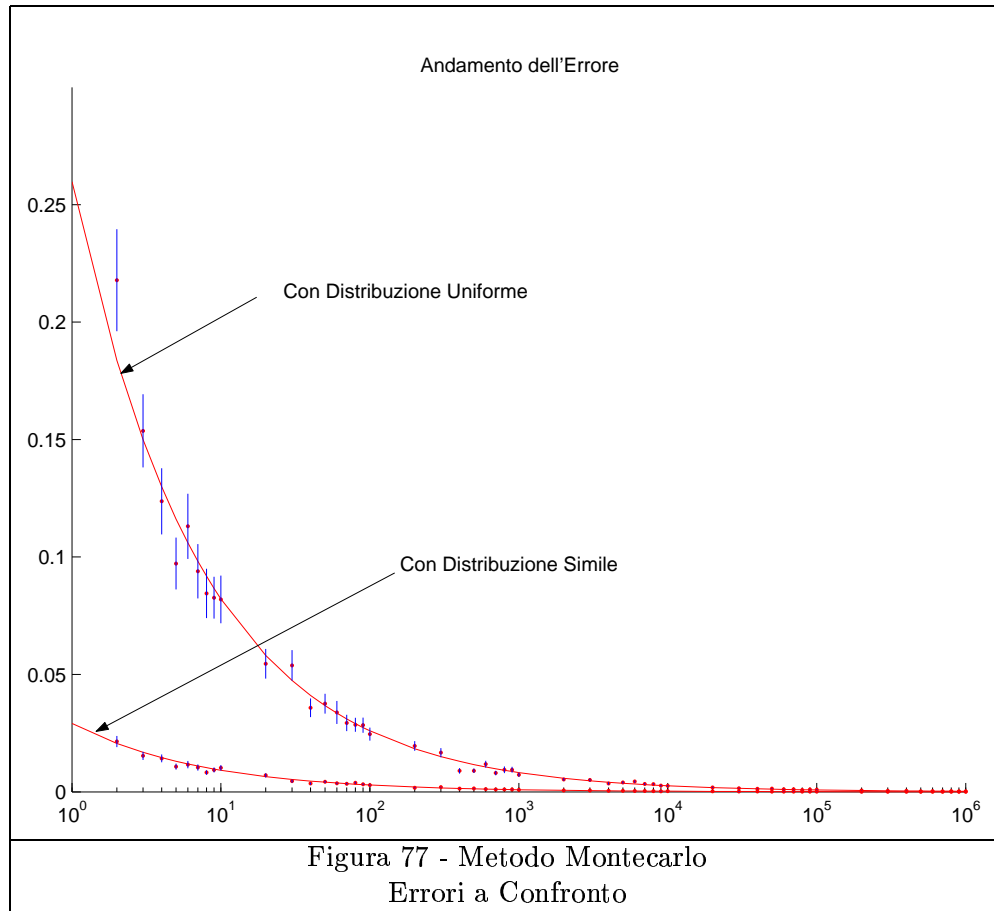
Come al caso precedente si riportano i seguenti grafici:



**Le barre verticali rappresentano le incertezze**



Si osservi l'andamento dell'errore relativo che ancora una volta segue la legge<sup>2</sup>  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ , ma si faccia particolarmente attenzione ai valori che esso assume!



### 5.3.3 Determinazione di N

Come ultima analisi del metodo Montecarlo, si propone un algoritmo in grado di determinare il numero minimo  $N$  di estrazioni della variabile pseudocasuale, tale che l'errore relativo non superi un certo valore preimpostato  $\varepsilon^*$ .

Abbiamo precedentemente osservato che se la distribuzione della variabile  $x$  è 'simile' all'andamento della funzione  $|f(x)|$ , la convergenza del metodo di calcolo è più rapida; quindi useremo i risultati di tale scelta in quest'ultima trattazione.

L'algoritmo si basa sull'osservazione che l'andamento dell'errore  $\varepsilon$  è una funzione di  $n$ , del tipo:

$$\varepsilon(n) = \frac{C}{\sqrt{n}}$$

Quindi è evidente che, se si conoscesse il valore di  $C$ , basterebbe applicare la formula inversa per stimare tale valore minimo di  $n$ :

$$N_{min} = \left( \frac{C}{\varepsilon^*} \right)^2$$

L'idea è quella di fissare un certo numero (più piccolo possibile) di estrazioni della variabile pseudocasuale  $x$ , quindi determinare, con il metodo dei minimi quadrati, il valore di  $C$ .

<sup>2</sup>La costante  $C$  è calcolata nella solita maniera

Fissiamo:

$$N = 100$$

e per ciascun  $N$  si eseguono  $M$  set di estrazioni, dove si pone:

$$M = 10$$

In totale si eseguiranno

$$\sum_{k=1}^N M \cdot k = M \cdot \sum_{k=1}^N k = \frac{M \cdot N \cdot (N + 1)}{2} = 50500$$

estrazioni della variabile pseudocasuale.

Per ogni valore di  $N$ , si avrà un valor medio di  $\bar{\varepsilon}_n$  ed una varianza  $\sigma_n^2$ .

Considerando che la funzione che esprime l'andamento teorico di tale errore è, come si è visto,  $f(n) = \frac{C}{\sqrt{n}}$ , si ha che:

$$\chi^2 = \sum_{n=1}^N \left( \frac{\bar{\varepsilon}_n - f(n)}{\sigma_n} \right)^2 = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2} \left( \bar{\varepsilon}_n - \frac{C}{\sqrt{n}} \right)^2$$

$$\frac{d(\chi^2)}{dC} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2} \left( \bar{\varepsilon}_n - \frac{C}{\sqrt{n}} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{\bar{\varepsilon}_n}{\sigma_n^2} - C \cdot \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sigma_n^2} = 0 \Rightarrow$$

$$C = \frac{\sum_{n=1}^N \frac{\bar{\varepsilon}_n}{\sigma_n^2}}{\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sigma_n^2}}$$

Il seguente listato MATLAB (denominato 'MC3.m') esegue le suddette operazioni:

```
%Metodo Montecarlo
%Determinazione di N con epsilon fissato
%(by Andrea Praticò 2004)

a=1;
b=2;

Ies=2*exp(0.5); %Valore esatto dell'integrale

epsilon=1e-4; %Errore Relativo Fissato ad Arbitrio
N=100; %Numero massimo estrazioni di R
M=10; %Numero dei set di estrazione
```

```

if epsilon>1
    epsilon=1; %Errore massimo 100%
end

%Calcolo dei parametri della distribuzione
f1=exp(1/2);
f2=2*exp(1);
A=[1 1;2 1];

Sol=A^(-1)*[f1;f2];

m=Sol(1);
q=Sol(2);

AA=(m/2*b^2+q*b-m/2*a^2-q*a);

alfa=(m/2)/AA;
beta=q/AA;

for n=1:N
    for i=1:M
        R=rand(1,n);
        gamma=-((m/2+q)/AA+R);
        Delta=beta^2-4*alfa.*gamma;
        x=(-beta+sqrt(Delta))/(2*alfa);
        y1=x.*exp(x./2);
        y2=(m*x+q)/AA;
        y=y1./y2;
        I=1/n*sum(y);
        epsilonmc(i)=abs((I-Ies)/Ies);
    end
    yy(n)=mean(epsilonmc); %Media
    s(n)=std(epsilonmc); %Deviaz.Standard
end

n=1:1:N;
vett1=yy./(s.^2);
vett2=1./(sqrt(n).*(s.^2));

C=sum(vett1)/sum(vett2);

plot(n,yy,'.');
hold on;
plot(n,C./sqrt(n),'r');
hold off;

%Numero minimo maggiorato del 30%
Nmin=floor(1.3*(C/epsilon)^2)

```

Trattando valori casuali, è inevitabile che si presentino delle fluttuazioni dei valori

calcolati, per questo si ritiene opportuna una correzione del 30% del valore di  $N_{min}$  calcolato con la funzione inversa (ciò spiega la presenza del fattore 1.3 nel calcolo di  $N_{min}$ ).

Per verificare i risultati si eseguono i calcoli relativi ad i seguenti valori di  $\varepsilon^*$ :

$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
-----------	-----------	-----------

Per ogni valore dell'errore fissato si eseguono 10 esecuzioni del programma MC3.m:

	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$
1	8	1039	83407
2	9	956	96311
3	8	868	85716
4	8	852	74993
5	10	911	85463
6	9	961	85884
7	8	1005	73198
8	8	961	91396
9	7	950	84893
10	9	928	93585
<b>Media</b>	<b>8.4</b>	<b>943</b>	<b>85485</b>

Si considerano, quindi, valori di  $N$  leggermente superiori a quelli determinati, e con l'ausilio del listato MC2 si ottiene:

	$N = 10$	$N = 1000$	$N = 90000$
$\varepsilon$	$6.25 \times 10^{-3}$	$6.48 \times 10^{-4}$	$5.39 \times 10^{-5}$

Resta verificato che per valori di  $N$  superiori a quelli indicati, l'errore relativo non supera quello prefissato; è ovvio che tale metodo per la determinazione dell' $N$  minimo presuppone che si conosca il valore esatto dell'integrale; non può essere usato nel caso in cui esso non si conosca.

Tale algoritmo di calcolo, quindi, ha validità esclusivamente didattica.

(Stesura completata in data 07/01/2004)

## Appendice A

# Forma d'Onda di Tensione

La forma d'onda riportata a pag. 19 è stata ottenuta con l'ausilio di un programma costruito con Labview. Tale programma permette di costruire un segnale affetto da distorsione, dosando in tempo reale, le ampiezze e le fasi di ogni singola armonica. Si riporta l'interfaccia utente del suddetto programma:

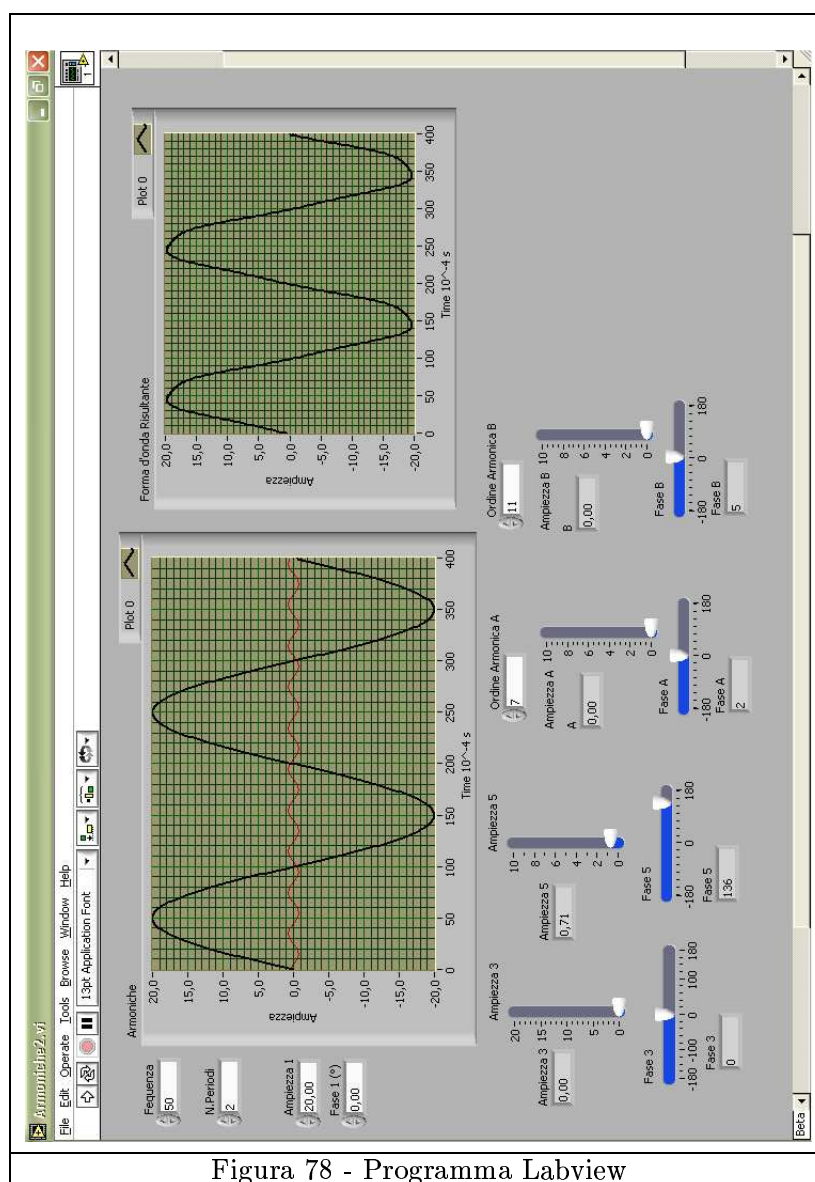


Figura 78 - Programma Labview

Per ottenere il segnale di tensione non si è fatta, ovviamente, un'analisi armonica, ma piuttosto si è cercato di ricrearlo per similitudine, ovvero si è cercato di riprodurre la forma d'onda osservata sul monitor dell'oscilloscopio.

Si è osservato che, agendo sui cursori di regolazione di ampiezza e fase della terza armonica non si riusciva a ricreare la forma voluta; quindi si è azzerata la terza armonica e si è provato con la quinta<sup>1</sup> ottenendo una forma molto vicina all'originale.

Per questo motivo si ritiene che il segnale di tensione osservato sia affetto prevalentemente da quinta armonica, mentre la terza e tutte le altre hanno un'influenza marginale. Ottenuti i valori di ampiezza e fase dell'armonica, si è usato MATLAB per plottare il segnale; quindi si è riportato il grafico sullo sfondo rappresentativo del display dell'oscilloscopio (operazione di copia - incolla, eseguita con Paint Shop Pro).

Appare evidente la scarsità di precisione nel metodo adottato, sarebbe più opportuna un'analisi armonica che comunque esula dallo scopo della trattazione.

---

<sup>1</sup>Naturalmente si sono utilizzate esclusivamente armoniche dispari, in quanto trattasi di segnale alternativo, e quindi privo di armoniche di indice pari.

## Appendice B

# Simulazione Scarica del Condensatore

### B.1 Con Resistenza da $330\Omega$

Mediante il programma OrCAD Capture si esegue una simulazione del circuito di misura:

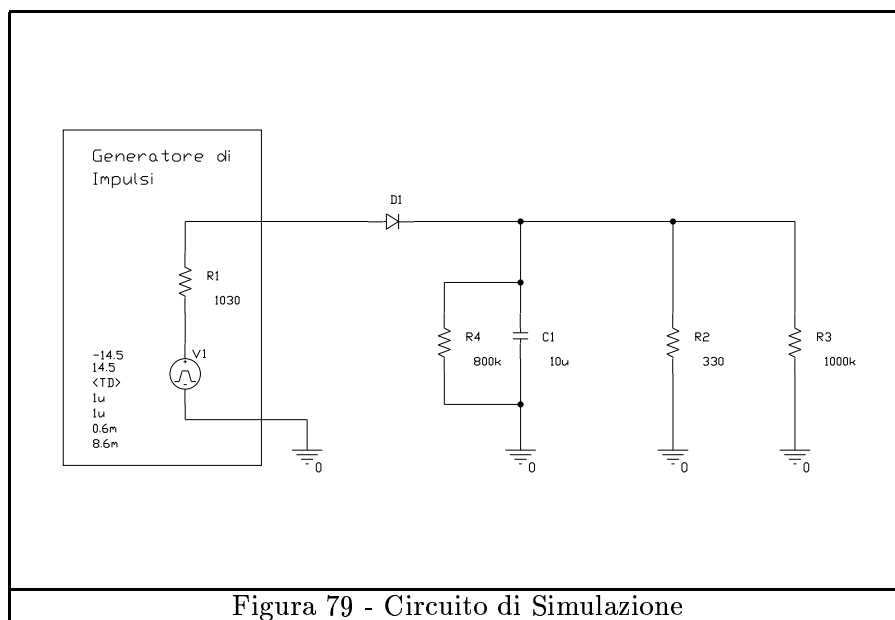


Figura 79 - Circuito di Simulazione

nel quale i vari componenti hanno il seguente significato:

$R_1$  Resistenza Interna del Generatore di impulsi.

$V_1$  Generatore di Impulsi, i cui parametri sono:

- Tensione di picco negativa (V1):  $-14.5\text{ V}$
- Tensione di picco positiva (V2):  $14.5\text{ V}$
- Delay Time (TD):  $0\text{ s}$
- Tempo di Salita (TR):  $1\text{ }\mu\text{s}$
- Tempo di Discesa (TF):  $1\text{ }\mu\text{s}$
- Durata dell'impulso positivo (PW):  $0.6\text{ ms}$
- Periodo del Segnale (PER):  $8.6\text{ ms}$

$D_1$  Diodo, si è utilizzato il modello 1N4148.



$C_1$  Condensatore da  $10\ \mu\text{F}$ .

$R_4$  Resistenza di Dispersione del Condensatore, assunta uguale a  $800\ \text{k}\Omega$ .

$R_2$  Resistenza da  $330\ \Omega$  (Carico).

$R_2$  Resistenza Interna dell'oscilloscopio  $1\ \text{M}\Omega$  (Valore fornito dal costruttore dello strumento (TEKTRONIX 2205)).

La tensione a vuoto, fornita dal generatore di impulsi, ha il seguente andamento:

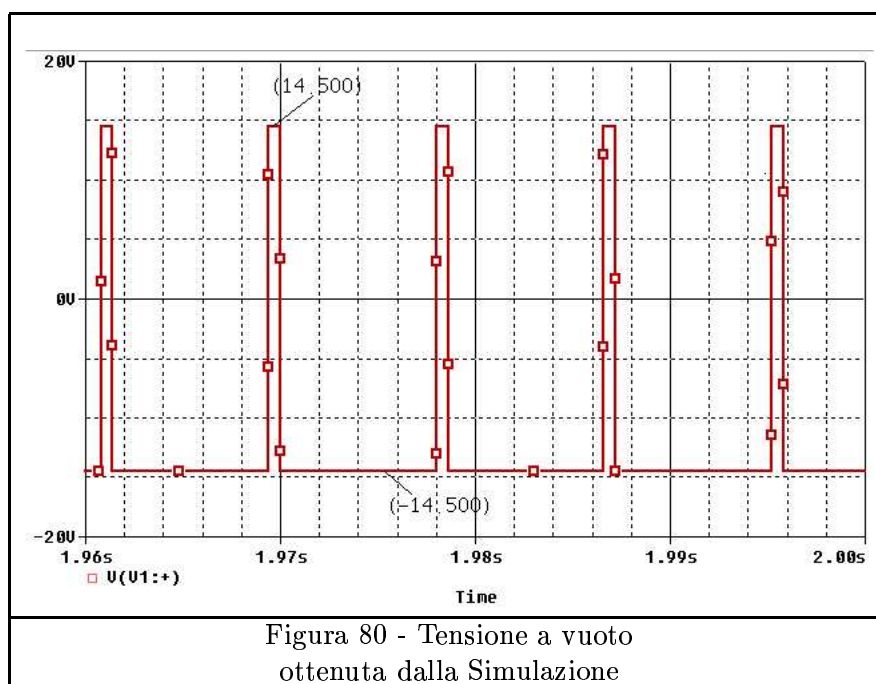


Figura 80 - Tensione a vuoto  
ottenuta dalla Simulazione

Avviando la simulazione, con un intervallo di tempo di osservazione pari a  $[1960; 2000]$  ms (tale scelta dell'intervallo di osservazione è stata fatta per evitare di visualizzare fasi transitorie), si ottiene:

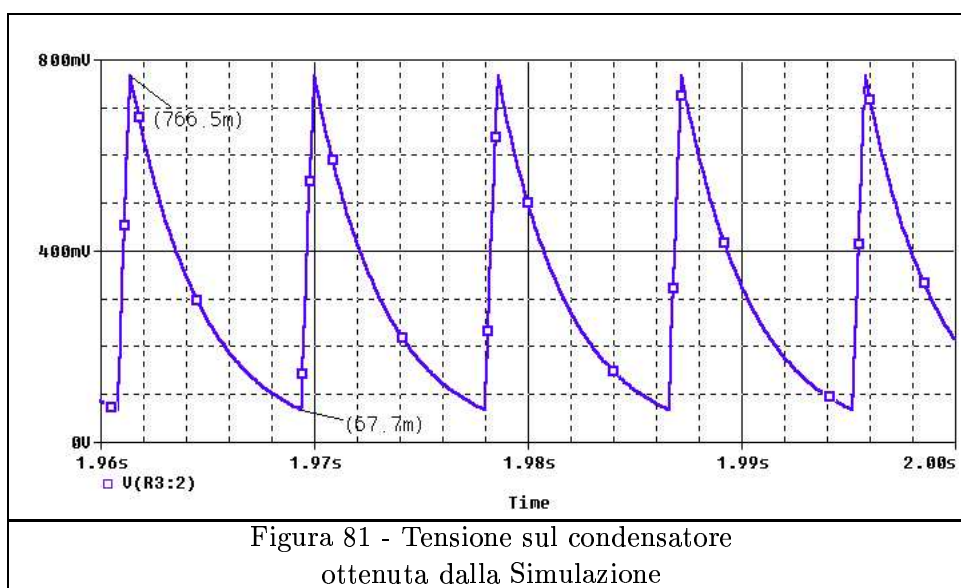
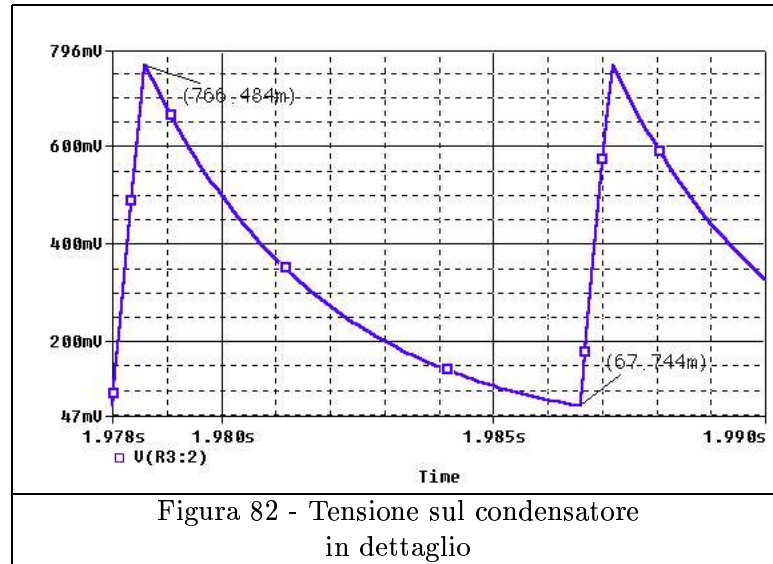


Figura 81 - Tensione sul condensatore  
ottenuta dalla Simulazione

Particolare attenzione meritano i valori di picco ed il valor minimo della tensione ai capi del condensatore (entrambi riportati sul grafico):



$$V_{max} = 766.5 \text{ mV} \quad V_{min} = 67.7 \text{ mV}$$

mentre i corrispondenti valori misurati<sup>1</sup> sono:

$$V_{Cmax} = 760 \pm 10 \text{ mV} \quad V_{Cmin} = 70 \pm 10 \text{ mV}$$

Ci sono dei validi motivi per ritenere valido il modello utilizzato per la simulazione.

### Osservazione

Data l'attendibilità del modello utilizzato, si può stimare la resistenza interna del generatore di impulsi, pari a

$$R_{int} \simeq 1 \text{ k}\Omega$$

essendo quella usata per la simulazione pari a  $R_1 = 1030 \text{ }\Omega$ .

Può apparire, a prima vista, eccessivo il valore stimato della resistenza interna: di solito per un generatore di tensione ci si aspetta valori "bassi" di resistenza (al massimo qualche Ohm).

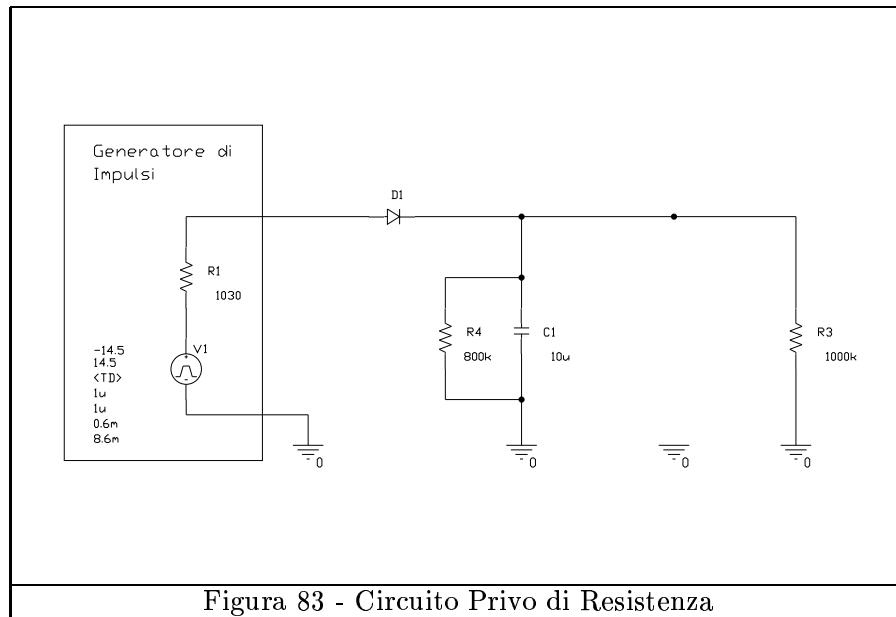
Tuttavia ciò trova una spiegazione plausibile: il generatore di impulsi da noi utilizzato, non è progettato per erogare potenze sostenute, ma prevalentemente, è un generatore di segnale; quindi le correnti che lo interessano sono, al più, dell'ordine di qualche mA. Appare evidente quanto, entro questi limiti, le cadute su  $R_{int}$  siano esigue. Detto ciò ci si può chiedere per quale motivo, comunque, il costruttore del generatore non imponga una resistenza di valore basso!

Il motivo di una tale scelta è legato alla protezione del generatore stesso; infatti in caso di sovraccarico, o peggio di cortocircuito ai morsetti, l'unica impedenza che limita la corrente nel circuito è proprio la  $R_{int}$ : maggiore è il suo valore minore sarà la corrente di cto-cto. Per contro, un valore eccessivo produrrebbe un'eccessiva c.d.t., quindi è necessario trovare una via di mezzo che assicuri il corretto funzionamento ed un'adeguata protezione.

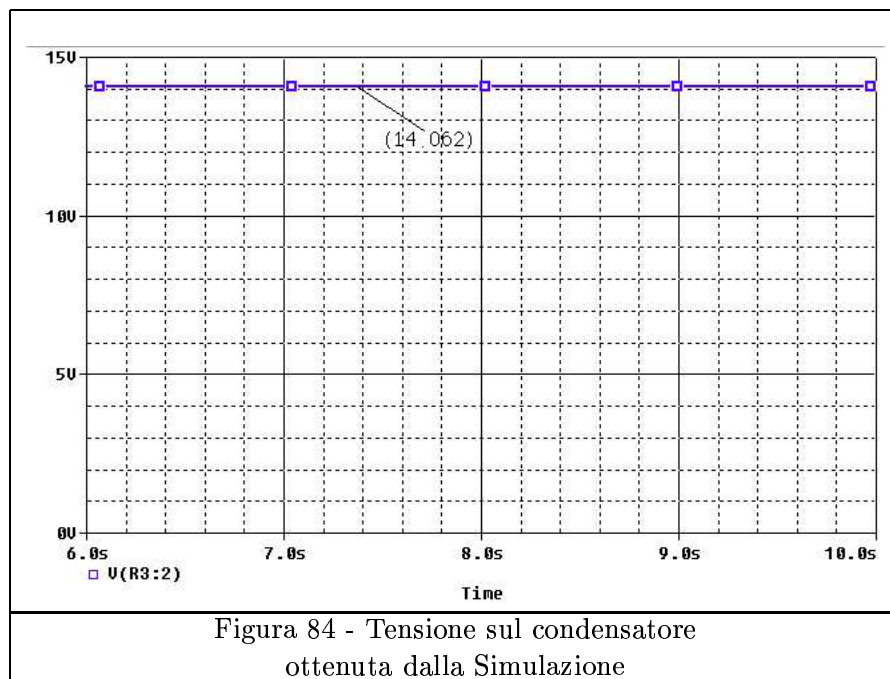
## B.2 Senza Resistenza da 330 $\Omega$

Proviamo a simulare il circuito privo della resistenza  $R = 330\Omega$ .

<sup>1</sup> Vedi pag. 27



Dopo un intervallo di tempo opportuno si ottiene:



La tensione risulta essere costante (considerando trascurabile la carica che passa attraverso la resistenza di dispersione, e quella interna dell'oscilloscopio), e di valore pari a:

$$V_{max} = 14.06 \text{ V}$$

mentre il valore misurato a suo tempo<sup>2</sup> è:

$$V_C = 13.0 \pm 0.7 \text{ V}$$

<sup>2</sup>Vedi pag.28

## Appendice C

# Algoritmo del FIT Lineare

Quello che segue è il listato MATLAB, che esegue il calcolo del FIT Lineare:

```
%FIT Lineare (by Andrea Praticò 2003)

%Costanti Strumentali
KV=0.1;      %V/div
KT=1;        %ms/div

%Divisioni Lette
divx=[1 2 3 4 5 6 7 8 8.8];      %Asse Orizzontale (div)
divy=[7.6 5.6 4.0 3.0 2.2 1.8 1.2 1.0 0.8]; %Asse Verticale (div)

x=divx*KT;    %Asse Orizzontale (ms)
y=divy*KV;    %Asse Orizzontale (V)

sigmax=KT/10; %Incertezza sul tempo (in ms)
sigmay=KV/10; %Incertezza sulla Tensione (in V)

%LINEARIZZAZIONE
y1=log(y);
sigmay1=sigmay./y;

%Metodo dei Minimi quadrati
sig2=sigmay1.^2;
sig1=1./sig2;
S1=sum(sig1);
Sx=sum(x.*sig1);
Sxx=sum((x.^2).*sig1);
Sy=sum(y1.*sig1);
Sxy=sum((x.*y1).*sig1);

A=[S1,Sx;Sx,Sxx];
B=[Sy;Sxy];
Sol=A^(-1)*B;

a1=Sol(1);

sigmaa1=sqrt(Sxx/(det(A))); %Incertezza su a1
```

```

a=exp(a1);
b=Sol(2);

tau=-1/b;                %Costante di Tempo (in ms)

sigmaa=a*sigmaa1;        %Incertezza su a
sigmab=sqrt(S1/(det(A))); %Incertezza su b

cov=-Sx/(det(A));        %Covarianza

aa=[a];
bb=[b];
sig3=[sigmaa];           %Per plottare il sigmaa
sig4=[sigmaa1];          %Per plottare il sigmaa1
sig5=[sigmab];           %Per plottare il sigmab
cov1=[cov];              %Per plottare la Covarianza

%Rappresentazione Grafica
figure;
t=0:0.01:max(x);         %t in ms
v=a*exp(b*t);            %Andamento teorico
plot(t,v,'b');
TITLE('FIT Lineare');
XLABEL('Tempo in ms');
YLABEL('Tensione in V');
AXIS([0 9 0 1.1])
text(0,a,['\leftarrow',num2str(a),' V'],'FontSize',12);
grid on;
hold on;
barra(x,y,sigmax,sigmay);
LEGEND('Valori Teorici','Dati Sperimentali');
hold off;

```

La funzione `barra(x,y,sigmax,sigmay)` esegue il plottaggio dei punti sperimentali, indicando, mediante delle barre, le relative incertezze; il listato è il seguente:

```

function barra=caz(x,y,dx,dy)

plot(x,y,'.r');
nn=max(size(x));

for i=1:nn
line([x(i)-dx x(i)+dx],[y(i) y(i)],'Color','r');
line([x(i)-dx x(i)-dx],[y(i)-dy/2 y(i)+dy/2],'Color','r');
line([x(i)+dx x(i)+dx],[y(i)-dy/2 y(i)+dy/2],'Color','r');

line([x(i) x(i)],[y(i)-dy y(i)+dy],'Color','r');
line([x(i)-dx/2 x(i)+dx/2],[y(i)+dy y(i)+dy],'Color','r');
line([x(i)-dx/2 x(i)+dx/2],[y(i)-dy y(i)-dy],'Color','r');
end

```

## Appendice D

# Algoritmo del FIT Iterativo

Quello che segue è il listato MATLAB, che esegue il calcolo del FIT Iterativo: la variabile  $p$  è equivalente all' $\varepsilon$ , ovvero esprime la precisione.

Il listato, necessita del programma “FitLin.m”, in quanto i calcoli preliminari dei parametri sono effettuati da quest’ultimo.

Uno sguardo particolare va dato all’istruzione ‘while’ la quale esegue, in ciclo, tutte le istruzioni contenute tra ‘while’ ed ‘end’ fino a quando resta verificata la condizione indicata di seguito all’istruzione ‘while’; nel nostro caso tale condizione è

$$\text{or}((\text{abs}((a1-c)/c) \geq p), (\text{abs}((b-d)/d) \geq p))$$

che tradotta vuol dire: *finchè  $|\frac{a1-c}{c}| \geq p$  oppure  $|\frac{b-d}{d}| \geq p$  allora prosegui nell’iterazione. Quando entrambe le condizioni sono false, arresta il ciclo!*

La variabile  $a1$  rappresenta  $\tilde{a}^{(k)}$  mentre la variabile  $c$  rappresenta  $\tilde{a}^{(k-1)}$ .

Analogamente  $b$  rappresenta  $b^{(k)}$  mentre la  $d$ ,  $b^{(k-1)}$ .

Quindi il ciclo si arresta quando **entrambi** gli scarti relativi sono minori di  $p = \varepsilon$ .

Il listato è il seguente:

**%FIT Iterativo (by Andrea Praticò 2003)**

```
fitlin;      %Richiede il file fitlin.m per avviare il ciclo di calcolo
n=1;        %Contatore Iterazioni
p=1e-9;     %Precisione Voluta
```

```
sigmaeff=sqrt((sigmay1).^2+(b*sigmax)^2);  %Errore efficace
```

```
sig2=sigmaeff.^2;
sig1=1./sig2;
S1=sum(sig1);
Sx=sum(x.*sig1);
Sxx=sum((x.^2).*sig1);
Sy=sum(y1.*sig1);
Sxy=sum((x.*y1).*sig1);
```

```
A=[S1,Sx;Sx,Sxx];
B=[Sy;Sxy];
Sol=A^(-1)*B;
```

```
c=a1;      %Mantiene il valore di a1
d=b;       %Mantiene il valore di b
a1=Sol(1);
```

```

b=Sol(2);
a=exp(a1);

sigmaa1=sqrt(Sxx/(det(A))); %Incertezza su a1
sigmaa=a*sigmaa1;          %Incertezza su a
sigmab=sqrt(S1/(det(A)));  %Incertezza su b

cov=-Sx/(det(A));          %Covarianza

aa=[aa a];
bb=[bb b];
sig3=[sig3 sigmaa];        %Per plottare il sigmaa
sig5=[sig5 sigmab];        %Per plottare il sigmab
cov1=[cov1 cov];           %Per plottare la Covarianza

while or((abs((a1-c)/c)>=p),(abs((b-d)/d)>=p)) %Condizione su a1 e b
    sigmaeff=sqrt((sigmay1).^2+(b*sigmax)^2);

    sig2=sigmaeff.^2;
    sig1=1./sig2;
    S1=sum(sig1);
    Sx=sum(x.*sig1);
    Sxx=sum((x.^2).*sig1);
    Sy=sum(y1.*sig1);
    Sxy=sum((x.*y1).*sig1);

    A=[S1,Sx;Sx,Sxx];
    B=[Sy;Sxy];
    Sol=A^(-1)*B;
    n=n+1;
    c=a1;          %Mantiene il valore di a1 precedente
    d=b;           %Mantiene il valore di b precedente
    a1=Sol(1);
    b=Sol(2);
    a=exp(a1);

    sigmaa1=sqrt(Sxx/(det(A))); %Incertezza su a1
    sigmaa=a*sigmaa1;          %Incertezza su a
    sigmab=sqrt(S1/(det(A)));  %Incertezza su b

    cov=-Sx/(det(A));          %Covarianza

    aa=[aa a];
    bb=[bb b];
    sig3=[sig3 sigmaa];        %Per plottare il sigmaa
    sig5=[sig5 sigmab];        %Per plottare il sigmab
    cov1=[cov1 cov];           %Per plottare la Covarianza
end

%Plottaggio dei Risultati
figure;
t=0:0.01:max(x);      %t in ms

```

```

v=a*exp(b*t);          %Andamento teorico
plot(t,v,'b');
titolo=['FIT Iterativo dopo ', num2str(n), ' Iterazione/i'];
TITLE(titolo);
AXIS([0 9 0 1.1])
XLABEL('Tempo in ms');
YLABEL('Tensione in V');
text(0,a,['\leftarrow',num2str(a),'V'],'FontSize',12);
grid on;
hold on;
barra(x,y,sigmax,sigmay);
LEGEND('Valori Teorici','Dati Sperimentali');
hold off;

figure;
plot(0:1:n,aa);
titolo=['Andamento di a in funz. di n (',num2str(n),')'];
TITLE(titolo);
XLABEL('n (Numero di Iterazioni)');
YLABEL('V');
grid on;
hold on;
line([0.6 n],[1.004016 1.004016],'Color','r','LineWidth',2,'LineStyle','--');
text(0,1.0199,['\leftarrow',num2str(1.0199)],'FontSize',12);
text(0,1.004,[num2str(1.004016)],'FontSize',12);
hold off;

figure;
plot(0:1:n,bb);
titolo=['Andamento di b in funz. di n (',num2str(n),')'];
TITLE(titolo);
XLABEL('n (Numero di Iterazioni)');
YLABEL('1/ms');
grid on;
hold on;
line([0.9 n],[-0.296419 -0.296419],'Color','r','LineWidth',2,'LineStyle','--');
text(0,-0.3011,['\leftarrow',num2str(-0.3011)],'FontSize',12);
text(0,-0.296419,[num2str(-0.296419)],'FontSize',12);
hold off;

figure;
plot(0:1:n,sig3);
titolo=['Andamento di sigmaa in funz. di n (',num2str(n),')'];
TITLE(titolo);
XLABEL('n (Numero di Iterazioni)');
YLABEL('V');
grid on;
hold on;
line([0.9 n],[0.030354 0.030354],'Color','r','LineWidth',2,'LineStyle','--');
text(0,0.0156,['\leftarrow',num2str(0.0156)],'FontSize',12);
text(0,0.030354,[num2str(0.030354)],'FontSize',12);
hold off;

```



```
figure;
plot(0:1:n,sig5);
titolo=['Andamento di sigmab in funz. di n (',num2str(n),')'];
TITLE(titolo);
XLABEL('n (Numero di Iterazioni)');
YLABEL('1/ms');
grid on;
hold on;
line([0.9 n],[0.008143 0.008143],'Color','r','LineWidth',2,'LineStyle','--');
text(0,0.0057,['\leftarrow',num2str(0.0057)],'FontSize',12);
text(0,0.008143,[num2str(0.008143)],'FontSize',12);
hold off;

figure;
plot(0:1:n,cov1);
line([1.1 n],[-2.080e-4 -2.080e-4],'Color','r','LineWidth',2,'LineStyle','--');
text(0,-7.1577e-5,['\leftarrow',num2str(-7.1577e-5)],'FontSize',12);
text(0,-2.080412e-4,[num2str(-2.080412e-4)],'FontSize',12);
titolo=['Andamento della Covarianza in funz. di n (',num2str(n),')'];
TITLE(titolo);
XLABEL('n (Numero di Iterazioni)');
YLABEL('1/ms');
grid on;
```

## Appendice E

# Soluzione dell'Equazione differenziale

Verrà riportato il procedimento per risolvere la prima equazione, ovvero quella in cui la funzione incognita è  $v_C(t)$ .

Si pone

$$y = y(t) = v_C(t)$$

l'equazione diviene:

$$LCy'' + RCy' + y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{R}{L}y' + \frac{1}{LC} \cdot y = 0$$

Si fa l'ulteriore sostituzione:

$$y' = x \quad \text{da cui} \quad y'' = x'$$

quindi l'equazione di secondo grado è equivalente al sistema di due equazioni del prim'ordine:

$$\begin{cases} y' = x \\ x' = -\frac{R}{L} \cdot x - \frac{1}{LC} \cdot y \end{cases}$$

Si esegue la trasformazione secondo Laplace:

$$\begin{cases} sY - y(0) = X \\ sX - x(0) = -\frac{R}{L} \cdot X - \frac{1}{LC} \cdot Y \end{cases}$$

$X$  ed  $Y$  rappresentano le trasformate di Laplace delle corrispondenti funzioni temporali.

### Osservazione:

$x(0)$  rappresenta il valore, all'istante  $t_0 = 0$ , del termine  $y' = \frac{dv_C}{dt}$ .

Dall'equazione del condensatore  $i_C = C \cdot \frac{dv_C}{dt}$  segue che

$$x(0) = \frac{1}{C}i_C(0) = -\frac{1}{C} \cdot i_L(0) = -\frac{v_C(0)}{RC}$$

$$\begin{cases} X - sY = -y(0) \\ \left(s + \frac{R}{L}\right) X + \frac{1}{LC}Y = x(0) \end{cases}$$

In forma matriciale il sistema diviene:

$$\begin{bmatrix} 1 & -s \\ s + \frac{R}{L} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(0) \\ x(0) \end{bmatrix}$$

Si osservi che  $y(0) = v_C(0)$ ; la soluzione del sistema è:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{LC} + s(s + \frac{R}{L})} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{LC} & s \\ -(s + \frac{R}{L}) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -v_C(0) \\ -\frac{v_C(0)}{RC} \end{bmatrix}$$

La grandezza di interesse è la  $Y$  la cui funzione in  $s$  ha la seguente forma:

$$Y(s) = v_C(0) \frac{s + \frac{R}{L} - \frac{1}{RC}}{s^2 + \frac{R}{L} \cdot s + \frac{1}{LC}}$$

Questa espressione poteva essere determinata analizzando direttamente il circuito  $\mathcal{L}$ -Trasformato, in cui compaiono i generatori fittizi delle condizioni iniziali:

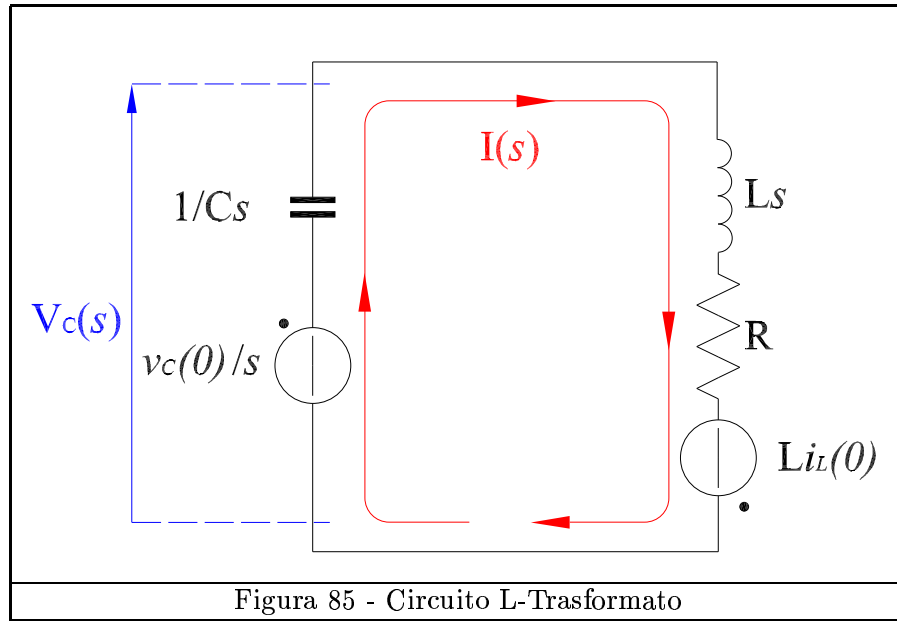


Figura 85 - Circuito L-Trasformato

$$I(s) = \frac{\frac{v_C(0)}{s} + Li_L(0)}{\frac{1}{Cs} + Ls + R} = \dots = \frac{v_C(0)}{R} \frac{s + \frac{R}{L}}{s^2 + \frac{R}{L} \cdot s + \frac{1}{LC}}$$

$$V_C(s) = Y(s) = -I(s) \cdot \frac{1}{Cs} + \frac{v_C(0)}{s} = \dots = v_C(0) \frac{s + \frac{R}{L} - \frac{1}{RC}}{s^2 + \frac{R}{L} \cdot s + \frac{1}{LC}}$$

Si fanno le seguenti sostituzioni:

$$\begin{aligned} a &= \frac{R}{L} \\ \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \end{aligned}$$

$$Y(s) = v_C(0) \frac{s + a - \frac{1}{RC}}{s^2 + as + \omega_0^2}$$

Si hanno le seguenti trasformate di Laplace:

$$\mathcal{L} \{ e^{\alpha t} \cos(\omega t) \} = \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} \quad \mathcal{L} \{ e^{\alpha t} \sin(\omega t) \} = \frac{\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$$

Si cercherà di esprimere  $Y(s)$  in tale forma:

$$s^2 + as + \omega_0^2 = (s - \alpha)^2 + \omega^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{a}{2} \\ \omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 \end{cases}$$

Allora si può scrivere:

$$Y(s) = v_C(0) \frac{s - 2\alpha - \frac{1}{RC}}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} = v_C(0) \left[ \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} - \frac{\alpha + \frac{1}{RC}}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} \right] \Rightarrow$$

$$Y(s) = V_C(s) = v_C(0) \left[ \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} - \frac{\alpha + \frac{1}{RC}}{\omega} \frac{\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} \right]$$

Quindi, antitrasformando:

$$v_C(t) = v_C(0) \left[ \cos(\omega t) - \frac{\alpha + \frac{1}{RC}}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \right] e^{\alpha t}$$

Si osserva che:

$$C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) = C_3 \cos(\omega t + \varphi)$$

dove

$$C_3 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \cos(\varphi) = \frac{C_2}{C_3}$$

Nel nostro caso

$$C_3 = \sqrt{\left( \frac{\alpha + \frac{1}{RC}}{\omega} \right)^2 + 1} = \dots = \frac{1}{\omega RC}$$

$$\cos(\varphi) = \omega RC$$

Infine, ponendo

$$\tau = \frac{2L}{R}$$

Si ottiene

$$v_C(t) = \frac{v_C(0)}{\omega RC} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \omega RC$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{\tau^2}}$$

## Appendice F

# Dinamica RLC

Di seguito sono riportati i listati MATLAB utilizzati per lo studio della Dinamica del circuito RLC, sono tre listati relativi ai tre valori di capacità utilizzata, inoltre saranno riportati i risultati delle simulazioni eseguite mediante OrCAD Capture nei tre casi suddetti.

### F.1 $C_1 = 0.1\mu\text{F}$

%Dati Ottenuti con C=0.1uF

```
C1=0.1e-6;    %F
toll=0.2;     %Tolleranza sulla Capacità del 20%
dC1=C1*toll;
```

```
Nper=13;      %numero di periodi letti
divP=10.4;    %divisioni corrispondenti
```

```
KT=2e-3;      %s/div
```

```
T1=divP*KT/Nper;
dT1=(KT/10)/Nper;
```

```
%Calcolo dell'Induttanza
L1=(1/C1)*(T1/(2*pi))^2;
```

```
%Calcolo dell'incertezza sull'Induttanza
dLdC1=(T1/(2*pi*C1))^2;
dLdT1=T1/(2*(pi^2)*C1);
dL1=sqrt((dLdC1)^2*(dC1)^2+(dLdT1)^2*(dT1)^2);
```

```
%PICCHI di Tensione
KV=5;         %V/div
```

```
div=[3.2 2.8 2.6 2.4 2.0 1.8 1.6 1.4 1.2 1.2 1.1 1.0 1.0 0.8];
Yn=div*KV;
n=0:1:13;
```

```
w1=1/sqrt(L1*C1);    %Pulsazione (rad/s)
dw1=2*pi/T1^2*dT1;   %Incertezza sulla Pulsazione
```

```

f1=w1/(2*pi);          %Frequenza (Hz)

tn=2*pi/w1.*n;

den=log(Yn(1)./Yn);

%Si elimina il primo elemento che è nullo
den1=den(2);
for i=3:14
    den1=[den1 den(i)];
end

n=1:1:13;
tau=(n.*T1)./den1; %Vettore dei valori di tau

s=size(tau);
N=s(2);

taum1=mean(tau);      %tau medio
sigmataau=std(tau); %Deviazione standard del Campione (N-1)

dtau1=sigmatatau/sqrt(N); %S.D.O.M. del tau

%Calcolo della Resistenza R
R1=2*L1/taum1;

dRdL=2/taum1;
dRdtau=2*L1/(taum1^2);

dR1=sqrt((dRdL^2)*dL1^2+(dRdtau^2)*dtau1^2);

t=0:10e-6:20e-3;
vc0=Yn(1);          %Tensione iniziale V

%Plottaggio dei dati
figure;
vc=vc0.*exp(-t./taum1).*cos(w1.*t);
t1=t*1000;
plot(t1,vc,'b');
hold on;
barra(tn*1000,Yn,0.2,0.5);
AXIS([0 20 -16 16]);
XLABEL('ms');
YLABEL('V');
titolo=['Andamento con C=0.10 \mu F ; f1=',num2str(round(f1)), ' Hz'];
TITLE(titolo);
grid on;
LEGEND('Valori Teorici','Valori Misurati');
hold off;

```

**F.2**  $C_2 = 0.22\mu\text{F}$ 

```

%Dati Ottenuti con C=0.22uF

C2=0.22e-6; %F
toll=0.2; %Tolleranza sulla Capacità del 20%
dC2=C2*toll;

Nper=10; %numero di periodi letti
divP=10; %divisioni corrispondenti

KT=2e-3; %s/div

T2=divP*KT/Nper;
dT2=(KT/10)/Nper;

%Calcolo dell'Induttanza
L2=(1/C2)*(T2/(2*pi))^2;

%Calcolo dell'incertezza sull'Induttanza
dLdC2=(T2/(2*pi*C2))^2;
dLdT2=T2/(2*(pi^2)*C2);
dL2=sqrt((dLdC2)^2*(dC2)^2+(dLdT2)^2*(dT2)^2);

%PICCHI di Tensione
KV=5; %V/div

div=[3.0 2.6 2.4 2.0 1.8 1.6 1.4 1.2 1.0 1.0];
Yn=div*KV;
n=0:1:9;

w2=1/sqrt(L2*C2); %Pulsazione (rad/s)
dw2=2*pi/T2^2*dT2; %Incertezza sulla Pulsazione
f2=w2/(2*pi); %Frequenza (Hz)

tn=2*pi/w2.*n;

den=log(Yn(1)./Yn);

%Si elimina il primo elemento che è nullo
den1=den(2);
for i=3:10
    den1=[den1 den(i)];
end

n=1:1:9;
tau=(n.*T2)./den1; %Vettore dei valori di tau

s=size(tau);
N=s(2);

taum2=mean(tau); %tau medio

```

```

sigmatau2=std(tau); %Deviazione standard del Campione (N-1)

dtau2=sigmatatau2/sqrt(N); %S.D.O.M. del tau

%Calcolo della Resistenza R
R2=2*L2/taum2;

dRdL=2/taum2;
dRdtau=2*L2/(taum2^2);

dR2=sqrt((dRdL^2)*dL2^2+(dRdtau^2)*dtau2^2);

t=0:10e-6:20e-3;
vc0=Yn(1); %Tensione iniziale V

%Plottaggio dei dati
figure;
vc=vc0.*exp(-t./taum2).*cos(w2.*t);
t1=t*1000;
plot(t1,vc,'b');
hold on;
barra(tn*1000,Yn,0.2,0.5);
AXIS([0 20 -16 16]);
XLABEL('ms');
YLABEL('V');
titolo=['Andamento con C=0.22 \mu F ; f2=',num2str(round(f2)),' Hz'];
TITLE(titolo);
grid on;
LEGEND('Valori Teorici','Valori Misurati');
hold off;

```



**F.3**  $C_3 = 0.47\mu\text{F}$ 

```

%Dati Ottenuti con C=0.47uF

C3=0.47e-6; %F
toll=0.2; %Tolleranza sulla Capacità del 20%
dC3=C3*toll;

Nper=6; %numero di periodi letti
divP=9.8; %divisioni corrispondenti

KT=2e-3; %s/div

T3=divP*KT/Nper;
dT3=(KT/10)/Nper;

%Calcolo dell'Induttanza
L3=(1/C3)*(T3/(2*pi))^2;

%Calcolo dell'incertezza sull'Induttanza
dLdC3=(T3/(2*pi*C3))^2;
dLdT3=T3/(2*(pi^2)*C3);
dL3=sqrt((dLdC3)^2*(dC3)^2+(dLdT3)^2*(dT3)^2);

%PICCHI di Tensione
KV=5; %V/div

div=[1.6 1.4 1.2 1.0 1.0 0.8];
Yn=div*KV;
n=0:1:5;

w3=1/sqrt(L3*C3); %Pulsazione (rad/s)
dw3=2*pi/T3^2*dT3; %Incertezza sulla Pulsazione
f3=w3/(2*pi); %Frequenza (Hz)

tn=2*pi/w3.*n;

den=log(Yn(1)./Yn);

%Si elimina il primo elemento che è nullo
den1=den(2);
for i=3:6
    den1=[den1 den(i)];
end

n=1:1:5;
tau=(n.*T3)./den1; %Vettore dei valori di tau

s=size(tau);
N=s(2);

taum3=mean(tau); %tau medio

```

```

sigmataau3=std(tau); %Deviazione standard del Campione (N-1)

dtau3=sigmatatau3/sqrt(N); %S.D.O.M. del tau

%Calcolo della Resistenza R
R3=2*L3/taum3;

dRdL=2/taum3;
dRdtau=2*L3/(taum3^2);

dR3=sqrt((dRdL^2)*dL3^2+(dRdtau^2)*dtau3^2);

t=0:10e-6:40.6e-3;
vc0=Yn(1); %Tensione iniziale V

%Plottaggio dei dati
figure;
vc=vc0.*exp(-t./taum3).*cos(w3.*t);
t1=t*1000;
plot(t1,vc,'b');
hold on;
barra(tn*1000,Yn,0.2,0.5);
AXIS([0 20 -9 9]);
XLABEL('ms');
YLABEL('V');
titolo=['Andamento con C=0.47 \mu F ; f3=',num2str(round(f3)),' Hz'];
TITLE(titolo);
grid on;
LEGEND('Valori Teorici','Valori Misurati');
hold off;

```

F.4 Simulazione con  $C_1 = 0.1\mu\text{F}$

Con questo valore della Capacità, si ha<sup>1</sup>:

$C_1$	$L_1$	$R_1$	$\tau_1$	$T_1$	$\omega_1$	$f_1$
$[\mu\text{F}]$	$[\text{mH}]$	$[\Omega]$	$[\text{ms}]$	$[\text{ms}]$	$[\text{rad/s}]$	$[\text{Hz}]$
0.10	$650 \pm 130$	$90 \pm 18$	$14.5 \pm 0.4$	$1.60 \pm 0.02$	$3927 \pm 38$	$625 \pm 6$

Lo schema della simulazione è il seguente:

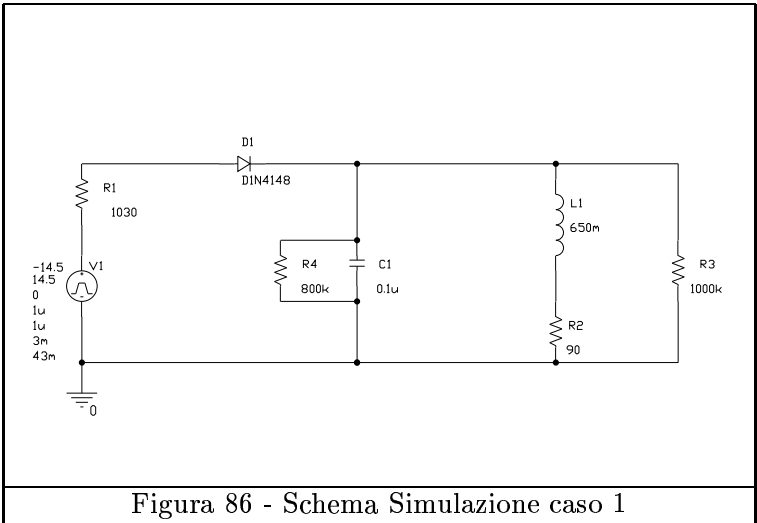


Figura 86 - Schema Simulazione caso 1

Si avvia la simulazione, ottenendo:

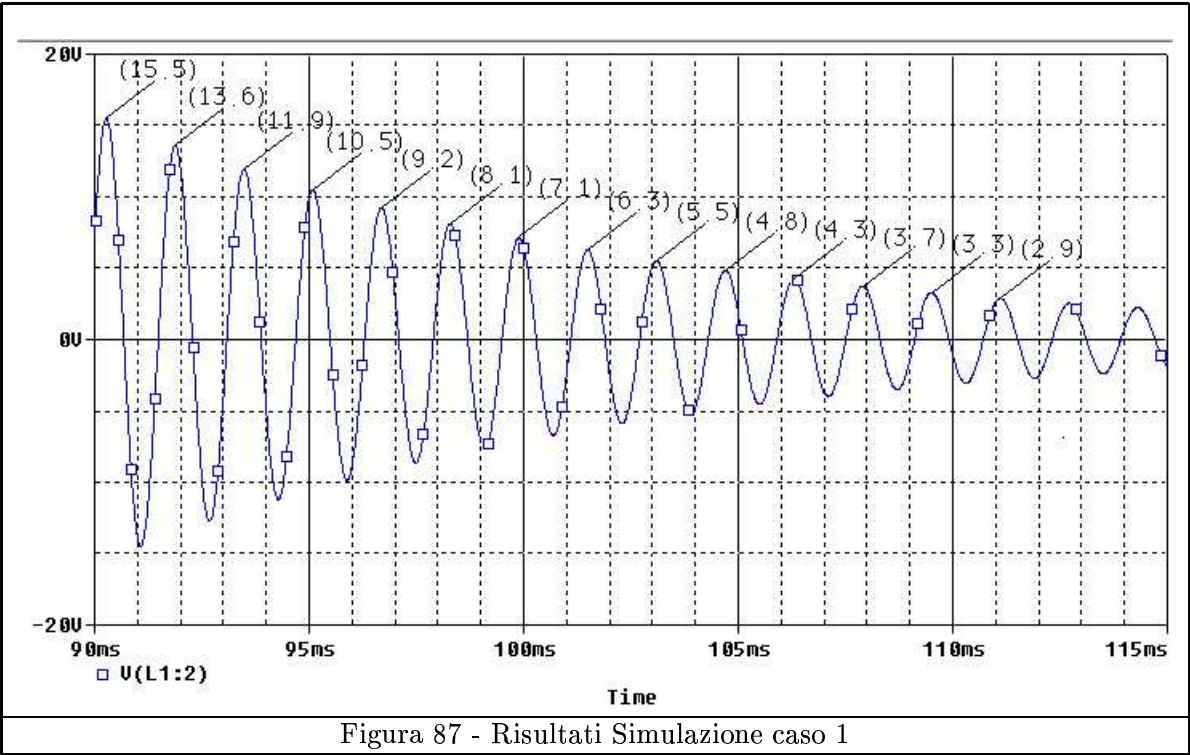


Figura 87 - Risultati Simulazione caso 1

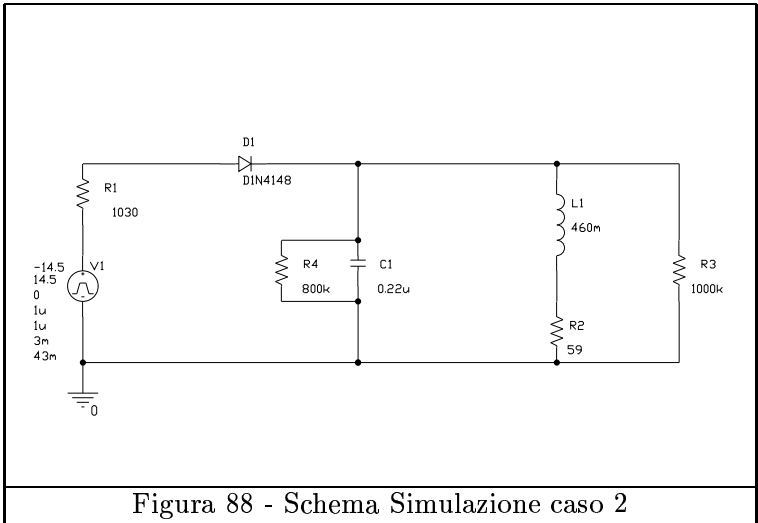
<sup>1</sup>Vedi da pag. 44 a pag. 47

F.5 Simulazione con  $C_2 = 0.22\mu\text{F}$

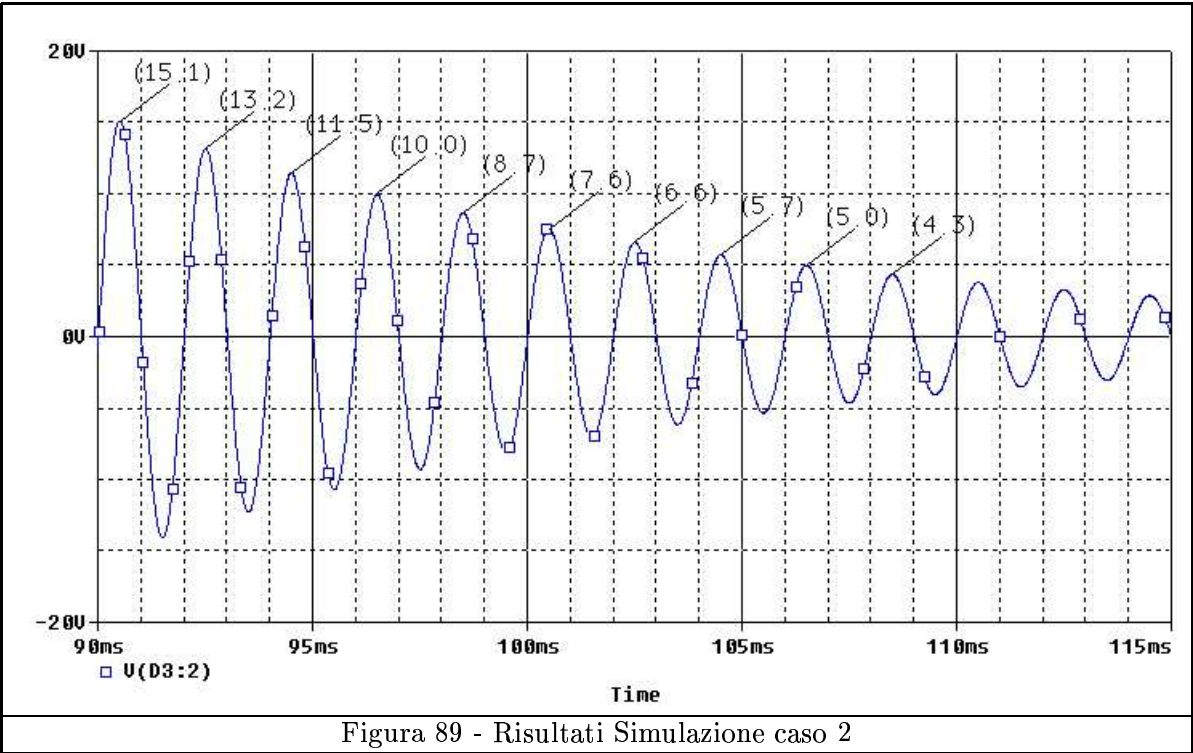
Con questo valore della Capacità, si ha<sup>2</sup>:

$C_2$	$L_2$	$R_2$	$\tau_2$	$T_2$	$\omega_2$	$f_2$
$[\mu\text{F}]$	$[\text{mH}]$	$[\Omega]$	$[\text{ms}]$	$[\text{ms}]$	$[\text{rad/s}]$	$[\text{Hz}]$
0.22	$460 \pm 93$	$59 \pm 12$	$15.6 \pm 0.4$	$2.00 \pm 0.02$	$3142 \pm 31$	$500 \pm 5$

Lo schema della simulazione è il seguente:



Si avvia la simulazione, ottenendo:



<sup>2</sup>Vedi pag. 50

F.6 Simulazione con  $C_3 = 0.47\mu\text{F}$

Con questo valore della Capacità, si ha<sup>3</sup>:

$C_3$	$L_3$	$R_3$	$\tau_3$	$T_3$	$\omega_3$	$f_3$
$[\mu\text{F}]$	$[\text{mH}]$	$[\Omega]$	$[\text{ms}]$	$[\text{ms}]$	$[\text{rad/s}]$	$[\text{Hz}]$
0.47	$575 \pm 116$	$48 \pm 10$	$23.9 \pm 1.1$	$3.30 \pm 0.03$	$1923 \pm 20$	$306 \pm 3$

Lo schema della simulazione è il seguente:

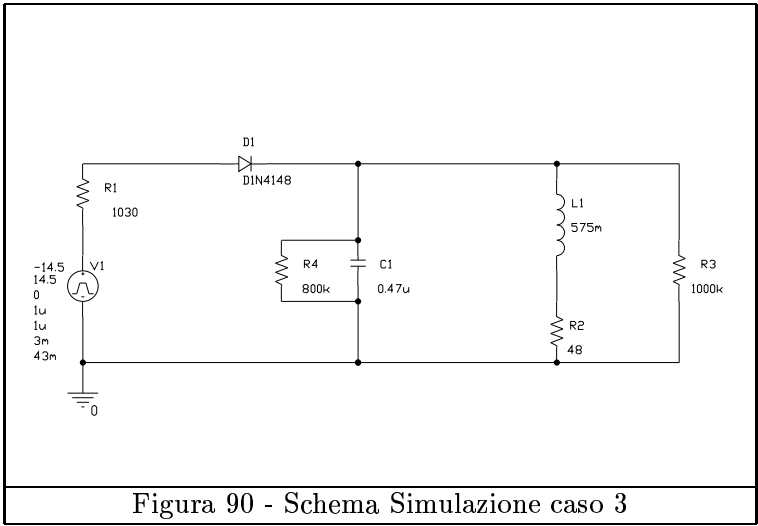


Figura 90 - Schema Simulazione caso 3

Si avvia la simulazione, ottenendo:

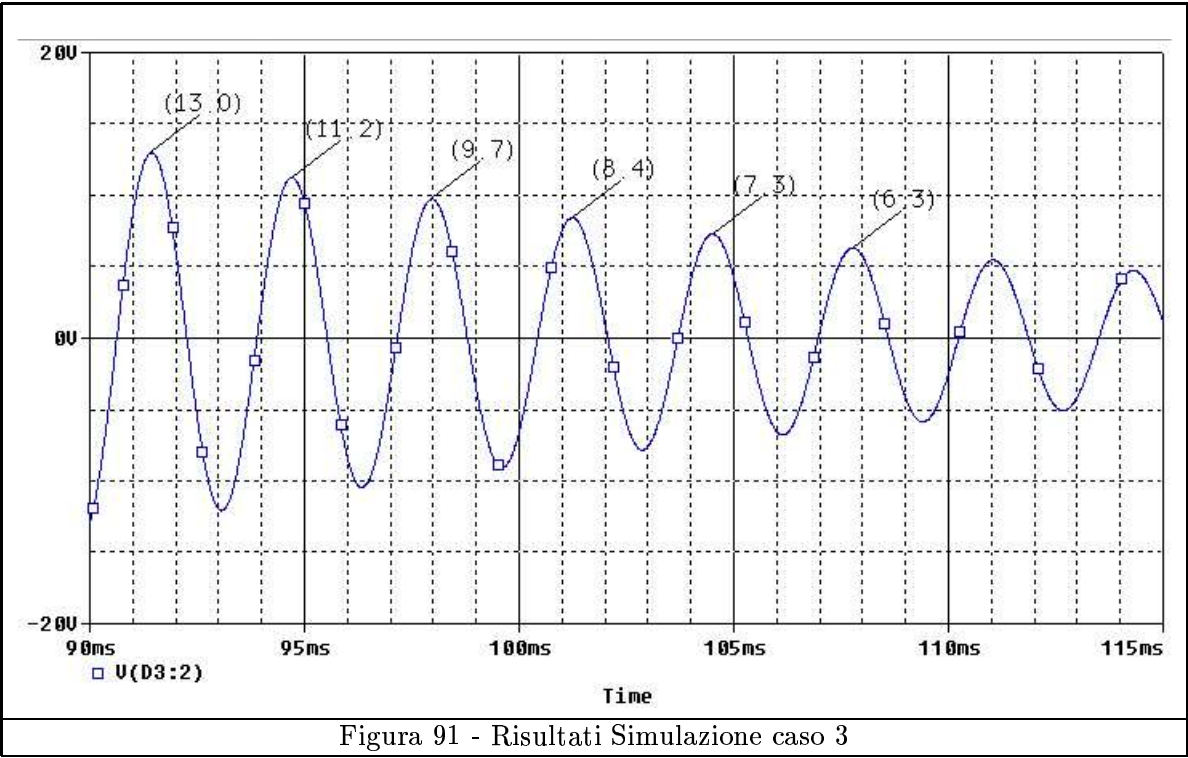


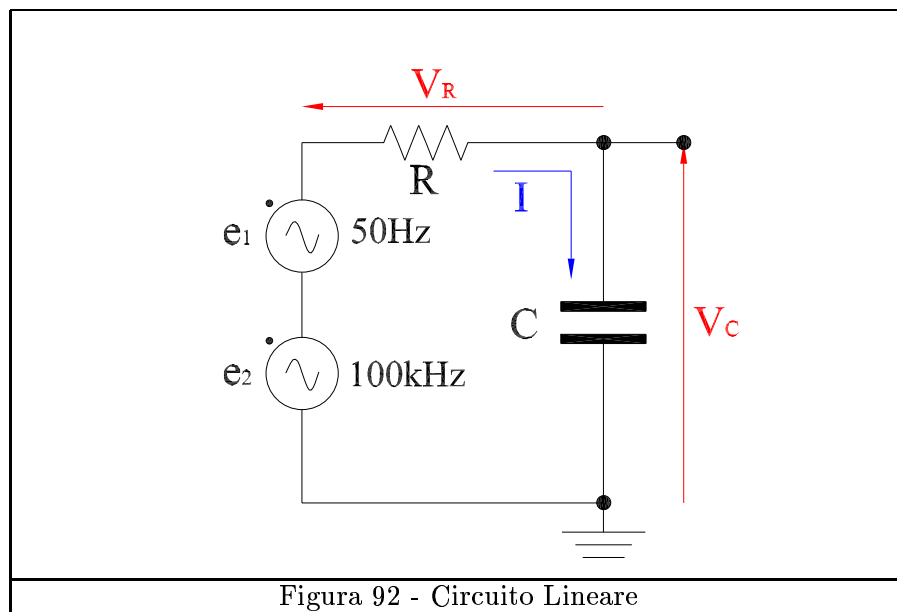
Figura 91 - Risultati Simulazione caso 3

<sup>3</sup>Vedi pag. 50

## Appendice G

# Filtro Passivo

Sia dato un circuito del tipo:



in cui i due generatori forniscono le rispettive tensioni sinusoidali:

$$e_1(t) = E_{1M} \cos(\omega_1 t) \quad e_2(t) = E_{2M} \cos(\omega_2 t)$$

Nell'ipotesi che la capacità e la resistenza non dipendano dalla tensione e corrente che interessa il circuito, si può affermare che il circuito **sia lineare**, e per esso sia applicabile il **Principio di Sovrapposizione degli Effetti**.

Questo implica che il regime del circuito può essere studiato sovrapponendo gli effetti di ciascun generatore, come se ognuno di essi agisse separatamente:

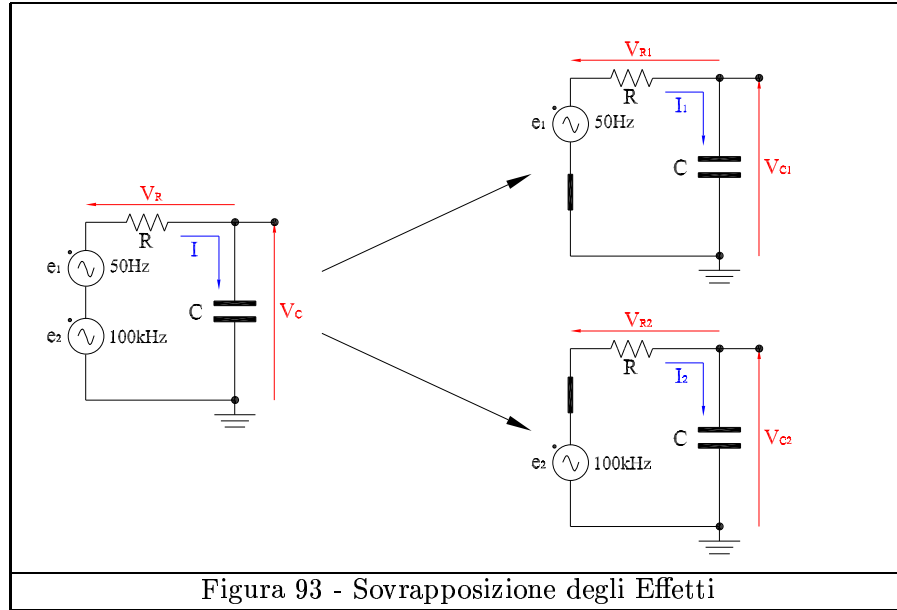


Figura 93 - Sovrapposizione degli Effetti

La tensione ai capi del condensatore, quella ai capi della resistenza e la corrente, sono date da:

$$v_C(t) = v_{C1}(t) + v_{C2}(t)$$

$$v_R(t) = v_{R1}(t) + v_{R2}(t)$$

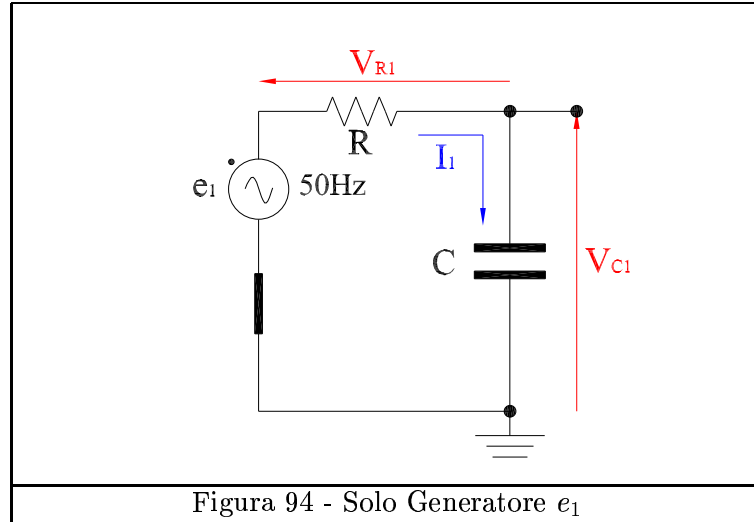
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

Ciascun circuito, separatamente, è interessato da grandezze isofrequenziali, per cui, per ognuno di essi è applicabile il metodo fasoriale.

### G.1 Circuito 1

$$e_1(t) = E_{1M} \cos(\omega_1 t) = \sqrt{2} \cdot E_1 \cdot \cos(\omega_1 t) \Rightarrow$$

$$\dot{E}_1 = jE_1 \quad (E_1 = \text{Valore efficace di } e_1(t))$$



$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{R - j\frac{1}{\omega_1 C}} = \frac{\omega_0 \cdot \omega_1 \cdot C \cdot E_1}{\omega_0^2 + \omega_1^2} (-\omega_0 + j\omega_1)$$

$$\dot{V}_{C1} = -j\frac{1}{\omega_1 C} \cdot \dot{I}_1 = \frac{\omega_0 \cdot E_1}{\omega_0^2 + \omega_1^2} (\omega_1 + j\omega_0)$$

$$\dot{V}_{R1} = R \cdot \dot{I}_1 = \frac{\omega_1 \cdot E_1}{\omega_0^2 + \omega_1^2} (-\omega_0 + j\omega_1)$$

Passando dalle relazioni fasoriali a quelle temporali, si ottiene:

$$v_{C1}(t) = \frac{\sqrt{2} \cdot E_1 \cdot \omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}} \cdot \sin(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$\phi_1 = \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)$$

$$v_{R1}(t) = \frac{\sqrt{2} \cdot E_1 \cdot \omega_1}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\varphi_1 = \pi - \arctan\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)$$

essendo

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right) = \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right) = \phi_1 \quad \text{si ha:}$$

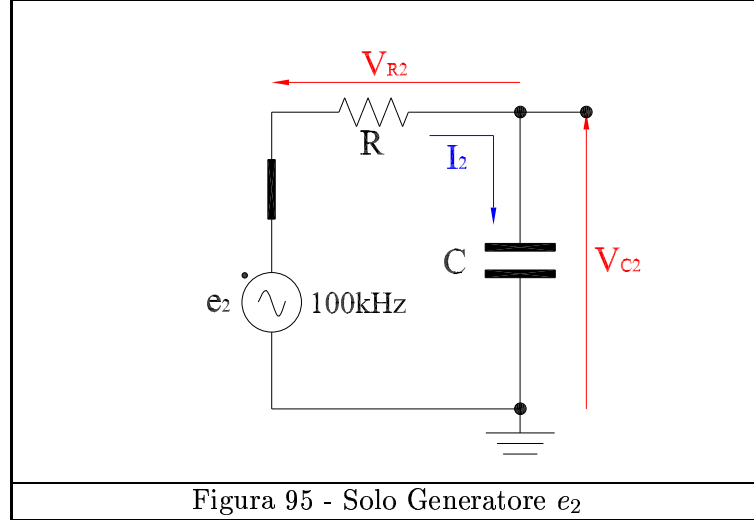
$$v_{R1}(t) = \frac{\sqrt{2} \cdot E_1 \cdot \omega_1}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}} \cdot \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$



## G.2 Circuito 2

$$e_2(t) = E_{2M} \cos(\omega_2 t) = \sqrt{2} \cdot E_2 \cdot \cos(\omega_2 t) \Rightarrow$$

$$\dot{E}_2 = j E_2 \quad (E_2 = \text{Valore efficace di } e_2(t))$$



$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2}{R - j \frac{1}{\omega_2 C}} = \frac{\omega_0 \cdot \omega_2 \cdot C \cdot E_2}{\omega_0^2 + \omega_2^2} (-\omega_0 + j \omega_2)$$

$$\dot{V}_{C2} = -j \frac{1}{\omega_2 C} \cdot \dot{I}_2 = \frac{\omega_0 \cdot E_2}{\omega_0^2 + \omega_2^2} (\omega_2 + j \omega_0)$$

$$\dot{V}_{R2} = R \cdot \dot{I}_2 = \frac{\omega_2 \cdot E_2}{\omega_0^2 + \omega_2^2} (-\omega_0 + j \omega_2)$$

Passando dalle relazioni fasoriali a quelle temporali, si ottiene:

$$v_{C2}(t) = \frac{\sqrt{2} \cdot E_2 \cdot \omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_2^2}} \cdot \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\phi_2 = \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega_2}\right)$$

$$v_{R2}(t) = \frac{\sqrt{2} \cdot E_2 \cdot \omega_2}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_2^2}} \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\varphi_2 = \pi - \arctan\left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)$$

essendo

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right) = \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega_2}\right) = \phi_2 \quad \text{si ha:}$$

$$v_{R2}(t) = \frac{\sqrt{2} \cdot E_2 \cdot \omega_2}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_2^2}} \cdot \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

### G.3 Sovrapposizione degli Effetti

Le tensioni, ai capi del condensatore e della resistenza, sono date da:

$$v_C(t) = v_{C1}(t) + v_{C2}(t) \Rightarrow$$

$$v_C(t) = \frac{\omega_0 \cdot E_{1M} \cdot \sin(\omega_1 t + \phi_1)}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}} + \frac{\omega_0 \cdot E_{2M} \cdot \sin(\omega_2 t + \phi_2)}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_2^2}}$$

$$v_R(t) = v_{R1}(t) + v_{R2}(t) \Rightarrow$$

$$v_R(t) = \frac{\omega_1 \cdot E_{1M} \cdot \cos(\omega_1 t + \phi_1)}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}} + \frac{\omega_2 \cdot E_{2M} \cdot \cos(\omega_2 t + \phi_2)}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_2^2}}$$

dove si ricorda:

$\phi_1 = \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)$	$\phi_2 = \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega_2}\right)$	$\omega_0 = \frac{1}{RC}$
--	--	---------------------------

## Appendice H

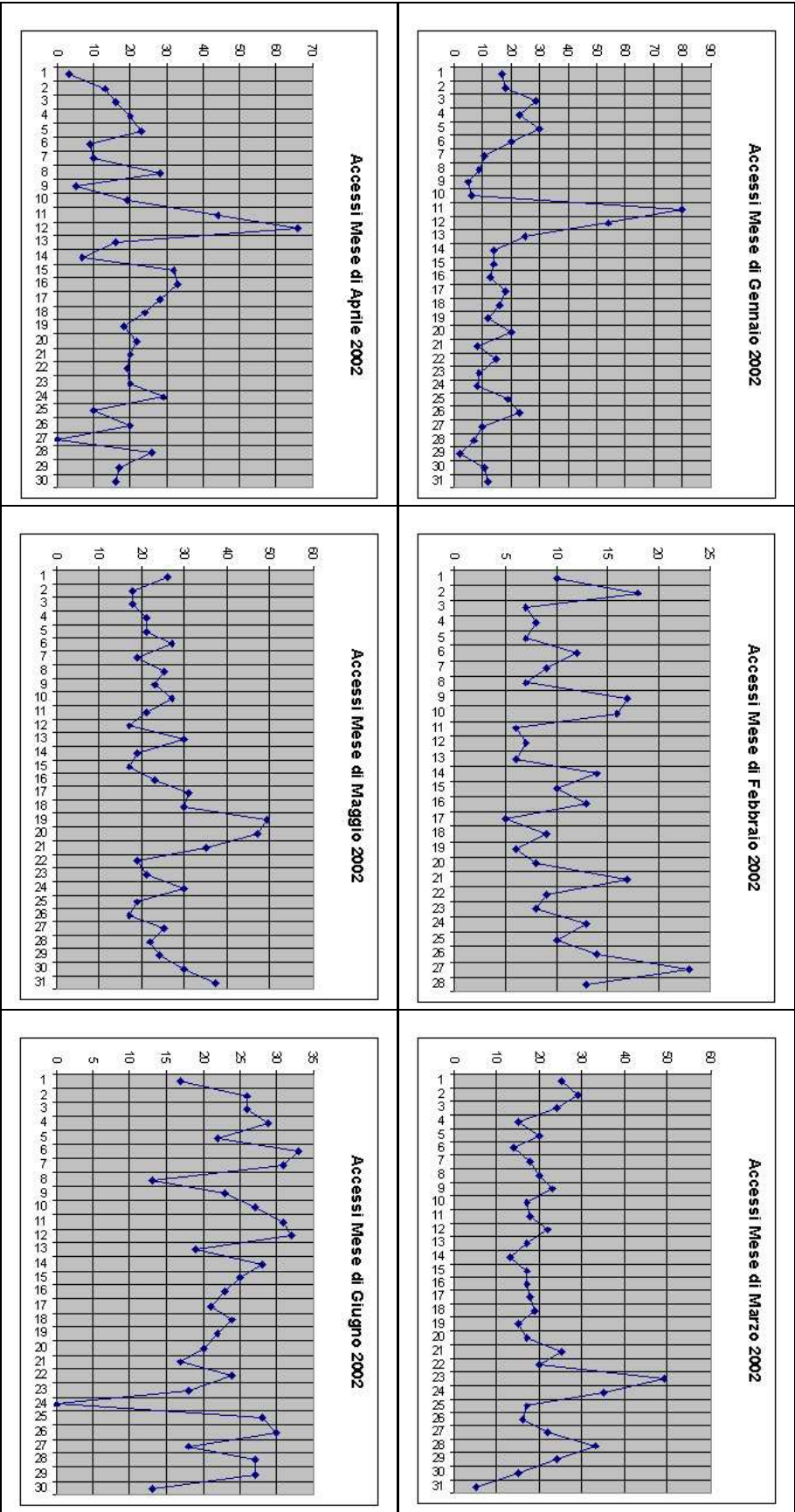
# Poissoniana

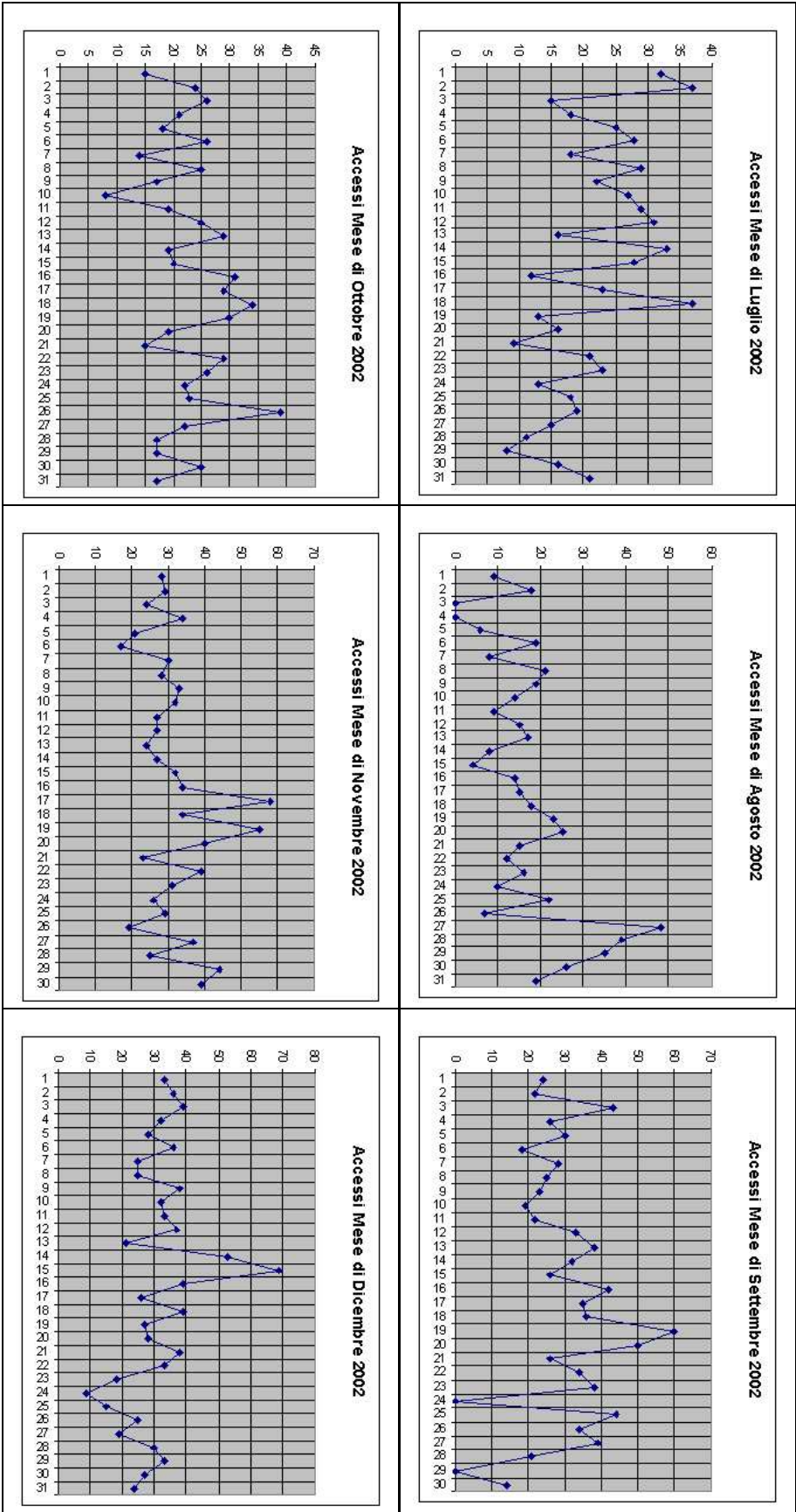
Di seguito sono riportati tutti gli accessi al sito web <http://web.quipo.it/Analisi/> relativi agli anni 2002 e 2003 ed i relativi listati MATLAB utilizzati per i calcoli.

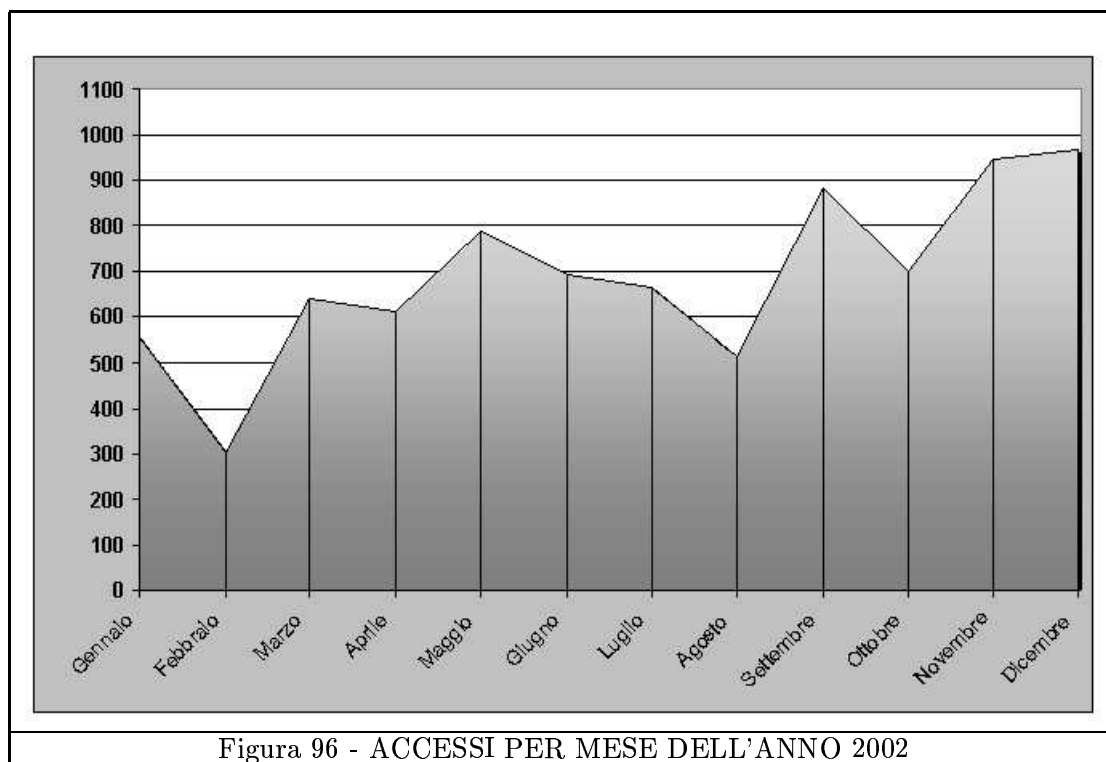
## H.1 Dati Statistici

Accessi Anno 2002												
gg	G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D
1	17	10	25	3	26	17	32	9	24	15	28	33
2	18	18	29	13	18	26	37	18	22	24	29	36
3	29	7	24	16	18	26	15	0	43	26	24	39
4	23	8	15	20	21	29	18	0	26	21	34	32
5	30	7	20	23	21	22	25	6	30	18	21	28
6	20	12	14	9	27	33	28	19	18	26	17	36
7	11	9	18	10	19	31	18	8	28	14	30	25
8	9	7	20	28	25	13	29	21	25	25	28	25
9	5	17	23	5	23	23	22	19	23	17	33	38
10	6	16	17	19	27	27	27	14	19	8	32	32
11	80	6	18	44	21	31	29	9	22	19	27	33
12	54	7	22	66	17	32	31	15	33	25	27	37
13	25	6	17	16	30	19	16	17	38	29	24	21
14	14	14	13	7	19	28	33	8	32	19	27	53
15	14	10	17	32	17	25	28	4	26	20	32	69
16	13	13	17	33	23	23	12	14	42	31	34	39
17	18	5	18	28	31	21	23	15	35	29	58	26
18	16	9	19	24	30	24	37	18	36	34	34	39
19	12	6	15	18	49	22	13	23	60	30	55	27
20	20	8	17	22	47	20	16	25	50	19	40	28
21	8	17	25	20	35	17	9	15	26	15	23	38
22	15	9	20	19	19	24	21	12	34	29	39	33
23	9	8	49	20	21	18	23	16	38	26	31	18
24	8	13	35	29	30	0	13	10	0	22	26	9
25	19	10	17	10	19	28	18	22	44	23	29	15
26	23	14	16	20	17	30	19	7	34	39	19	25
27	10	23	22	0	25	18	15	48	39	22	37	19
28	7	13	33	26	22	27	11	39	21	17	25	30
29	2		24	17	24	27	8	35	0	17	44	33
30	11		15	16	30	13	16	26	14	25	39	27
31	12		5		37		21	19		17		24
Med	18,0	10,8	20,6	20,4	25,4	23,1	21,4	16,5	29,4	22,6	31,5	31,2

Si riportano i grafici relativi alla tabella degli accessi anno 2002:



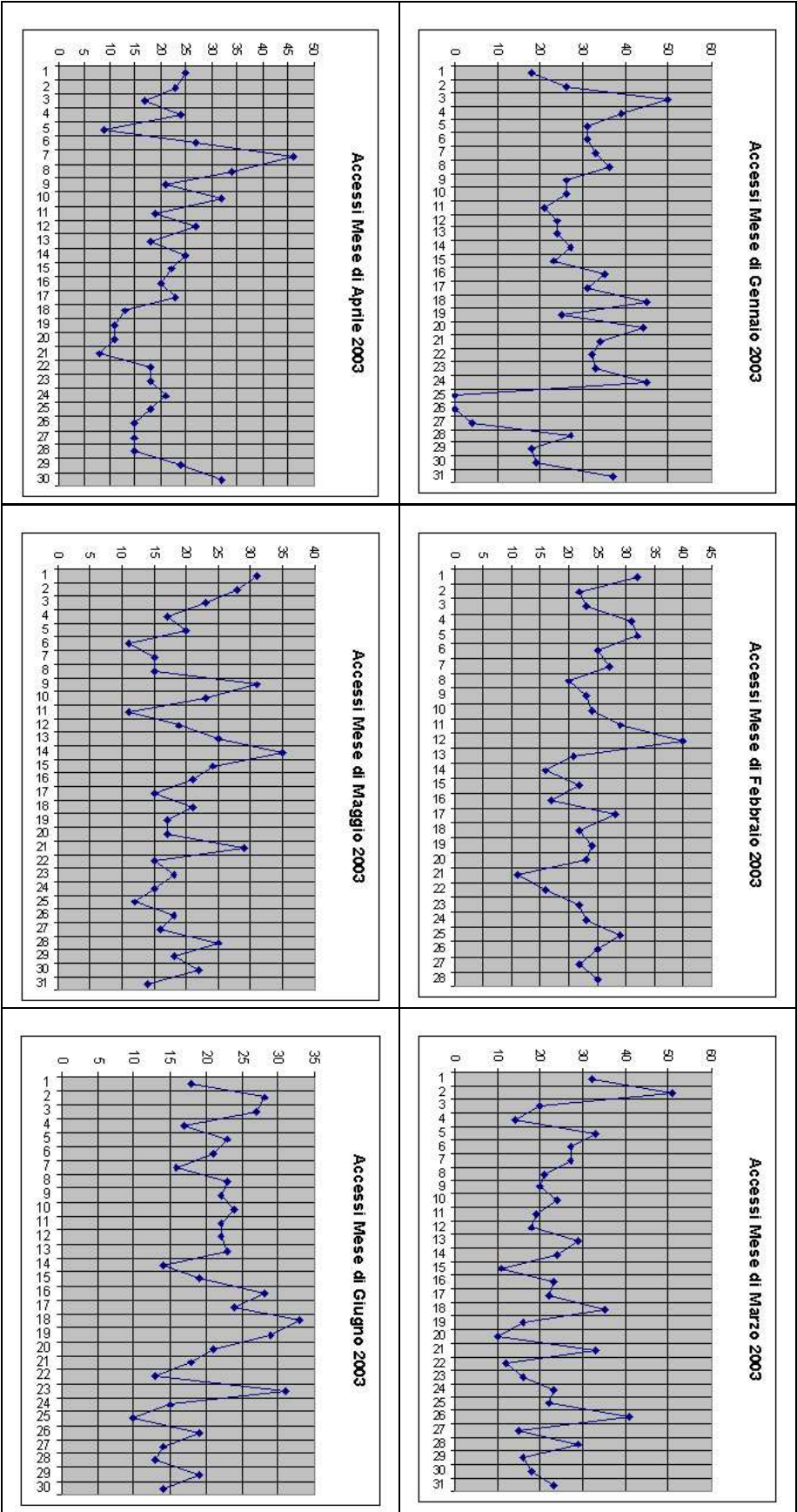


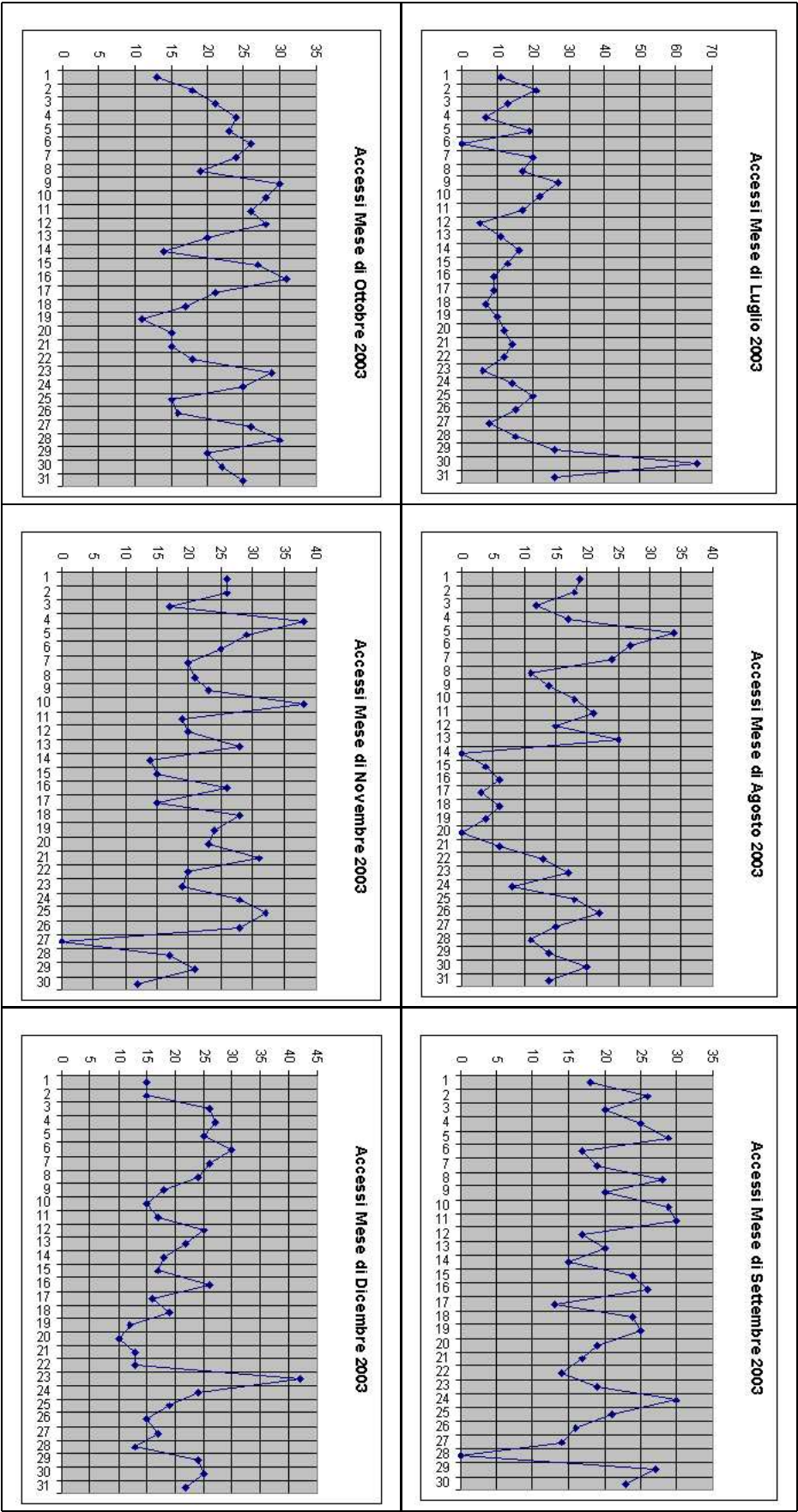


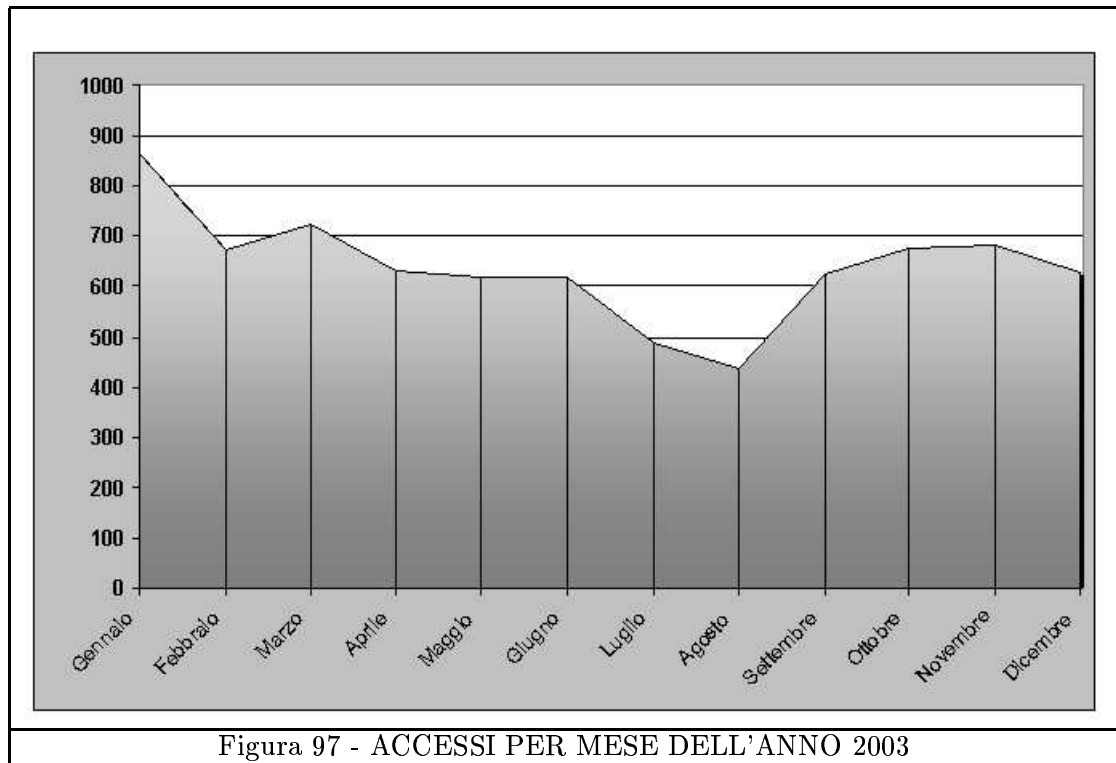
Accessi Anno 2003												
gg	G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D
1	18	32	32	25	31	18	11	19	18	13	26	15
2	26	22	51	23	28	28	21	18	26	18	26	15
3	50	23	20	17	23	27	13	12	20	21	17	26
4	39	31	14	24	17	17	7	17	25	24	38	27
5	31	32	33	9	20	23	19	34	29	23	29	25
6	31	25	27	27	11	21	0	27	17	26	25	30
7	33	27	27	46	15	16	20	24	19	24	20	26
8	36	20	21	34	15	23	17	11	28	19	21	24
9	26	23	20	21	31	22	27	14	20	30	23	18
10	26	24	24	32	23	24	22	18	29	28	38	15
11	21	29	19	19	11	22	17	21	30	26	19	17
12	24	40	18	27	19	22	5	15	17	28	20	25
13	24	21	29	18	25	23	11	25	20	20	28	22
14	27	16	24	25	35	14	16	0	15	14	14	18
15	23	22	11	22	24	19	13	4	24	27	15	17
16	35	17	23	20	21	28	9	6	26	31	26	26
17	31	28	22	23	15	24	9	3	13	21	15	16
18	45	22	35	13	21	33	7	6	24	17	28	19
19	25	24	16	11	17	29	10	4	25	11	24	12
20	44	23	10	11	17	21	12	0	19	15	23	10
21	34	11	33	8	29	18	14	6	17	15	31	13
22	32	16	12	18	15	13	12	13	14	18	20	13
23	33	22	16	18	18	31	6	17	19	29	19	42
24	45	23	23	21	15	15	14	8	30	25	28	24
25	0	29	22	18	12	10	20	18	21	15	32	19
26	0	25	41	15	18	19	15	22	16	16	28	15
27	4	22	15	15	16	14	8	15	14	26	0	17
28	27	25	29	15	25	13	15	11	0	30	17	13
29	18		16	24	18	19	26	14	27	20	21	24
30	19		18	32	22	14	66	20	23	22	12	25
31	37		23		14		26	14		25		22
Med	27.9	24.1	23.4	21.0	20.0	20.7	15.7	14.0	20.8	21.8	22.8	20.3



Si riportano i grafici relativi ala tabella degli accessi anno 2003:







## H.2 Listati MATLAB

### H.2.1 Stat1.m

%Statistica POISSONIANA (by Andrea Praticò 2003)

clc;

%Accessi ANNO 2002 ordinati per mese

x11=[17 18 29 23 30 20 11 9 5 6 80 54 25 14 14 ...

13 18 16 12 20 8 15 9 8 19 23 10 7 2 11 12];

%Gennaio

x12=[10 18 7 8 7 12 9 7 17 16 6 7 6 14 10 13 5 ...

9 6 8 17 9 8 13 10 14 23 13];

%Febbraio

x13=[25 29 24 15 20 14 18 20 23 17 18 22 17 13 ...

17 17 18 19 15 17 25 20 49 35 17 16 22 33 24 15 5];

%Marzo

x14=[3 13 16 20 23 9 10 28 5 19 44 66 16 7 32 ...

33 28 24 18 22 20 19 20 29 10 20 0 26 17 16];

%Aprile

x15=[26 18 18 21 21 27 19 25 23 27 21 17 30 19 ...

17 23 31 30 49 47 35 19 21 30 19 17 25 22 24 30 37];

%Maggio

x16=[17 26 26 29 22 33 31 13 23 27 31 32 19 28 ...

25 23 21 24 22 20 17 24 18 0 28 30 18 27 27 13];

%Giugno

x17=[32 37 15 18 25 28 18 29 22 27 29 31 16 33 ...

28 12 23 37 13 16 9 21 23 13 18 19 15 11 8 16 21];

%Luglio

x18=[9 18 0 0 6 19 8 21 19 14 9 15 17 8 4 14 15 ...

18 23 25 15 12 16 10 22 7 48 39 35 26 19];

%Agosto

x19=[24 22 43 26 30 18 28 25 23 19 22 33 38 32 ...

26 42 35 36 60 50 26 34 38 0 44 34 39 21 0 14];

%Settembre

x110=[15 24 26 21 18 26 14 25 17 8 19 25 29 19 ...

20 31 29 34 30 19 15 29 26 22 23 39 22 17 17 25 17];

%Ottobre

x111=[28 29 24 34 21 17 30 28 33 32 27 27 24 27 ...

```

        32 34 58 34 55 40 23 39 31 26 29 19 37 25 44 39];      %Novembre
x112=[33 36 39 32 28 36 25 25 38 32 33 37 21 53 ...
      69 39 26 39 27 28 38 33 18 9 15 25 19 30 33 27 24];    %Dicembre

```

```

%ANNO 2002 Complessivo
%x2002=[x11 x12 x13 x14 x15 x16 x17 x18 x19 x110 x111 x112];

```

```

%ANNO 2002 Ridotto
x2002=[x13 x15 x16 x110];

```

```

N02=size(x2002);
N02=N02(2);
mu02=mean(x2002);
sigma02=sqrt(mu02);
is02=floor(sigma02);
M02=max(x2002);
m02=min(x2002);
nbin02=floor(M02/is02);

```

```

cont=1;
for n=0:M02
    k=0;
    for i=1:N02
        if x2002(i)==n
            k=k+1;
        end
    end
    y02(cont)=k;
    cont=cont+1;
end

```

```

% Plottaggio dei Dati
figure;
x=0:1:M02;
bar(x,y02,'width',0.8);
title('Distribuzione Anno 2002 (Valori Assoluti)');
grid on;
hold on;
dist02=N02*poisspdf(x,mu02);
plot(x,dist02,'--rs','MarkerEdgeColor','k',...
      'MarkerFaceColor','m',...
      'MarkerSize',5);
hold off;

```

```

%Test del CHI Quadro
Ok=[8 56 48 11];
Ek=[3.9 54.8 59.1 5.2];

```

```

delta=Ok-Ek;
deltaq=delta.^2;

```

```
chi=deltaq./Ek;
chiquad02=sum(chi)
```

```
%Accessi ANNO 2003 ordinati per mese
```

```
x21=[18 26 50 39 31 31 33 36 26 26 21 24 24 27 ...
      23 35 31 45 25 44 34 32 33 45 0 0 4 27 18 19 37]; %Gennaio
x22=[32 22 23 31 32 25 27 20 23 24 29 40 21 16 ...
      22 17 28 22 24 23 11 16 22 23 29 25 22 25]; %Febbraio
x23=[32 51 20 14 33 27 27 21 20 24 19 18 29 24 ...
      11 23 22 35 16 10 33 12 16 23 22 41 15 29 16 18 23]; %Marzo
x24=[25 23 17 24 9 27 46 34 21 32 19 27 18 25 ...
      22 20 23 13 11 11 8 18 18 21 18 15 15 15 24 32]; %Aprile
x25=[31 28 23 17 20 11 15 15 31 23 11 19 25 35 ...
      24 21 15 21 17 17 29 15 18 15 12 18 16 25 18 22 14]; %Maggio
x26=[18 28 27 17 23 21 16 23 22 24 22 22 23 14 ...
      19 28 24 33 29 21 18 13 31 15 10 19 14 13 19 14]; %Giugno
x27=[11 21 13 7 19 0 20 17 27 22 17 5 11 16 13 ...
      9 9 7 10 12 14 12 6 14 20 15 8 15 26 66 26]; %Luglio
x28=[19 18 12 17 34 27 24 11 14 18 21 15 25 0 4 ...
      6 3 6 4 0 6 13 17 8 18 22 15 11 14 20 14]; %Agosto
x29=[18 26 20 25 29 17 19 28 20 29 30 17 20 15 ...
      24 26 13 24 25 19 17 14 19 30 21 16 14 0 27 23]; %Settembre
x210=[13 18 21 24 23 26 24 19 30 28 26 28 20 14 ...
      27 31 21 17 11 15 15 18 29 25 15 16 26 30 20 22 25]; %Ottobre
x211=[26 26 17 38 29 25 20 21 23 38 19 20 28 14 ...
      15 26 15 28 24 23 31 20 19 28 32 28 0 17 21 12]; %Novembre
x212=[15 15 26 27 25 30 26 24 18 15 17 25 22 18 ...
      17 26 16 19 12 10 13 13 42 24 19 15 17 13 24 25 22]; %Dicembre
```

```
%ANNO 2003 Complessivo
```

```
%x2003=[x21 x22 x23 x24 x25 x26 x27 x28 x29 x210 x211 x212];
```

```
%ANNO 2003 Ridotto
```

```
x2003=[x22 x25 x29 x210 x211 x212];
```

```
N03=size(x2003);
```

```
N03=N03(2);
```

```
mu03=mean(x2003);
```

```
sigma03=sqrt(mu03);
```

```
is03=floor(sigma03);
```

```
M03=max(x2003);
```

```
m03=min(x2003);
```

```
nbin03=floor(M03/is03);
```

```
cont=1;
```

```
for n=0:M03
```

```
    k=0;
```

```
    for i=1:N03
```

```

        if x2003(i)==n
            k=k+1;
        end
    end
    y03(cont)=k;
    cont=cont+1;
end

% Plottaggio dei Dati
figure;
x=0:1:M03;
bar(x,y03,'width',0.8);
title('Distribuzione Anno 2003 (Valori Assoluti)');
hold on;
dist03=N03*poisspdf(x,mu03);
plot(x,dist03,'--rs','MarkerEdgeColor','k',...
     'MarkerFaceColor','m',...
     'MarkerSize',5);
hold off;

%Test del CHI Quadro
Ok=[3 59 70 44 5];
Ek=[0.8 46 98.4 33.3 2.4];

delta=Ok-Ek;
deltaq=delta.^2;
chi=deltaq./Ek;
chiquad03=sum(chi)

```

**H.2.2 Stat2.m**

```

%Statistica GAUSSIANA (by Andrea Praticò 2003)
clc;
%Accessi ANNO 2003 ordinati per mese
x21=[18 26 50 39 31 31 33 36 26 26 21 24 24 27 ...
      23 35 31 45 25 44 34 32 33 45 0 0 4 27 18 19 37];      %Gennaio
x22=[32 22 23 31 32 25 27 20 23 24 29 40 21 16 ...
      22 17 28 22 24 23 11 16 22 23 29 25 22 25];          %Febbraio
x23=[32 51 20 14 33 27 27 21 20 24 19 18 29 24 ...
      11 23 22 35 16 10 33 12 16 23 22 41 15 29 16 18 23];  %Marzo
x24=[25 23 17 24 9 27 46 34 21 32 19 27 18 25 ...
      22 20 23 13 11 11 8 18 18 21 18 15 15 15 24 32];      %Aprile
x25=[31 28 23 17 20 11 15 15 31 23 11 19 25 35 ...
      24 21 15 21 17 17 29 15 18 15 12 18 16 25 18 22 14];  %Maggio
x26=[18 28 27 17 23 21 16 23 22 24 22 22 23 14 ...
      19 28 24 33 29 21 18 13 31 15 10 19 14 13 19 14];    %Giugno
x27=[11 21 13 7 19 0 20 17 27 22 17 5 11 16 13 ...
      9 9 7 10 12 14 12 6 14 20 15 8 15 26 66 26];          %Luglio
x28=[19 18 12 17 34 27 24 11 14 18 21 15 25 0 4 ...
      6 3 6 4 0 6 13 17 8 18 22 15 11 14 20 14];            %Agosto
x29=[18 26 20 25 29 17 19 28 20 29 30 17 20 15 ...
      24 26 13 24 25 19 17 14 19 30 21 16 14 0 27 23];      %Settembre
x210=[13 18 21 24 23 26 24 19 30 28 26 28 20 14 ...
      27 31 21 17 11 15 15 18 29 25 15 16 26 30 20 22 25];  %Ottobre
x211=[26 26 17 38 29 25 20 21 23 38 19 20 28 14 ...
      15 26 15 28 24 23 31 20 19 28 32 28 0 17 21 12];      %Novembre
x212=[15 15 26 27 25 30 26 24 18 15 17 25 22 18 ...
      17 26 16 19 12 10 13 13 42 24 19 15 17 13 24 25 22];  %Dicembre

%ANNO 2003 Complessivo
%x2003=[x21 x22 x23 x24 x25 x26 x27 x28 x29 x210 x211 x212];

%ANNO 2003 Ridotto
x2003=[x22 x23 x24 x25 x26 x29 x210 x211 x212];

xx=x2003;

N=size(xx);
N=N(2);
mu=mean(xx);          %Media
sigma=std(xx);         %Deviazione Standard (N-1)
M=max(xx);
m=min(xx);

cont=1;
for n=0:M
    k=0;
    for i=1:N
        if xx(i)==n
            k=k+1;
        end
    end
end

```

```

        end
        y(cont)=k;
        cont=cont+1;
    end

%Plottaggio dei Dati
figure;
x=0:1:M;
bar(x,y,'width',0.8);
    title('Distribuzione anno 2003 "Ridotto" (Valori Assoluti)');
hold on;
gauss=N*normpdf(x,mu,sigma);
plot(x,gauss,'--rs','MarkerEdgeColor','k',...
      'MarkerFaceColor','b',...
      'MarkerSize',5);

hold off;

%CHI Quadro
Ok=[55 114 78 25];
Ek=[51.2 113 79.7 27.6];

delta=Ok-Ek;
deltaq=delta.^2;
chi=deltaq./Ek;
chiquad=sum(chi)

```

### H.2.3 Gaussianam

```

%Gaussiana (by Andrea Praticò 2003)
%Calcolo dell'Error Function
%nell'intervallo [a,b]

a=30.5;
b=51.5;

za=(a-mu)/sigma;
zb=(b-mu)/sigma;

za=za/sqrt(2);
zb=zb/sqrt(2);

N*(erf(zb)-erf(za))/2

```



# Appendice I

## Metodo dei Trapezi

Si riporta il listato MATLAB 'trapez.m'

```
%Metodo dei Trapezi (by Andrea Praticò 2004)
```

```
a=1;    %Estremo inferiore  
b=2;    %Estremo Superiore
```

```
%n=Numero di Punti di Campionamento  
k=1;  
Ies=2*exp(0.5);  
for n=10:5:100
```

```
    delta=(b-a)/n; %Intervallo
```

```
    x=a:delta:b;  
    y=x.*exp(x./2);
```

```
    I=0;  
    for i=1:n  
        I=I+(y(i)+y(i+1))/2*delta;  
    end  
    ITp(k)=I;  
    epsilon(k)=abs((I-Ies)/Ies);  
    k=k+1;  
end
```

```
C=epsilon(1)/(1/100);
```

```
x=10:5:100;  
plot(x,epsilon,'r+')  
title('\epsilon in funzione di n');  
grid on;  
hold on;  
y=C./(x.^2);
```

```
plot(x,y,'bo')  
hold off;
```

## Appendice J

# Metodo Montecarlo

### J.1 Distribuzione Uniforme

Di seguito si riporta il listato MATLAB denominato MC1.m:

```
%Metodo Montecarlo
%Distribuzione Uniforme (by Andrea Praticò 2004)

a=1;
b=2;

Ies=2*exp(0.5); %Valore esatto dell'integrale

N=6; %Potenze di 10
M=40; %Iterazioni con lo stesso N

k=1;
for j=1:N
    for h=2:10;
        n=h*10^(j-1);
        nn(k)=n;
        for i=1:M
            R=rand(1,n);
            x=R*(b-a)+a;
            y=x.*exp(x./2);
            I(i)=(b-a)/n*sum(y);
            epsilonmc(i)=abs((I(i)-Ies)/Ies);
        end
        Imed(k)=mean(I);
        epsmed(k)=mean(epsilonmc);
        SDOMI(k)=std(I)/sqrt(M);
        SDOM(k)=std(epsilonmc)/sqrt(M);
        k=k+1;
    end
end

y=1./sqrt(nn); %Andamento Teorico dell'errore
rap=epsmed./y;
C=mean(rap); %Costante di Proporzionalità
```

```

%Plottaggio Integrale
figure;
barra(nn,Imed,zeros(N),SDOMI);
title(['Valore di ' 'I_{MC}' 'al variare di N']);
hold on;
line([1 10^N],[Ies Ies],'Color','r','LineStyle','--','LineWidth',2);
hold off;

%Plottaggio Errore
figure;
hold on;
for i=1:N
    semilogx(10^(i-1):10^(i-1):10^i),C./sqrt(10^(i-1):10^(i-1):10^i)), 'r');
end
barra(nn,epsmed,zeros(N),SDOM);
title('Andamento dell''Errore');
hold off;

```

## J.2 Distribuzione Simile

Di seguito si riporta il listato MATLAB denominato MC2.m:

```

%Metodo Montecarlo
%Distribuzione Simile (by Andrea Praticò 2004)

a=1;
b=2;

Ies=2*exp(0.5); %Valore esatto dell'integrale

N=6; %Potenze di 10
M=40; %Iterazioni con lo stesso N

f1=exp(1/2);
f2=2*exp(1);
A=[1 1;2 1];

Sol=A^(-1)*[f1;f2];

m=Sol(1);
q=Sol(2);

AA=(m/2*b^2+q*b-m/2*a^2-q*a);

alfa=(m/2)/AA;
beta=q/AA;

k=1;
for j=1:N
    for h=2:10;

```

```

n=h*10^(j-1);
nn(k)=n;
for i=1:M
    R=rand(1,n);
    gamma=-((m/2+q)/AA+R);
    Delta=beta^2-4*alfa.*gamma;
    x=(-beta+sqrt(Delta))/(2*alfa);
    y1=x.*exp(x./2);
    y2=(m*x+q)/AA;
    y=y1./y2;
    I(i)=1/n*sum(y);
    epsilonmc(i)=abs((I(i)-Ies)/Ies);
end
Imed(k)=mean(I);
epsmed(k)=mean(epsilonmc);
SDOMI(k)=std(I)/sqrt(M);
SDOM(k)=std(epsilonmc)/sqrt(M);
k=k+1;
end
end

y=1./sqrt(nn); %Andamento Teorico dell'errore
rap=epsmed./y;
C=mean(rap); %Costante di Proporzionalità

%Plottaggio Integrale
figure;
barra(nn,Imed,zeros(N),SDOMI);
title(['Valore di ' 'I_{MC}' ' 'al variare di N']);
hold on;
line([1 10^N],[Ies Ies],'Color','r','LineStyle','--','LineWidth',2);
hold off;

%Plottaggio Errore
figure;
hold on;
for i=1:N
    semilogx(10^(i-1):10^(i-1):10^i,C./sqrt(10^(i-1):10^(i-1):10^i),'r');
end
barra(nn,epsmed,zeros(N),SDOM);
title('Andamento dell''Errore');
hold off;

```

## **Appendice K**

### **Caratteristiche tecniche dell'Oscilloscopio Tektronix 2205**