

Capitolo 8

Funzioni di matrici

Data una funzione $f : C \longrightarrow C$ e una matrice $A \in M(C, n, n)$, vogliamo “calcolare” la funzione f nella matrice A , vogliamo cioè definire la matrice $f(A) \in M(C, n, n)$.

In particolare, data una matrice A di ordine n a coefficienti reali o complessi, vogliamo definire la matrice e^A . Quest’ultima matrice ci sarà utile in seguito nella risoluzione di sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. La forma canonica di Jordan ci sarà molto utile nel calcolo delle funzioni di matrici. Cominciamo con lo studio del caso in cui le funzioni siano polinomi.

8.1 Polinomi di matrici

Definizione 963 Sia K un campo. Sia $A \in M(K, n, n)$ e $p(x) \in K[x]$, quindi:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m \quad \text{con } a_i \in K \quad i = 0, \dots, m$$

Si definisce:

$$p(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_mA^m$$

dove I è la matrice identica di ordine n .

Nota 964 Se, data $A \in M(K, n, n)$, indichiamo con A^0 la matrice identica I di ordine n , possiamo scrivere la formula precedente nel seguente modo:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad p(A) = \sum_{i=0}^n a_i A^i$$

Esempio 965 Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad p(x) = 3 + 4x + 5x^2 + 6x^3$$

Si ha:

$$\begin{aligned} p(A) &= 3I + 4A + 5A^2 + 6A^3 = \\ &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 21 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 18 & 183 \\ 0 & 79 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 966 Data la matrice A dell'esempio precedente e dato il polinomio $p(x) = (3+x)^2$, calcolare $p(A)$.

Nota 967 Notiamo che, dati a e b in un campo K si ha

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Se però consideriamo al posto degli elementi a e b di K , matrici A e B di $M(K, n, n)$ si ha:

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

poichè, in generale, $AB \neq BA$. Non è possibile estendere al caso delle matrici le proprietà degli elementi di K .

Nel caso però dei polinomi di matrici non si hanno problemi. Si consideri, per esempio:

$$p(x) = (3+x)^2$$

Si ha:

$$p(A) = (3I + A)^2$$

Infatti:

$$p(x) = (3+x)^2 = 9 + 6x + x^2 \quad \text{quindi} \quad p(A) = 9I + 6A + A^2$$

D'altronde si ha:

$$(3I + A)^2 = (3I + A)(3I + A) = 9I^2 + A(3I) + (3I)A + A^2 = 9I + 6A + A^2$$

Più in generale, nel calcolo del polinomio di una matrice, possiamo sfruttare le usuali proprietà dei polinomi perchè le matrici $I, A, A^2, \dots, A^m, \dots$ commutano tra loro.

Esercizio 968 Data la matrice A dell'esempio 965, e il polinomio $p(x) = (x-1)(x-2)$, calcolare $p(A)$.

Esempio 969 Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad p(x) = 3 + 4x + 5x^2 + 6x^3$$

Si ha:

$$\begin{aligned} p(A) &= 3I + 4A + 5A^2 + 6A^3 = \\ &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} p(1) & 0 \\ 0 & p(2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Teorema 970 [Generalizzazione dell'esempio precedente] Sia:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

e sia $p(x) \in K[x]$. Allora si ha:

$$p(A) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. \square

Teorema 971 Siano date A e B in $M(K, n, n)$ e sia dato $p(x) \in K[x]$. Allora:

$$B = M^{-1}AM \implies p(B) = M^{-1}p(A)M$$

Quindi:

$$A \sim B \implies p(A) \sim p(B)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$. Allora $p(B) = a_0I + a_1B + a_2B^2 + \dots + a_mB^m =$
 $= a_0M^{-1}IM + a_1M^{-1}AM + a_2M^{-1}A^2M + \dots + a_mM^{-1}A^mM =$
 $= M^{-1}a_0IM + M^{-1}a_1AM + M^{-1}a_2A^2M + \dots + M^{-1}a_mA^mM =$
 $= M^{-1}(a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_mA^m)M = M^{-1}p(A)M. \quad \square$

Esempio 972 Consideriamo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad p(x) = 3 + 4x + 5x^2 + 6x^3$$

In 965 abbiamo già calcolato la matrice $p(A)$.

Vogliamo ora calcolare di nuovo $p(A)$ utilizzando il teorema 971. Si verifica facilmente (esercizio) che si ha:

$$A' = M^{-1}AM$$

con

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo allora:

$$A = MA'M^{-1}$$

Applicando il teorema 971 otteniamo:

$$p(A) = Mp(A')M^{-1}$$

Abbiamo già calcolato la matrice $p(A')$ in 969. Calcolando la matrice M^{-1} e calcolando il prodotto di tre matrici, otteniamo la matrice $p(A)$.

Esempio 973 Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

e sia dato $p(x) = 3 - 5x + 4x^3$. Vogliamo calcolare $p(A)$.

Per fare ciò possiamo utilizzare il calcolo diretto (esercizio). Possiamo però anche utilizzare il teorema 971 e il teorema 970. Notiamo infatti che A ha tutti gli autovalori distinti, quindi A è diagonalizzabile. Si ha:

$$A \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad p(B) = \begin{pmatrix} p(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p(5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(8) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(10) \end{pmatrix}$$

Inoltre $B = M^{-1}AM$, dove M è la matrice di passaggio dalla base canonica di R^4 ad una base di autovettori per l'endomorfismo di R^4 associato alla matrice A relativamente alla base canonica. Si lascia come esercizio il calcolo di M . Quindi $A = MBM^{-1}$. Da cui $p(A) = Mp(B)M^{-1}$.

Notiamo che, se il calcolo di $p(B)$ ha richiesto pochissimo dispendio di tempo, non altrettanto può dirsi per il calcolo di $p(A)$. Si deve infatti determinare innanzitutto la matrice M , quindi la sua inversa ed infine il prodotto di tre matrici.

Esercizio 974 Dati

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 & 2001 \\ 0 & 5 & 370 & 32 \\ 0 & 0 & 8 & 4,1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad p(x) = 1 + 3x + 7x^3$$

calcolare il rango di $p(A)$.

Suggerimento. Gli orribili numeri della matrice dovrebbero suggerire il fatto che ci deve essere un metodo per evitare di fare molti calcoli.

Ulteriore suggerimento. Notare che a noi interessa calcolare solamente il rango della matrice $p(A)$.

Nota 975 Abbiamo dato un algoritmo per calcolare la matrice $p(A)$ quando $p(x)$ è un polinomio e A è una matrice diagonalizzabile. Vogliamo dare un algoritmo per calcolare $p(A)$ nel caso in cui A sia una matrice jordanizzabile.

Esercizio 976 Sia dato il polinomio $p(x) = 3 + 2x - 4x^2 + x^3 + 2x^4$ e sia A un blocco di Jordan di lunghezza 2 relativo all'autovalore 0. Calcolare $p(A)$.

Esercizio 977 Sia dato il polinomio $p(x) = 3 + 2x - 4x^2 + x^3 + 2x^4$ e sia B un blocco di Jordan di lunghezza 3 relativo all'autovalore 0. Calcolare $p(B)$.

Esercizio 978 Sia dato il polinomio $p(x) = 3 + 2x - 4x^2 + x^3 + 2x^4$ e sia C un blocco di Jordan di lunghezza 4 relativo all'autovalore 0. Calcolare $p(C)$.

Teorema 979 Sia A un blocco di Jordan di ordine n relativo all'autovalore 0:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

e sia dato il polinomio $p(x) \in K[x]$:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

con $m \geq n$.

Si ha allora:

$$p(A) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

dove abbiamo eventualmente posto $a_i = 0$ per $i > n$.

La matrice $p(A)$ è cioè una matrice triangolare superiore avente a_0 sulla diagonale principale, a_1 sulla linea subito superiore ad essa, a_2 sulla linea successiva e così via, fino ad arrivare all'elemento di posto $1, n$ che è uguale a a_{n-1} .

DIMOSTRAZIONE. Si ha:

$$p(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_mA^m$$

Notiamo che la matrice I ha 1 sulla diagonale principale e 0 in tutti gli altri posti. La matrice A ha 0 sulla diagonale principale, 1 sulla linea subito superiore ad essa e 0 in tutti gli altri posti. Si verifica facilmente che la matrice A^2 ha 0 sulla diagonale principale, 0 sulla linea subito superiore ad essa, 1 sulla linea successiva e 0 in tutti gli altri posti. Analogamente la matrice A^3 ha 0 sulla diagonale principale, 0 sulla linea subito superiore ad essa, 0 sulla linea successiva, 1 sulla linea successiva e 0 in tutti gli altri posti. E così via per le

potenze successive di A , fino ad arrivare alla matrice A^{n-1} che ha l'elemento di posto $1, n$ uguale a 1 e tutti gli altri uguali a 0. La matrice A^n e tutte le potenze successive di A sono la matrice nulla. Da tutto ciò deriva che la matrice $p(A)$ è una matrice triangolare (infatti I, A, A^2, \dots, A^m sono tutte matrici triangolari). La matrice $p(A)$ ha poi a_0 sulla diagonale principale; infatti tra le matrici I, A, A^2, \dots, A^m , l'unica che ha elementi non nulli sulla diagonale principale è la matrice I . Gli elementi di $p(A)$ appartenenti alla linea subito superiore alla diagonale principale sono tutti uguali a a_1 ; infatti tra le matrici I, A, A^2, \dots, A^m , l'unica che ha elementi non nulli su tale linea è la matrice A . In modo analogo si calcolano gli altri elementi della matrice $p(A)$. Abbiamo dimostrato quel che volevamo. \square

Nota 980 Nel teorema precedente abbiamo imposto, per ragioni di semplicità, che il grado n del polinomio $p(x)$ sia maggiore o uguale all'ordine n della matrice A . Se il polinomio dovesse avere grado minore di n , ci si riporterebbe al caso precedente ponendo $a_{m+1} = \dots = a_n = 0$.

Esercizio 981 Sia dato il polinomio $p(x) = 3 + 2x - 4x^2 + x^3 + 2x^4$ e sia A un blocco di Jordan di lunghezza 2 relativo all'autovalore 2. Calcolare $p(A)$.

Esercizio 982 Sia dato il polinomio $p(x) = 3 + 2x - 4x^2 + x^3 + 2x^4$ e sia B un blocco di Jordan di lunghezza 3 relativo all'autovalore 2. Calcolare $p(B)$.

Esercizio 983 Sia dato il polinomio $p(x) = 3 + 2x - 4x^2 + x^3 + 2x^4$ e sia C un blocco di Jordan di lunghezza 4 relativo all'autovalore 2. Calcolare $p(C)$.

Teorema 984 Sia B un blocco di Jordan di ordine n relativo all'autovalore λ :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

e sia dato il polinomio $p(x) \in K[x]$:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

Sia poi $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m = p(x + \lambda)$. Si ha allora:

$$p(B) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 \end{pmatrix}$$

La matrice $p(B)$ è cioè una matrice triangolare superiore avente b_0 sulla diagonale principale, b_1 sulla linea subito superiore ad essa, b_2 sulla linea successiva

e così via, fino ad arrivare all'elemento di posto $1, n$ che è uguale a b_{n-1} .

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare il teorema potremmo svolgere i calcoli direttamente. Preferiamo però utilizzare ciò che abbiamo dimostrato nel teorema 979.

Dato infatti $q(x) \in K[x]$ e A blocco di Jordan di lunghezza n relativo all'autovalore 0, il calcolo di $q(A)$ è molto semplice. Notiamo innanzitutto che, avendo indicato con A il blocco di Jordan di lunghezza n relativo all'autovalore 0, si ha:

$$B - \lambda I = A$$

Consideriamo allora il polinomio:

$$q(x) = p(x + \lambda)$$

Si ha allora:

$$q(x - \lambda) = p(x)$$

e quindi:

$$p(B) = q(B - \lambda I) = q(A)$$

Applicando il teorema 979 abbiamo la tesi. \square

Nota 985 Il problema si riduce quindi al calcolo dei coefficienti b_i del polinomio $q(x)$. A tal proposito ricordiamo che, dato:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$$

si ha:

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m = p(x + \lambda)$$

A titolo di esempio calcoliamo b_0 e b_1 . Otteniamo:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_m\lambda^m \\ b_1 &= a_1 + 2a_2\lambda + 3a_3\lambda^2 + \cdots + ma_m\lambda^{m-1} \end{aligned}$$

Non scriviamo esplicitamente gli altri coefficienti di $q(x)$. Vi è infatti un modo semplice per ricordarli.

Sia infatti $K = C$. Dalla formula:

$$q(x - \lambda) = p(x)$$

segue che i coefficienti di $q(x)$ sono i coefficienti del polinomio di Taylor relativo a λ di $p(x)$. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} b_0 &= p(\lambda) \\ b_1 &= p'(\lambda) \\ b_2 &= \frac{1}{2!}p^{(2)}(\lambda) \\ &\vdots \\ b_m &= \frac{1}{m!}p^{(m)}(\lambda) \end{aligned}$$

Possiamo riassumere tutto ciò nel seguente teorema.

Teorema 986 Sia B un blocco di Jordan di ordine n relativo all'autovalore λ e sia dato il polinomio $p(x) \in C[x]$:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$$

Si ha allora:

$$p(B) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

dove:

$$\begin{aligned} b_0 &= p(\lambda) \\ b_1 &= p'(\lambda) \\ b_2 &= \frac{1}{2!}p^{(2)}(\lambda) \\ &\vdots \\ b_{n-1} &= \frac{1}{(n-1)!}p^{(n-1)}(\lambda) \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 987 Sia $A \in M(K, n, n)$ una matrice a blocchi. Siano B_1, \dots, B_r i blocchi di A . Indichiamo tutto ciò con l'usuale simbolo:

$$A = bl(B_1, \dots, B_r)$$

1) Per ogni intero positivo i si ha:

$$A^i = bl(B_1^i, \dots, B_r^i)$$

2) Sia $p(x) \in K[x]$. Allora:

$$p(A) = bl(p(B_1), \dots, p(B_r))$$

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. \square

Teorema 988 Sia $A \in M(K, n, n)$ e sia $p(x) \in K[x]$. Supponiamo che A sia jordanizzabile in K .

Sia $A' = M^{-1}AM$ con A' matrice di Jordan. La matrice A' sia formata dai blocchi di Jordan B_1, \dots, B_p .

Allora

$$p(A) = Mp(A')M^{-1}$$

e $p(A')$ è una matrice a blocchi. I suoi blocchi sono $p(B_1), \dots, p(B_p)$.

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. \square

Nota 989 Abbiamo visto nel teorema 986 che il calcolo di un polinomio su un blocco di Jordan è molto semplice. Il teorema precedente può quindi essere di grosso aiuto.

Esercizio 990 Siano dati il polinomio $p(x) = 1 + 3x^2 + 5x^{100}$ e la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare la matrice $p(A)$.

Esercizio 991 Data la matrice A dell'esercizio precedente, sia $p_A(x)$ il polinomio caratteristico di A . Calcolare $p_A(A)$.

Teorema 992 Sia A un blocco di Jordan di ordine n relativo all'autovalore λ . Sia $p_A(x)$ il polinomio caratteristico di A . Si ha:

$$p_A(A) = 0$$

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. \square

Teorema 993 [Teorema di Hamilton¹-Cayley²] Sia $A \in M(K, n, n)$ e $p_A(x)$ il polinomio caratteristico di A . Si ha:

$$p_A(A) = 0$$

DIMOSTRAZIONE. Omettiamo la dimostrazione per ogni matrice A .

Diamo invece la dimostrazione per ogni matrice A jordanizzabile.

Sia $A' = M^{-1}AM$ con A' matrice di Jordan. La matrice A' sia formata dai blocchi di Jordan B_1, \dots, B_p . Per ogni $i = 1, \dots, p$ il blocco B_i sia di lunghezza s_i e sia relativo a λ_i . Da ciò segue che si ha:

$$p_A(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{s_1} \dots (x - \lambda_p)^{s_p}$$

Dal teorema 988 segue che si ha:

$$p_A(A) = Mp_A(A')M^{-1}$$

e $p_A(A')$ è una matrice a blocchi. I suoi blocchi sono $p_A(B_1), \dots, p_A(B_p)$.

Per ogni $i = 1, \dots, p$ si ha:

$$p_A(B_i) = (-1)^n (B_i - \lambda_1 I)^{s_1} \dots (B_i - \lambda_i I)^{s_i} \dots (B_i - \lambda_p I)^{s_p}$$

Ma per teorema 992 si ha:

$$(B_i - \lambda_i I)^{s_i} = 0$$

e quindi, per ogni $i = 1, \dots, p$ si ha:

$$p_A(B_i) = 0$$

Ma allora la matrice $p(A')$ è formata da blocchi tutti nulli, quindi:

$$p_A(A') = 0 \implies p_A(A) = Mp_A(A')M^{-1} = M0M^{-1} = 0$$

Abbiamo dimostrato quel che volevamo. \square

Nota 994 Ricordiamo che abbiamo dimostrato il teorema solo per matrici jordanizzabili. In particolare abbiamo quindi dimostrato il teorema per ogni matrice $A \in M(C, n, n)$.

¹**sir William Rowan Hamilton**, (1805-1865), matematico e astronomo irlandese.

²**Arthur Cayley**, (1821, 1895), matematico inglese.

8.2 Polinomi annullatori

Definizione 995 Sia $A \in M(K, n, n)$. Un polinomio non nullo $p(x) \in K[x]$ si dice **polinomio annullatore** di A se e solo se $p(A) = 0$.

Nota 996 Il teorema di Hamilton-Cayley (vedere 993) ci dice che il polinomio caratteristico di una matrice è polinomio annullatore della matrice. Ci si chiede se, data A , esista qualche polinomio annullatore di A di grado minore dell'ordine della matrice.

Esempio 997 La matrice I di ordine 2 ha come polinomio caratteristico $p(x) = (1 - x)^2$. Si ha:

$$p(I) = I - 2I + I^2 = 0$$

Ma vi è un polinomio annullatore di I di grado minore di 2.

Esso è $q(x) = x - 1$. Infatti $q(I) = I - I = 0$.

Esempio 998 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si tratta di una matrice di Jordan con due blocchi con autovalore 0, uno di ordine 2 e uno di ordine 1, e un blocco di ordine 1 con autovalore 1. Quindi la matrice A ha come autovalore $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica 3 (è la somma degli ordini dei blocchi di Jordan con autovalore λ_1), molteplicità geometrica 2 (è il numero dei blocchi con autovalore λ_1) e indice 2 (è l'ordine massimo dei blocchi con autovalore λ_1). L'altro autovalore di A è $\lambda_2 = 1$ con molteplicità algebrica, molteplicità geometrica e indice uguali a 1.

Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (-1)^3 \lambda^3 (1 - \lambda) = \lambda^3 (\lambda - 1)$. Anche se sappiamo che si ha $p_A(A) = 0$, calcoliamocelo lo stesso:

$$p_A(A) = A^3(A - I)$$

Potremmo fare direttamente i calcoli. Calcoliamo invece $p_A(A)$ utilizzando un altro metodo che, in questo particolare caso, può sembrare artificioso e lungo. Tale metodo è però generalizzabile a qualsiasi tipo di matrice e quindi ci tornerà molto utile in seguito.

Pensiamo la matrice A come un endomorfismo di R^4 . Più precisamente, sia η l'endomorfismo di R^4 associato alla matrice A relativamente alla base canonica. L'endomorfismo associato alla matrice $p_A(A)$ è quindi:

$$\eta^3 \circ (\eta - I)$$

Dobbiamo dimostrare che tale endomorfismo è l'endomorfismo nullo. Abbiamo visto che gli autovalori di η sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Consideriamo allora, come siamo soliti:

$$\eta_1 = \eta - \lambda_1 I = \eta \quad \text{e} \quad \eta_2 = \eta - \lambda_2 I = \eta - I$$

Abbiamo quindi:

$$\eta^3 \circ (\eta - I) = \eta_1^3 \circ \eta_2$$

Dobbiamo dimostrare che si ha:

$$\eta_1^3 \circ \eta_2 = 0$$

Ricordiamo inoltre che si ha:

$$R^4 = E'(\lambda_1) \oplus E'(\lambda_2)$$

dove $E'(\lambda_1)$ è l'autospazio generalizzato relativo all'autovalore λ_1 e analogamente per $E'(\lambda_2)$. Poiché λ_1, λ_2 hanno rispettivamente indice 2 e 1, si ha:

$$E'(\lambda_1) = \ker \eta_1^2, \quad E'(\lambda_2) = \ker \eta_2$$

Per dimostrare che $\eta_1^3 \circ \eta_2$ è l'endomorfismo nullo, cominciamo con applicare η_2 a $R^4 = E'(\lambda_1) \oplus E'(\lambda_2)$. Dalla formula precedente segue

$$\eta_2(E'(\lambda_2)) = 0$$

Si verifica facilmente (analizzare la matrice associata a η_2) che l'endomorfismo η_2 è un isomorfismo su $E'(\lambda_1)$. Quindi η_2 ha annullato $E'(\lambda_2)$ mentre ha lasciato pressochè inalterato $E'(\lambda_1)$. Ma ora entra in azione η_1^3 . Poiché $E'(\lambda_1) = \ker \eta_1^2 = \ker \eta_1^3$ si ha:

$$\eta_1^3(E'(\lambda_1)) = 0$$

Quindi il sottospazio $E'(\lambda_1)$ che, al contrario di $E'(\lambda_2)$, aveva resistito a η_2 , non riesce a resistere a η_1^3 . Quindi l'azione successiva di η_2 e di η_1^3 annulla tutto R^4 . Abbiamo dimostrato quel che volevamo.

In effetti un'analisi più accurata del procedimento usato ci fa vedere che per distruggere $E'(\lambda_1)$ è sufficiente η_1^2 . Si ha cioè:

$$\eta_1^2 \circ \eta_2 = 0$$

da cui segue

$$A^2(A - I) = 0$$

e quindi il polinomio

$$q(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)$$

è un polinomio annullatore di A . Abbiamo trovato un polinomio annullatore di grado minore dell'ordine della matrice.

8.3 Polinomio minimo

Data una matrice $A \in M(K, n, n)$, viene spontaneo cercare polinomi annullatori di A di grado minimo.

Notiamo che, se $p(\lambda)$ è un polinomio annullatore di A , per ogni $k \neq 0$ di K si ha che $kp(\lambda)$ è un polinomio annullatore di A . Da ciò segue che di polinomi annullatori di A dello stesso grado ve ne sono almeno tanti quanti sono gli elementi di K . Poniamo allora la seguente:

Definizione 999 Data una matrice $A \in M(K, n, n)$, un polinomio $m(\lambda)$ si dice **polinomio minimo di A** se e solo se esso verifica le seguenti tre condizioni:

- 1) il polinomio $m(\lambda)$ è polinomio annullatore di A ; cioè $m(\lambda) \neq 0$, $m(A) = 0$;
- 2) il polinomio $m(\lambda)$ è un polinomio **monico**; cioè il coefficiente del termine di grado massimo di $m(\lambda)$ è uguale a 1;
- 3) se $p(\lambda)$ è un polinomio annullatore di A , allora il grado di $p(\lambda)$ è maggiore o uguale al grado di $m(\lambda)$.

Nota 1000 La proprietà 3) può anche essere scritta nel seguente modo:

3') se $p(\lambda)$ ha grado minore del grado di $m(\lambda)$ e se $p(A) = 0$, allora $p(\lambda) = 0$.

Teorema 1001 Data $A \in M(K, n, n)$, esiste ed è unico il polinomio minimo. Tale polinomio minimo viene di solito indicato con $m(\lambda)$. Se si vuole mettere in risalto che si tratta del polinomio minimo della matrice A , si usa il simbolo $m_A(\lambda)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia P l'insieme dei polinomi monici annullatori di A . Questo insieme è non vuoto. Infatti il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ di A annulla la matrice A (teorema di Hamilton-Cayley). Il coefficiente di grado massimo di $p(\lambda)$ è uguale a $(-1)^n$ (vedere [A.V.], capitolo 2, definizione 10.10) e quindi il polinomio $(-1)^n p(\lambda)$ è monico ed annulla A . Tra tutti i polinomi di P prendiamo quelli di grado minimo. Essi verificano le tre condizioni richieste. Dimostriamo che di tali polinomi ve ne è uno solo. Siano $m(\lambda)$ e $m'(\lambda)$ due di tali polinomi. Essi hanno ovviamente lo stesso grado. La loro differenza $d(\lambda) = m(\lambda) - m'(\lambda)$ annulla A . Inoltre $m(\lambda)$ e $m'(\lambda)$, essendo monici, hanno il coefficiente del termine di grado massimo uguale. Quindi il grado del polinomio $d(\lambda)$ è minore del grado di $m(\lambda)$. Ma allora $d(\lambda) = 0$. Da cui la tesi. \square

Teorema 1002 [Divisione con resto tra polinomi] Dato un campo K , sia $K[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in K . Sia $g(x) \in K[x]$, con $g(x)$ un polinomio di grado maggiore o uguale a 1. Allora, dato $f(x) \in K[x]$, esistono e sono unici $q(x) \in K[x]$ e $r(x) \in K[x]$ tali che:

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x) \quad \text{con grado } r(x) < \text{grado } g(x)$$

DIMOSTRAZIONE. La omettiamo. \square

Nota 1003 Abbiamo omissso la dimostrazione. Ad ogni modo siamo abituati fin dalle scuole a svolgere le divisioni con resto tra polinomi.

Teorema 1004 Data $A \in M(K, n, n)$ sia $m(x)$ il polinomio minimo di A . Se $p(x) \in K[x]$ è tale che $p(A) = 0$, si ha che $p(x)$ è divisibile per $m(x)$; esiste cioè $q(x) \in K[x]$ tale che $p(x) = m(x) \cdot q(x)$.

DIMOSTRAZIONE. Dividiamo il polinomio $p(x)$ per $m(x)$. Abbiamo:

$$p(x) = q(x) \cdot m(x) + r(x) \quad \text{con grado } r(x) < \text{grado } m(x)$$

Abbiamo quindi:

$$p(A) = q(A) \cdot m(A) + r(A)$$

Da $p(A) = m(A) = 0$ segue $r(A) = 0$. Ma, poiché il grado di $r(x)$ è minore del grado del polinomio annullatore $m(x)$, si ha $r(x) = 0$. Da ciò segue la tesi. \square

Teorema 1005 Matrici simili hanno lo stesso polinomio minimo.

DIMOSTRAZIONE. Sia $A \sim B \in M(K, n, n)$. Quindi esiste una matrice $M \in GL(K, n, n)$ tale che $B = M^{-1}AM$. Sia $m(\lambda)$ il polinomio minimo di A .

Dimostriamo che esso è anche polinomio minimo di B . Devono essere verificate le tre proprietà che caratterizzano il polinomio minimo.

1) Dimostriamo che si ha $m(B) = 0$. Si ha:

$$m(B) = m(M^{-1}AM) = (\text{teorema 971}) M^{-1}m(A)M = 0, \text{ poiché } m(A) = 0.$$

2) Ovviamente $m(\lambda)$ è monico.

3) Sia $p(\lambda) \neq 0$ tale che $p(B) = 0$. Dobbiamo dimostrare che il grado di $p(\lambda)$ è maggiore o uguale del grado di $m(\lambda)$. Si ha:

$$p(A) = p(MBM^{-1}) = Mp(B)M^{-1} = 0. \text{ Da cui, essendo } m(\lambda) \text{ polinomio minimo di } A, \text{ segue che il grado di } p(\lambda) \text{ è maggiore o uguale del grado di } m(\lambda).$$

\square

Nota 1006 Dalla proposizione precedente segue che si può parlare di polinomio minimo di un endomorfismo su uno spazio vettoriale E di dimensione finita. Infatti, fissate due qualsiasi basi di E le matrici associate all'endomorfismo relativamente alle due basi sono simili e quindi hanno lo stesso polinomio minimo. Questo polinomio minimo viene detto **polinomio minimo dell'endomorfismo**.

Il seguente teorema ci dà un algoritmo per calcolare il polinomio minimo di una matrice jordanizzabile.

Teorema 1007 Sia A una matrice jordanizzabile di $M(K, n, n)$. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ i suoi autovalori (la somma delle loro molteplicità algebriche è quindi uguale a n). Siano m_1, m_2, \dots, m_r gli indici di tali autovalori (ricordiamo che l'indice di λ_i è uguale all'ordine massimo dei blocchi con autovalore λ_i della matrice A' jordanizzata della matrice A). Allora il polinomio minimo $m(\lambda)$ di A è:

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $m(\lambda)$ il polinomio minimo di A . Sia $p(\lambda)$ il polinomio caratteristico di A . Poiché per il teorema di Hamilton-Cayley (vedere 993) si ha $p(A) = 0$, dal teorema 1004 segue

$$p(\lambda) = m(\lambda) \cdot q(\lambda)$$

Da ciò segue che le radici di $m(\lambda)$ sono radici di $p(\lambda)$. Esse sono quindi autovalori di A .

D'altronde, poiché il polinomio caratteristico ha tutte le radici in K , dalla formula precedente segue anche che il polinomio $m(\lambda)$ ha tutte le radici in K .

Ricordiamo poi che il polinomio minimo è, per definizione, monico. Da tutto ciò segue che si ha:

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1} (\lambda - \lambda_2)^{s_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{s_r} \quad \text{con } 0 \leq s_i$$

Dimostriamo ora che, se $s_i = m_i$ per $i = 1, 2, \dots, r$, allora $m(A) = 0$ e che, se esiste almeno un i tale che $s_i < m_i$, allora $m(A) \neq 0$. Una volta dimostrato ciò avremo dimostrato il teorema. Per dimostrare il primo fatto utilizziamo il metodo descritto nell'esempio 998. Dobbiamo dimostrare che si ha:

$$(A - \lambda_1 I)^{m_1} (A - \lambda_2 I)^{m_2} \dots (A - \lambda_r I)^{m_r} = 0$$

Sia η l'endomorfismo di R^n associato alla matrice A relativamente alla base canonica di R^n . Per ogni $i = 1, 2, \dots, r$ sia

$$\eta_i = \eta - \lambda_i I$$

Dobbiamo dimostrare che si ha:

$$(\eta_1)^{m_1} \circ (\eta_2)^{m_2} \circ \dots \circ (\eta_r)^{m_r} = 0 \quad (8.1)$$

Sappiamo che si ha:

$$R^n = E'(\lambda_1) \oplus E'(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E'(\lambda_r)$$

Inoltre

$$E'(\lambda_i) = \ker \eta_i^{m_i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, r$$

Quindi $\eta_i^{m_i}$ annulla $E'(\lambda_i)$. Da ciò segue 8.1. Dobbiamo ora dimostrare che, se per qualche i si ha $s_i < m_i$, allora

$$(\eta_1)^{s_1} \circ (\eta_2)^{s_2} \circ \dots \circ (\eta_r)^{s_r} \neq 0 \quad (8.2)$$

Supponiamo, per fissare le idee che sia $i = 1$. Ricordiamo che, per ogni i si ha che η_i è un isomorfismo su $E'(\lambda_j)$ per $j \neq i$. Quindi, in particolare, ogni η_i con $i \neq 1$, e tutte le sue potenze sono isomorfismi su $E'(\lambda_1)$. Inoltre poiché $s_1 < m_1$ si ha $\ker \eta_1^{s_1} \subset \ker \eta_1^{m_1} = E'(\lambda_1)$ e $\ker \eta_1^{s_1} \neq E'(\lambda_1)$: Quindi $\eta_1^{s_1}$ non annulla $E'(\lambda_1)$. Abbiamo quindi dimostrato la 8.2. \square

Esercizio 1008 Determinare una matrice reale di ordine 2 avente come polinomio minimo $\lambda^2 - 1$.

Esercizio 1009 Determinare una matrice reale A di ordine 3 avente come polinomio minimo $\lambda^2 - 1$.

Esercizio 1010 Determinare una matrice reale B di ordine 3 avente come polinomio minimo $\lambda^2 - 1$ che non sia simile alla matrice A determinata nell'esercizio precedente.

Nota 1011 Il teorema 1007 ci ha dato un algoritmo per calcolare il polinomio minimo di matrici jordanizzabili. Siamo quindi in grado di calcolare il polinomio di ogni matrice a coefficienti in un campo algebricamente chiuso. Non siamo però ancora in grado di calcolare il polinomio minimo di ogni matrice a coefficienti reali. Il seguente teorema però ci viene in aiuto.

Teorema 1012 Sia $A \in M(R, n, n)$. Si ha allora:

1) Se $\mu \in C - R$ è un autovalore di A con indice m (si pensi A come matrice a coefficienti complessi), allora anche $\bar{\mu}$ è autovalore di A con indice m .

2) Siano:

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ gli autovalori reali di A con indici m_1, \dots, m_r rispettivamente;

$\mu_1 = a_1 + ib_1, \bar{\mu}_1 = a_1 - ib_1, \dots, \mu_s = a_s + ib_s, \bar{\mu}_s = a_s - ib_s$ le coppie di autovalori complessi coniugati non reali con indici n_1, \dots, n_s rispettivamente. Si ha allora che il polinomio minimo di A in R è:

$$m(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_r)^{m_r} ((x - a_1)^2 + b_1^2)^{n_1} \dots ((x - a_s)^2 + b_s^2)^{n_s}$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione di 1) viene omessa.

La dimostrazione di 2) è immediata una volta che si è notato che il polinomio minimo di A in C è un polinomio a coefficienti reali. Esso è quindi polinomio minimo di A in R . \square

Esercizio 1013 Dimostrare che non esiste alcuna matrice reale avente come polinomio minimo $\lambda^2 + 1$ che sia jordanizzabile in R .

Esercizio 1014 Determinare una matrice reale di ordine 2 avente come polinomio minimo $\lambda^2 + 1$.

Esercizio 1015 Determinare una matrice complessa di ordine 3 avente come polinomio minimo $\lambda^2 + 1$.

Esercizio 1016 Dimostrare che non esiste alcuna matrice reale di ordine 3 avente come polinomio minimo $\lambda^2 + 1$.

Esercizio 1017 Determinare una matrice reale di ordine 4 avente come polinomio minimo $\lambda^2 + 1$.

Esercizio 1018 Determinare una matrice avente come polinomio minimo $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$.

Esercizio 1019 Quale è il minimo ordine di una matrice avente come polinomio minimo $\lambda^2(\lambda - 1)$?

Esercizio 1020 Determinare due matrici non simili tra loro di ordine 5 aventi come polinomio minimo $\lambda^2(\lambda - 1)$ e come polinomio caratteristico $\lambda^4(\lambda - 1)$.

Esercizio 1021 Dimostrare che, se una matrice $A \in M(C, n, n)$ ha tutti gli autovalori con indice 1, allora essa è diagonalizzabile.

Esercizio 1022 Sia $p(x) \in C^{n+1}[x]$. Esiste $A \in M(C, n, n)$ tale che il polinomio minimo di A sia $p(x)$?

Esercizio 1023 Sia $p(x) \in R^{n+1}[x]$. Esiste $A \in M(R, n, n)$ tale che il polinomio minimo di A sia $p(x)$?

Esercizio 1024 Esistono matrici A e B di ordine n aventi stesso polinomio caratteristico, stesso polinomio minimo e stessi autovalori con stesse molteplicità geometriche che non siano simili?

8.4 Calcolo di polinomi di matrici

Nel primo paragrafo abbiamo visto un metodo che ci può aiutare nel calcolo di un polinomio su una matrice. Il teorema 971 ci permette infatti di sostituire una matrice con una ad essa simile per la quale sia più semplice il calcolo del polinomio (vedere anche l'esempio 973). Vi sono però dei casi in cui questo metodo ci aiuta fino ad un certo punto. Supponiamo, per esempio, data una matrice A , di dover calcolare la matrice A^{100} . Potremo sostituire la matrice A con una matrice A' ad essa simile, ma sempre dovremo calcolare la centesima potenza di una matrice. In questo paragrafo illustriamo un metodo che ci permette di risparmiare molti calcoli.

Abbiamo innanzitutto bisogno di una definizione.

Definizione 1025 Dato un polinomio non nullo $m(x) \in K[x]$, diciamo che due polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$ di $K[x]$ sono **congrui modulo $m(x)$** se e solo se la loro differenza è divisibile per $m(x)$. Usiamo per la relazione di congruenza tra polinomi lo stesso simbolo usato per la congruenza tra numeri interi. Abbiamo quindi:

$$p_1(x) \equiv p_2(x) \pmod{m(x)} \iff \exists q(x) \in K[x] \mid p_1(x) - p_2(x) = m(x)q(x)$$

Abbiamo la proprietà analoga ad una proprietà delle congruenze tra numeri interi.

Teorema 1026 Sia dato un polinomio non nullo $m(x) \in K[x]$. Dati i polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$ si considerino le loro divisioni per $m(x)$:

$$p_1(x) = m(x)q_1(x) + r_1(x) \text{ con } \text{grado } r_1(x) < \text{grado } m(x)$$

$$p_2(x) = m(x)q_2(x) + r_2(x) \text{ con } \text{grado } r_2(x) < \text{grado } m(x)$$

Si ha:

$$p_1(x) \equiv p_2(x) \pmod{m(x)} \iff r_1(x) = r_2(x)$$

DIMOSTRAZIONE. Analoga a quella vista nel caso della congruenza tra numeri interi. Viene lasciata per esercizio. \square

Teorema 1027 Data $A \in M(K, n, n)$, sia $m(x)$ il polinomio minimo di A . Dati i polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$ in $K[x]$ si ha:

$$p_1(A) = p_2(A) \iff p_1(x) \equiv p_2(x) \pmod{m(x)}$$

DIMOSTRAZIONE. Se $p_1(x) \equiv p_2(x) \pmod{m(x)}$, si verifica facilmente (esercizio) che si ha $p_1(A) = p_2(A)$.

Dimostriamo ora il viceversa. Si abbia $p_1(A) = p_2(A)$.

Dividiamo i due polinomi per $m(x)$:

$$p_1(x) = q_1(x) \cdot m(x) + r_1(x) \quad p_2(x) = q_2(x) \cdot m(x) + r_2(x)$$

Ovviamente i gradi di $r_1(x)$ e di $r_2(x)$ sono minori del grado di $m(x)$.

Consideriamo $d(x) = r_1(x) - r_2(x)$. Si verifica subito che si ha $d(A) = 0$. Ma, poiché il grado di $d(x)$ è minore del grado di $m(x)$, dalla definizione di polinomio minimo segue $d(x) = 0$. Ma allora $r_1(x) = r_2(x)$. Ne segue la tesi. \square

Esempio 1028 Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vogliamo calcolare $A^4 - 2A^2$.

Potremmo fare direttamente il calcolo. Vogliamo utilizzare il teorema precedente. Consideriamo il polinomio $p(x) = x^4 - 2x^2$, dividiamo per il polinomio minimo e consideriamo il resto $r(x)$ della divisione. Si ha $p(A) = r(A)$.

Il polinomio minimo di A è $m(x) = (x - 1)^2$ (esercizio). Il resto è $r(x) = -1$ infatti:

$$p(x) = x^4 - 2x^2 = x^4 - 2x^2 + 1 - 1 = (x^2 - 1)^2 - 1 = (x - 1)^2(x + 1)^2 - 1$$

quindi $p(A) = r(A) = -I$.

Nota 1029 Il teorema 1027 ci permette quindi, nel calcolare un polinomio su una matrice, di sostituire il polinomio con un polinomio di grado minore del grado del polinomio minimo della matrice. Ciò ovviamente rende molto più spediti i calcoli.

Nota 1030 Si verifica facilmente (esercizio) che, se $s(x)$ è un polinomio annullatore (non necessariamente il polinomio minimo) di una matrice $A \in M(K, n, n)$, allora, dati due polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$ in $K[x]$ si ha:

$$p_1(x) \equiv p_2(x) \pmod{s(x)} \implies p_1(A) = p_2(A)$$

Il calcolo quindi di polinomi su una matrice A può essere più spedito conoscendo qualche annullatore di A .

8.5 Funzioni di matrici

Siamo ora finalmente in grado di definire la funzione di una matrice.

Definizione 1031 Sia $A \in M(C, n, n)$. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ gli autovalori di A con indici m_1, \dots, m_r rispettivamente. Sia $m = m_1 + \dots + m_r$ il grado del polinomio minimo della matrice A . Sia data una funzione $f : C \longrightarrow C$. Si dice che **la funzione è definita sullo spettro di A** se e solo se sono definiti i seguenti m numeri complessi:

$$f(\lambda_1), f'(\lambda_1), \dots, f^{(m_1-1)}(\lambda_1)$$

...

$$f(\lambda_r), f'(\lambda_r), \dots, f^{(m_r-1)}(\lambda_r)$$

dove con $f^{(s)}(\lambda_1)$ abbiamo indicato la derivata s -sima della funzione f calcolata in λ_1 . Si dice che due funzioni, definite sullo spettro di A , **coincidono sullo spettro** di A se i numeri complessi di cui sopra coincidono per le due funzioni.

Esempio 1032 Vediamo se la funzione $\log x$ è definita sullo spettro della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A ha come autovalore 1 con indice 2. La funzione $\log x$ e la sua derivata sono definite in 1. La funzione $\log x$ è quindi definita sullo spettro di A .

Esempio 1033 Vediamo se la funzione $\log x$ è definita sullo spettro della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 26 & 42 \end{pmatrix}.$$

La matrice A ha determinante uguale a 0 (la seconda riga è due volte la prima riga); essa ha quindi un autovalore uguale a 0. Non ci interessa calcolare l'altro autovalore. Infatti la funzione $\log x$ non è definita in 0 e quindi essa non è definita sullo spettro di A .

Nota 1034 Qualsiasi polinomio $p(x) \in C[x]$ è definito sullo spettro di qualsiasi matrice $A \in M(C, n, n)$. Verificare ciò per esercizio.

Esercizio 1035 Dimostrare che la funzione $f(x) = e^x$ è definita sullo spettro di qualsiasi matrice reale.

Teorema 1036 Data una matrice $A \in M(C, n, n)$ e dati due polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$ in $C[x]$ si ha $p_1(A) = p_2(A)$ se e solo se essi coincidono sullo spettro di A . **DIMOSTRAZIONE.** Viene lasciata per esercizio. Suggerimento. Sfruttare i teoremi 988 e 986. \square

Questo teorema ci può essere utile per il calcolo di un polinomio su una matrice. Vediamo ciò con un esempio:

Esempio 1037 Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo calcolare A^{317} . Potremmo sfruttare ciò che abbiamo visto nel paragrafo precedente: dividere il polinomio $p(x) = x^{317}$ per il polinomio minimo della matrice $m(x) = (x-1)^2$, prendere il resto $r(x)$ e calcolare $r(A)$. Vogliamo sfruttare il teorema precedente. Il resto $r(x)$ ha grado minore di 2 e coincide su A con $p(x)$. Per il teorema precedente esso assume sullo spettro di A gli stessi valori di $p(x)$. Cerchiamo allora i polinomi del tipo $n(x) = a + bx$ che assumano sullo spettro di A gli stessi valori di $p(x)$. Si ha:

$$p(1) = 1 = n(1) = a + b, \quad p'(1) = 317 = n'(1) = b$$

da cui segue $a = -316$. Quindi $n(x) = -316 + 317x$. Quindi:

$$A^{317} = -316I + 317A = \begin{pmatrix} 1 & 317 \cdot 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione 1038 Sia $A \in M(C, n, n)$ e sia $f : C \longrightarrow C$ una funzione definita sullo spettro di A . Sia $p(x)$ un qualsiasi polinomio che assuma sullo spettro di A gli stessi valori della funzione $f(x)$. Si pone, per definizione:

$$f(A) = p(A)$$

Nota 1039 La definizione appena data ha, a prima vista, due inconvenienti:

1) Sembra dipendere dalla scelta del polinomio $p(x)$. Di polinomi che assumano sullo spettro di A gli stessi valori della funzione $f(x)$ ve ne possono essere molti; quale scegliamo tra tutti questi polinomi? Ci viene in aiuto il teorema 1036 che ci dice che non importa quale polinomio prendiamo: otteniamo sempre lo stesso risultato.

2) Esiste un polinomio $p(x)$ che assuma sullo spettro di A gli stessi valori della funzione $f(x)$? Nel caso in cui tutti gli indici degli autovalori siano uguali ad 1, abbiamo già dato risposta a questo interrogativo: ne esiste uno ed uno solo di grado minore del grado del polinomio minimo (vedere quel che abbiamo detto sulla base di Lagrange nel capitolo 5).

Nel caso generale ci viene in aiuto il prossimo teorema.

Teorema 1040 Sia $A \in M(C, n, n)$ e sia $f : C \longrightarrow C$ una funzione definita sullo spettro di A . Sia m il grado del polinomio minimo di A . Esiste ed è unico il polinomio $p(x)$ di grado minore di m (quindi $p(x) \in C^m[x]$) che assume sullo spettro di A gli stessi valori della funzione $f(x)$. Questo polinomio viene chiamato **polinomio interpolatore** o **polinomio di Lagrange-Sylvester**³.
DIMOSTRAZIONE. Si consideri un generico polinomio di grado minore di m e si impongano le condizioni richieste. Si ha un sistema di m equazioni lineari in m incognite (i coefficienti del polinomio). Si può verificare (noi omettiamo ciò; gli interessati possono vedere in **Ghizzetti-Rosati**, *Esercizi e complementi di analisi matematica*, paragrafo 2.31) che il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da 0. Il teorema segue dal teorema di Cramer. \square

Esercizio 1041 Sia $A \in M(C, n, n)$ e sia $f : C \longrightarrow C$ una funzione definita sullo spettro di A . Sia $p(x)$ il polinomio interpolatore. Dimostrare che i polinomi che assumono sullo spettro di A gli stessi valori di $f(x)$ sono dati da tutti e soli i polinomi del tipo:

$$s(x) = p(x) + m(x)q(x)$$

dove $q(x)$ è un qualsiasi polinomio e $m(x)$ è il polinomio minimo della matrice A .

Teorema 1042 Sia A un blocco di Jordan di ordine n relativo all'autovalore λ_1 e sia $f : C \longrightarrow C$ una funzione definita sullo spettro della matrice A . Ciò implica che la funzione f è definita, insieme alle sue derivate fino all'ordine $n-1$,

³James Joseph Sylvester, (1814,1897), matematico inglese amico di Cayley.

nel valore λ_1 . Si ha allora:

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & f'(\lambda_1) & \frac{f''(\lambda_1)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda_1)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda_1) & f'(\lambda_1) & \dots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda_1)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda_1) & \dots & \frac{f^{(n-3)}(\lambda_1)}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_1) \end{pmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE. Notiamo che il polinomio interpolatore di Lagrange-Sylvester della funzione $f(x)$ non è altro che lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ nel valore λ_1 troncato al termine di grado $n-1$.

La tesi segue quindi dal teorema 979. \square

Nota 1043 Abbiamo visto che per calcolare una funzione su una matrice si calcola il polinomio interpolatore sulla matrice. Possiamo quindi sfruttare gli algoritmi di calcolo di polinomi di matrici visti in precedenza.

Teorema 1044 Sia $f : C \longrightarrow C$ una funzione definita sullo spettro di una matrice $A \in M(C, n, n)$. Sia:

$$B = M^{-1}AM$$

Allora la funzione f è definita anche sullo spettro di B e si ha:

$$f(B) = M^{-1}f(A)M$$

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. Suggerimento: sfruttare la definizione di funzione su una matrice e il teorema 971 \square

Nota 1045 Quest'ultimo teorema riduce il calcolo di una funzione f su una matrice A al calcolo della funzione sulla jordanizzata A' di A . Il calcolo di $f(A')$ a sua volta coincide con il calcolo di $p(A')$ dove $p(x)$ è il polinomio interpolatore di Lagrange-Sylvester. D'altra parte, per il teorema 987 il calcolo di $p(A')$ si riduce al calcolo del polinomio $p(x)$ su blocchi di Jordan. Il teorema 1042 ci rende questo calcolo molto semplice.

Esempio 1046 Vogliamo calcolare la funzione e^x sulla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si può calcolare direttamente la matrice e^A utilizzando il polinomio $p(x)$ di Lagrange-Sylvester della funzione e^x per la matrice A .

Lasciamo ciò per esercizio. Non è difficile fare ciò. Purtroppo bisogna perdere un po' di tempo per calcolare $p(x)$.

In effetti non è necessario calcolare $p(x)$. Notiamo infatti che la matrice A è

formata da due blocchi. Un blocco di Jordan B di ordine 2 relativo all'autovalore 2 e un blocco di Jordan C di ordine 1 relativo all'autovalore 3.

Applichiamo allora il teorema 987 e il teorema 1042. Si ha:

$$e^A = p(A) = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{p(B)} & 0 \\ \hline 0 & \boxed{p(C)} \end{array} \right)$$

. Si ha:

$$p(B) = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \quad p(C) = (e^3)$$

da cui:

$$e^A = \left(\begin{array}{cc|c} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{e^3} \end{array} \right)$$

Esempio 1047 Vogliamo calcolare la funzione e^x sulla matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Possiamo usare due metodi.

Primo metodo. Calcoliamo il polinomio $p(x)$ di Lagrange-Sylvester per la matrice B e poi calcoliamo $p(B)$.

Secondo metodo. Jordanizziamo la matrice B . Otteniamo $B' = M^{-1}BM$ con B' matrice di Jordan. Si ha (esercizio) che la matrice B' è proprio la matrice A dell'esercizio precedente. Abbiamo visto che il calcolo di $e^{B'}$ è molto facile. Si ha infine:

$$e^B = Me^{B'}M^{-1}$$

Esercizio 1048 Data la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolare $\log A$ e e^A .

Esercizio 1049 Calcolare le funzioni $\log x, e^x, e^{3x}$ sulle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 1050 Calcolare le funzioni $\log x, e^x, e^{3x}$ sulle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esempio 1051 Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

vogliamo calcolare la matrice e^{At} .

Data quindi la funzione $f(x)$ nella variabile x data da e^{xt} , dobbiamo calcolare $f(A)$.

Notiamo che la matrice A è un blocco di Jordan di ordine 3 relativo all'autovalore 2. Appliciamo allora il teorema 1042. Dobbiamo calcolare la derivata prima e la derivata seconda della funzione $f(x)$ in 2, autovalore del blocco di Jordan. Abbiamo:

$$f'(x) = te^{xt}, \quad f''(x) = t^2 e^{xt}$$

Da tutto ciò segue che si ha:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2 e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Esercizio 1052 Determinare la matrice e^{Bt} dove

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Usare per far ciò due metodi:

primo metodo: si sfrutta direttamente la definizione 1038 di funzione di una matrice; si calcola perciò il polinomio $p(x)$ di Lagrange-Sylvester e poi si calcola $p(B)$.

secondo metodo: si calcola la jordanizzata A della matrice B , si determina la matrice $f(A)$ sfruttando il teorema 1042, si determina una matrice M tale che $A = M^{-1}BM$, si calcola infine $f(B) = Mf(A)M^{-1}$.

8.6 Bibliografia

1) **I.Cattaneo Gasparini**, *Strutture algebriche, operatori lineari*, Veschi.

La seconda parte del quinto capitolo è dedicato ai polinomi di matrici.

2) **I.Cattaneo Gasparini**, *Complementi di geometria e algebra*, Veschi.

Il primo capitolo è dedicato alle funzioni di matrici.

3) **P.Maroscia**, *Problemi di geometria*, Masson editoriale Veschi.

Nel nono capitolo sono svolti molti esercizi sulle funzioni di matrici.