

Capitolo 7

Endomorfismi tra spazi vettoriali

7.1 Endomorfismi

Definizione 820 Dato uno spazio vettoriale E su un campo K , un **endomorfismo di E** è un omomorfismo di E in E .

Nota 821 Gli endomorfismi sono quindi particolari omomorfismi. Valgono quindi per essi i teoremi visti per gli omomorfismi. In particolare, fissata una base di E , possiamo associare ad ogni endomorfismo di E una matrice quadrata.

Teorema 822 Sia $\alpha : E \longrightarrow E$ un endomorfismo dello spazio vettoriale E su un campo K .

Sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base di E e sia A la matrice associata a α relativamente a tale base.

Si ha allora:

$$\alpha \left[(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE. È un caso particolare dell'analogo teorema visto nel caso degli omomorfismi. \square

Teorema 823 Sia $\alpha : E \longrightarrow E$ un endomorfismo dello spazio vettoriale E su un campo K . Sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base di E e sia A la matrice associata ad α relativamente ad essa.

Sia $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ un'altra base di E e sia A' la matrice associata ad α relativamente ad essa. Sia:

$$(\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n) M$$

Si ha allora:

$$A' = M^{-1}AM$$

DIMOSTRAZIONE. È un caso particolare dell'analogo teorema visto nel caso degli omomorfismi. \square

7.2 Algebra degli endomorfismi

Definizione 824 Indichiamo con $\text{End}(E)$ lo spazio vettoriale degli endomorfismi di uno spazio vettoriale E su un campo K .

In tale spazio vettoriale introduciamo l'**operazione di composizione** di endomorfismi.

Nota 825 L'insieme $\text{End}(E)$ è quindi dotato di tre operazioni:

l'operazione di addizione tra endomorfismi;

l'operazione di moltiplicazione di un endomorfismo per un elemento di K ;

l'operazione di composizione.

Sappiamo che $\text{End}(E)$ con le prime due operazioni è uno spazio vettoriale su K .

Sappiamo che l'operazione di composizione ha la proprietà associativa.

Si verifica facilmente (esercizio) che si ha:

$$(\alpha + \beta) \circ \gamma = \alpha \circ \gamma + \beta \circ \gamma \quad \forall \alpha \in \text{End}(E), \forall \beta \in \text{End}(E), \forall \gamma \in \text{End}(E)$$

$$\gamma \circ (\alpha + \beta) = \gamma \circ \alpha + \gamma \circ \beta \quad \forall \alpha \in \text{End}(E), \forall \beta \in \text{End}(E), \forall \gamma \in \text{End}(E)$$

$$k(\alpha \circ \beta) = (k\alpha) \circ \beta = \alpha \circ (k\beta) \quad \forall \alpha \in \text{End}(E), \forall \beta \in \text{End}(E), \forall k \in K$$

Definizione 826 Si dice **algebra su un campo K** uno spazio vettoriale E su K dotato di un'ulteriore operazione, che indichiamo con il simbolo \cdot e chiamiamo **moltiplicazione**, che verifichi le seguenti proprietà:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a \in E, \forall b \in E, \forall c \in E$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \forall a \in E, \forall b \in E, \forall c \in E$$

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b \quad \forall a \in E, \forall b \in E, \forall c \in E$$

$$k(a \cdot b) = (ka) \cdot b = a \cdot (kb) \quad \forall a \in E, \forall b \in E, \forall k \in K$$

Nota 827 Quindi se E è un algebra, si ha che E con le operazioni di addizione e di moltiplicazione è un anello.

Nota 828 Abbiamo quindi che, dato uno spazio vettoriale E su un campo K , lo spazio vettoriale $\text{End}(E)$ con l'operazione di composizione tra endomorfismi è un'algebra.

Teorema 829 Dato un campo K , lo spazio vettoriale $M(K, n, n)$ con l'ulteriore operazione di moltiplicazione righe per colonne tra matrici è un'algebra.

DIMOSTRAZIONE. Facile esercizio. \square

Definizione 830 Date due algebre E e F su un campo K , un omomorfismo tra algebre è un omomorfismo tra spazi vettoriali che conserva le operazioni di moltiplicazione. Un isomorfismo tra algebre è un omomorfismo tra algebre che sia una corrispondenza biunivoca.

Teorema 831 Sia E uno spazio vettoriale su un campo K e sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una sua base. L'applicazione

$$\psi : \text{End}(E) \longrightarrow M(K, n, n)$$

che associa ad ogni endomorfismo la matrice ad esso associata relativamente alla base scelta è un isomorfismo tra algebre.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già verificato nel capitolo precedente che l'applicazione ψ è un isomorfismo tra spazi vettoriali. Si deve ora dimostrare che ψ conserva le operazioni di moltiplicazione. Viene lasciato ciò per esercizio. \square

Nota 832 L'isomorfismo appena definito non è canonico.

7.3 Gruppo degli automorfismi

Definizione 833 Un **automorfismo** di uno spazio vettoriale su K è un endomorfismo di E che sia un isomorfismo. Indichiamo con $\text{Auto}(E)$ l'insieme degli automorfismi di E .

Teorema 834 L'insieme $\text{Auto}(E)$ con l'operazione di composizione è un gruppo non abeliano. Per questa ragione esso viene chiamato **gruppo degli automorfismi di E**

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. \square

Nota 835 Ricordiamo che $GL(K, n)$ è il sottoinsieme di $M(K, n, n)$ dato dalle matrici invertibili. Con l'operazione di moltiplicazione righe per colonne esso è un gruppo.

Teorema 836 Sia E uno spazio vettoriale su un campo K e sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una sua base. L'applicazione

$$\psi : (\text{Auto}(E), \circ) \longrightarrow (GL(K, n), \cdot)$$

che associa ad ogni automorfismo la matrice ad esso associata relativamente alla base scelta è un isomorfismo tra gruppi.

DIMOSTRAZIONE. La lasciamo per esercizio. \square

Nota 837 Ovviamente l'isomorfismo appena definito non è canonico.

7.4 Endomorfismi diagonalizzabili

Nel paragrafo precedente abbiamo definito gli endomorfismi su uno spazio vettoriale E . Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo. Abbiamo visto che, se E ha dimensione uguale ad n , fissata una sua base, possiamo considerare la matrice associata a η relativamente alla base data. Cambiando la base cambia, in generale, la matrice associata. Lo scorso anno ci siamo posti il problema di determinare una base di E in modo tale che la matrice associata ad η relativamente a tale base sia diagonale.

Questo argomento è affrontato in [A.V.] nel paragrafo 10 del capitolo 2 oppure in [V.C.P.] nei paragrafi 7, 8, 9, 10. Rimandiamo ad essi.

Ricordiamo brevemente alcuni argomenti.

Definizione 838 Sia dato un endomorfismo $\eta : E \longrightarrow E$. Un vettore $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in E$ si dice **autovettore** con **autovalore** λ se $\eta(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$. Sia:

$$E(\lambda) = \{\mathbf{v} \in E \mid \eta(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\}$$

Quindi $E(\lambda)$ è costituito dal vettore nullo $\mathbf{0}$ e dagli autovettori con autovalore λ . Sappiamo che tale insieme è un sottospazio vettoriale di E e viene detto **autospazio di η relativo a λ** . La sua dimensione viene detta **molteplicità geometrica** di λ . La molteplicità geometrica viene indicata con il simbolo $mg_\eta(\lambda)$.

Teorema 839 Un endomorfismo f di uno spazio vettoriale E è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di E formata da autovettori di f .

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. \square

Teorema 840 Autovettori con autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

DIMOSTRAZIONE. Vedere ([A.V.] capitolo 2, paragrafo 10, teorema 10.16. oppure [V.C.P.] capitolo 5, paragrafo 8, teorema 8.4. \square

Teorema 841 Se un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione n ha n autovalori distinti, allora esso è diagonalizzabile.

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. \square

Teorema 842 Dato un endomorfismo $\eta : E \longrightarrow E$ si ha che $\lambda_1 \in K$ è un autovalore se e solo se, indicata con A la matrice associata ad η relativamente ad una base fissata di E , si ha che λ_1 è radice del polinomio di grado n in λ

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Il polinomio $p_A(\lambda)$ si dice **polinomio caratteristico della matrice A** . Sia ora B la matrice associata a η relativamente ad un'altra base di E ; allora si ha:

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$$

Quindi il polinomio in questione non dipende dalla scelta della base in E . Possiamo quindi indicare tale polinomio con il simbolo $p(\lambda)$ e chiamarlo **polinomio caratteristico dell'endomorfismo η** .

Inoltre, se λ_1 è radice di $p(\lambda)$ con molteplicità uguale a m , si dice che l'autovalore λ_1 ha **molteplicità algebrica** uguale a m . La molteplicità algebrica viene indicata con il simbolo $ma_\eta(\lambda)$.

Ricordiamo che, dato un polinomio $p(x) \in K[x]$, una sua radice x_1 si dice di molteplicità m se $p(x) = (x - x_1)^m q(x)$ con $q(x) \in K[x]$ e inoltre $p(x)$ non è fattorizzato da $(x - x_1)^{m+1}$.

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. Oppure vedere [A.V.] capitolo 2, paragrafo 10, teorema 10.15 o [V.C.P.] capitolo 5, paragrafo 9. \square

Nota 843 Osserviamo che, dato un endomorfismo η con autovalore λ , si ha:

$$E(\lambda) = \ker(\eta - \lambda I)$$

Nota 844 Ricordiamo che data $A \in M(K, n, n)$, i termini di coefficienti di grado $n, n-1$ e 0 del polinomio caratteristico di A sono dati rispettivamente da:

$$a_n = (-1)^n, \quad a_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{tr}(A), \quad a_0 = \det(A)$$

dove con $\text{tr}(A)$ indichiamo la **traccia** di A , cioè la somma degli elementi della diagonale principale della matrice A .

Teorema 845 La molteplicità geometrica di un autovalore è minore o uguale della sua molteplicità algebrica.

DIMOSTRAZIONE. Vedere [A.V.] capitolo 2, paragrafo 10, teorema 10.22 oppure [V.C.P.] capitolo 5, paragrafo 9, teorema 9.8. \square

Teorema 846 Sia η un endomorfismo di uno spazio vettoriale E su un campo K di dimensione uguale a n . Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ gli autovalori distinti e $E(\lambda_1), \dots, E(\lambda_p)$ i relativi autospazi.

Si ha che gli autospazi sono in somma diretta; cioè:

$$E' = E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_p)$$

dove E' non coincide necessariamente con E .

Inoltre l'endomorfismo η è diagonalizzabile se e solo se E coincide con E' e quindi se e solo se sono verificate contemporaneamente le seguenti due condizioni:

a) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori è uguale a n (dimensione di E)

b) Per ogni autovalore la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica.

DIMOSTRAZIONE. Vedere [A.V.] capitolo 2, paragrafo 10, teorema 10.25 oppure [V.C.P.], capitolo 5, paragrafo 8, teorema 8.7. e paragrafo 10, teorema 10.5. \square

7.5 Matrici simili

Definizione 847 Due matrici $A \in M(K, n, n)$ e $B \in M(K, n, n)$ si dicono *simili* (in simboli $A \sim B$) se

$$\exists M \in GL(K, n) \mid B = M^{-1}AM$$

Teorema 848 La relazione di similitudine \sim in $M(K, n, n)$ è una relazione di equivalenza.

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. \square

Dal teorema 823 segue:

Teorema 849 Due matrici sono simili se e solo se sono matrici associate ad uno stesso endomorfismo relativamente a basi eventualmente differenti.

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. \square

Da ciò segue:

Teorema 850 Matrici simili hanno stesso rango, stesso polinomio caratteristico, stesso determinante e stessa traccia.

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. \square

Teorema 851 Fissato $k \in K$, l'unica matrice simile alla matrice kI , dove I è la matrice identica, è la matrice kI stessa.

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. \square

Definizione 852 Una matrice si dice **diagonalizzabile** se essa è simile ad una matrice diagonale.

Diagonalizzare una matrice A significa determinare una matrice A' simile alla matrice A e una matrice M tale che $A' = M^{-1}AM$.

Una matrice $A \in M(K, n, n)$, può essere pensata come un endomorfismo di K^n . Si può quindi parlare di autovalori, autovettori, autospazi di una matrice.

Esercizio 853 Dimostrare che la matrice seguente è diagonalizzabile in C ma non in R :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 854 Diagonalizzare in R la matrice seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 855 Determinare i valori dei parametri reali a, b, c per i quali la seguente matrice è diagonalizzabile in R :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 856 Determinare i valori del parametro reale h per i quali la seguente matrice è diagonalizzabile in R :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 857 Gli autovalori di una matrice triangolare sono gli elementi della diagonale principale della matrice.

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. \square

Esercizio 858 Diagonalizzare, se è possibile, l'endomorfismo η di $R^3[x]$ definito da:

$$\eta(a + bx + cx^2) = a + b + c + (2b + c)x + 3cx^2$$

Esercizio 859 Diagonalizzare, se è possibile, l'endomorfismo η di $R^3[x]$ definito da:

$$\eta(a + bx + cx^2) = a + b + c + (a + b + c)x + (a + b + c)x^2$$

Ci chiediamo come si faccia a vedere se due matrici A e B sono simili.

Abbiamo visto che due matrici sono simili se e solo se rappresentano uno stesso endomorfismo relativamente a due basi diverse. Questa osservazione ci permette di dare il seguente:

Teorema 860 Condizione necessaria affinché le matrici A e B appartenenti a $M(K, n, n)$ siano simili è che A e B abbiano gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche e geometriche.

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. \square

Nota 861 Se le due matrici sono diagonalizzabili la condizione di cui sopra è anche sufficiente. In questo caso infatti le due matrici sono simili ad una stessa matrice diagonale.

Se una delle matrici è diagonalizzabile e l'altra non lo è, ovviamente le due matrici non sono simili.

Nel caso in cui le due matrici non siano diagonalizzabili, la condizione di cui sopra non è a priori sufficiente. In 863 daremo due matrici che hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità che non sono simili.

Il seguente teorema ci è un po' di aiuto:

Teorema 862 Se la matrice A è simile alla matrice B , allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n è simile alla matrice B^n .

Inoltre, se A e B sono invertibili e sono simili, allora le matrici A^n e B^n sono simili per ogni $n \in \mathbb{Z}$ (Ricordiamo che, se $n \in \mathbb{N}$, allora la matrice A^{-n} è, per

definizione, la matrice $[A^{-1}]^n$).

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. \square

Da ciò deriva che se per qualche n si ha che la matrice A^n non è simile alla matrice B^n allora la matrice A non è simile alla matrice B .

Esempio 863 Siano date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che entrambe le matrici hanno come autovalore 0 con molteplicità algebrica uguale a 4 e molteplicità geometrica uguale a 2. Ambedue le matrici non sono quindi diagonalizzabili. Notiamo che si ha $A^2 = 0$ e $B^2 \neq 0$ e quindi le matrici A^2 e B^2 non sono simili. Da cui segue che le matrici A e B non sono simili.

Il procedimento di considerare le potenze successive delle matrici A e B ci permette in alcuni casi di dire se A e B *non* siano simili, ma non ci consente a priori di dire se A e B siano simili.

Tra qualche paragrafo daremo un metodo per risolvere il nostro problema almeno nel caso in cui le matrici siano a coefficienti complessi o reali. Per il momento ci limitiamo a risolvere alcuni casi particolari. Il metodo usato ci sarà utile in seguito.

Esempio 864 Vogliamo dimostrare che le seguenti due matrici sono simili nel campo dei reali:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che ambedue le matrici hanno come autovalore 0 con molteplicità algebrica 2 e con molteplicità geometrica uguale a 1. Esse *possono* quindi essere simili.

Sia $f : R^2 \longrightarrow R^2$ l'endomorfismo associato alla matrice A relativamente alla base canonica. Se A è simile a B vuol dire che è possibile trovare una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ di R^2 tale che la matrice associata a f relativamente ad essa sia B . Ma allora si avrebbe:

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0} \quad , \quad f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1$$

Dobbiamo quindi determinare due vettori che verifichino le due condizioni. Dobbiamo quindi determinare un vettore $\mathbf{v}_2 \in \ker f^2 - \ker f$ da cui segue

$\mathbf{v}_1 \in \ker f - \{\mathbf{0}\}$. Mostriamo che segue anche che i vettori \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 sono linearmente indipendenti. Sia infatti $\mathbf{0} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$. Applicando f si ottiene: $\mathbf{0} = f(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) = af(\mathbf{v}_1) + bf(\mathbf{v}_2) = b\mathbf{v}_1$ da cui segue, essendo $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, che $b = 0$. Quindi $\mathbf{0} = a\mathbf{v}_1$; ma si ha anche $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ e quindi $a = 0$. Lasciamo al lettore la determinazione di \mathbf{v}_2 (a tal scopo calcolare A^2) e quindi di \mathbf{v}_1 .

7.6 Matrici a blocchi

Purtroppo non tutti gli endomorfismi sono diagonalizzabili. Per alcuni di essi non esiste una base di autovettori. Esiste però in molti casi una base tale che la matrice associata all'endomorfismo assuma una forma molto semplice. Per mostrare ciò dobbiamo introdurre alcuni nuovi concetti.

Definizione 865 Sia $A \in M(K, p+q, p+q)$, $B_1 \in M(K, p, p)$ e $B_2 \in M(K, q, q)$. Diciamo che la matrice A è una matrice formata da due blocchi B_1 e B_2 (in simboli $A = bl(B_1, B_2)$), se:

- 1) la matrice B_1 è il minore di A formato dalle prime p righe e colonne,
- 2) la matrice B_2 è il minore di A formato dalle ultime q righe e colonne,
- 3) tutti gli elementi di A non appartenenti ai due minori B_1 e B_2 sono uguali a 0.

Esempio 866 La matrice

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

è formata da due blocchi. Uno di ordine 3 e uno di ordine 2.

Esercizio 867 Suddividere in blocchi la seguente matrice in due blocchi.

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Definizione 868 La definizione di matrice a due blocchi si estende a matrici a n blocchi. Usiamo il simbolo $A = bl(B_1, B_2, \dots, B_n)$.

Esempio 869 La seguente matrice è a tre blocchi.

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Nota 870 Abbiamo suddiviso la matrice A dell'esempio precedente in tre blocchi. Notiamo che ne avremmo potuto darne anche altre suddivisioni in blocchi. Avremmo infatti potuto considerare la matrice A suddivisa in due blocchi. Il primo blocco formato dalle prime tre righe e colonne e il secondo blocco formato dalle ultime due righe e colonne. Un'altra suddivisione di A in due blocchi è data dal primo blocco formato dalle prime due righe e colonne e il secondo blocco formato dalle ultime tre righe e colonne.

Definizione 871 Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale E su un campo K . Un sottospazio V di E si dice **invariante** per η se si ha $\eta(V) \subset V$.

Pertanto, se V è un sottospazio invariante per η si può considerare la restrizione di η a V :

$$\eta|_V : V \longrightarrow V$$

Chiaramente è un endomorfismo di V .

Teorema 872 Sia E uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo K . Sia

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$$

Sia dato poi un endomorfismo

$$\eta : E \longrightarrow E$$

tale che

$$\eta(E_i) \subset E_i \quad \forall i = 1, \dots, p$$

Sia data fissata una base di E tale che i primi n_1 vettori siano una base di E_1 i successivi n_2 vettori siano una base di E_2 ecc. Si ha allora:

1) la matrice A associata a η relativamente alla base scelta è una matrice a p blocchi:

$$A = bl(B_1, \dots, B_i, \dots, B_p)$$

Il blocco B_i è la matrice associata a $\eta|_{B_i}$.

2) $p_A(\lambda) = p_{B_1}(\lambda) \cdot p_{B_2}(\lambda) \cdots p_{B_p}(\lambda)$.

3) Da ciò segue che λ_0 è autovalore di A se e solo se è autovalore di almeno un blocco B_i .

4) $ma_A(\lambda_0) = ma_{B_1}(\lambda_0) + ma_{B_2}(\lambda_0) + \cdots + ma_{B_p}(\lambda_0)$.

Cioè la molteplicità algebrica dell'autovalore λ_0 di A è uguale alla somma delle singole molteplicità algebriche λ_0 per ogni blocco B_i della matrice A , avendo avuto cura di porre $ma_{B_i}(\lambda_0) = 0$ se λ_0 non è autovalore per il blocco B_i .

5) Analogamente si ha per le molteplicità geometriche. Cioè:

$$mg_A(\lambda_0) = mg_{B_1}(\lambda_0) + mg_{B_2}(\lambda_0) + \cdots + mg_{B_p}(\lambda_0).$$

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. \square

Si ha anche il viceversa:

Teorema 873 Sia η un endomorfismo di uno spazio vettoriale E di dimensione n su un campo K . Se esiste una base di E tale che la matrice associata a η è una matrice a p blocchi, allora si ha:

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$$

con E_i opportuni sottospazi vettoriali di E invarianti per η .

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. \square

Teorema 874 Sia A una matrice a blocchi:

$$A = bl(B_1, \dots, B_i, \dots, B_j, \dots, B_p)$$

e sia A' la matrice ottenuta da A scambiando tra loro i blocchi B_i e B_j . Cioè:

$$A' = bl(B_1, \dots, B_j, \dots, B_i, \dots, B_p)$$

Allora $A \sim A'$.

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. In caso di necessità ispirarsi al seguente esempio. \square

Esempio 875 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Si consideri l'endomorfismo η di uno spazio vettoriale E di dimensione 4 su R associato a A relativamente ad una base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di E .

Si verifica facilmente che la matrice associata a η relativamente alla base $\{e_3, e_4, e_1, e_2\}$ è la matrice A' .

Si ha pertanto:

$$A' = M^{-1}AM \quad \text{con} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.7 Matrici di Jordan

Definizione 876 Dato un elemento λ di K , chiamiamo **blocco di Jordan** di ordine r con autovalore λ la matrice di ordine r avente tutti gli elementi appartenenti alla diagonale principale uguali a λ , tutti gli elementi della linea subito superiore alla diagonale principale uguali a 1 e tutti gli altri elementi nulli.

Esempio 877 1) Il blocco di Jordan di ordine 1 con autovalore 5 è la matrice:

$$\begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$$

2) Il blocco di Jordan di ordine 2 con autovalore 5 è la matrice:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3) Il blocco di Jordan di ordine 3 relativo all'autovalore 5 è la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Nota 878 Ovviamente l'autovalore λ di un blocco di Jordan di ordine r ha molteplicità algebrica uguale a r e molteplicità geometrica uguale a 1.

Definizione 879 Una **matrice di Jordan** è una matrice a blocchi

$$A = bl(B_1, \dots, B_p)$$

i cui blocchi B_i sono blocchi di Jordan.

Una matrice A simile ad una matrice A' che sia una matrice di Jordan si dice **jordanizzabile**, la matrice A' si dice **forma canonica di Jordan** della matrice A .

Esempio 880 a) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

è una matrice di Jordan con un blocco con autovalore 1 di ordine 2 e un blocco con autovalore 3 di ordine 1.

b) La matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è una matrice di Jordan con due blocchi con autovalore 1 di ordine 2.

c) La matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è una matrice di Jordan con un blocco con autovalore 1 di ordine 2 e due blocchi con autovalore 1 di ordine 1.

Nota 881 Ogni matrice diagonale è una matrice di Jordan formata da blocchi di ordine 1; viceversa, ogni matrice di Jordan formata da blocchi di lunghezza 1 è diagonale. Da ciò segue che una matrice diagonale è in forma canonica di Jordan. Inoltre una matrice è diagonalizzabile se e solo se essa è dotata di forma canonica di Jordan i cui blocchi sono di lunghezza uguale a 1.

Esempio 882 La matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è una matrice di Jordan con due blocchi con autovalore 1 uno di ordine 3 e l'altro di ordine 2.

La matrice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è una matrice di Jordan con due blocchi con autovalore 1, uno di ordine 3 e l'altro di ordine 2. Essa ha quindi gli stessi blocchi di Jordan della matrice D . Vogliamo dimostrare che la matrice E è simile alla matrice D . Si consideri l'endomorfismo f di R^5 associato alla matrice D relativamente alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$. Notiamo che, per passare dalla matrice E alla matrice D , è sufficiente scambiare tra loro i due blocchi di Jordan. La matrice E quindi è la matrice associata ad f relativamente alla base di R^5 ottenuta dalla base canonica scambiando tra loro le basi dei due spazi invarianti; in altre parole la matrice E è la matrice associata ad f relativamente alla base $\{\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Lasciamo come esercizio la determinazione della matrice di passaggio tra le matrici D e E .

Teorema 883 Se due matrici hanno stessa forma canonica di Jordan a meno di scambi di blocchi, allora esse sono simili.

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. \square

Ci chiediamo se ogni matrice $A \in M(K, n, n)$ sia dotata di forma canonica di Jordan.

La domanda è ovviamente equivalente alla seguente domanda:

dato un endomorfismo su uno spazio vettoriale E di dimensione n su un campo K , esiste una base di E tale che la matrice associata all'endomorfismo relativamente a essa sia di una matrice di Jordan?

Definizione 884 Sia η un endomorfismo di uno spazio vettoriale E . Se esiste una base di E tale che la matrice associata a η relativamente a tale base è una matrice di Jordan, l'endomorfismo si dice **jordanizzabile** e tale base si dice **base di Jordan**.

Definizione 885 Una matrice di ordine n a coefficienti in un campo K si dice avere tutti gli autovalori in K se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori in K è uguale a n .

Teorema 886 Una matrice di Jordan a coefficienti in un campo K ha tutti gli autovalori in K .

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. \square

Teorema 887 Una matrice a coefficienti in un campo K non avente tutti gli autovalori in K non è jordanizzabile.

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. \square

Ci chiediamo allora se una matrice avente tutti gli autovalori nel campo K sia jordanizzabile. Possiamo porci la stessa domanda per un endomorfismo avente tutti gli autovalori in K .

Cominciamo con lo studiare un particolare tipo di endomorfismi.

7.8 Endomorfismi nilpotenti

Definizione 888 Un endomorfismo $\eta : E \longrightarrow E$ di uno spazio vettoriale E su un campo K si dice **nilpotente** se esiste un numero $s \in \mathbb{N}$ tale che η^s sia l'endomorfismo nullo. Ovviamente, se $\eta^s = 0$, allora, per ogni $m > s$, si ha $\eta^m = 0$. Dato un endomorfismo nilpotente η , si definisce **indice di nilpotenza** il più piccolo $q \in \mathbb{N}$ tale che $\eta^q = 0$. Sia ora E di dimensione finita e sia η un endomorfismo di E nilpotente con indice di nilpotenza q . Fissata una base di E , sia A la matrice associata ad η relativamente a tale base. Si ha ovviamente che $A^q = 0$; inoltre, per ogni $p < q$, si ha $A^p \neq 0$. Per tale ragione, data una matrice $A \in M(K, n, n)$, diciamo che essa è una **matrice nilpotente** con **indice di nilpotenza** uguale a q se si ha $A^q = 0$ e, per ogni $p < q$, si ha $A^p \neq 0$.

Teorema 889 Se A è una matrice nilpotente con indice di nilpotenza q e B è una matrice simile ad A , allora B è una matrice nilpotente con indice di nilpotenza uguale a q .

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. \square

Esempio 890 a) Gli endomorfismi nulli (e quindi una qualsiasi matrice nulla) sono ovviamente nilpotenti con indice di nilpotenza uguale a 1.

b) Gli isomorfismi (e quindi una qualsiasi matrice invertibile) non sono nilpotenti.

c) La matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una matrice nilpotente con indice di nilpotenza uguale a 2 (vedere esempio 864). Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Questa matrice, essendo simile alla matrice data nell'esempio precedente (vedere esempio 864) è nilpotente con indice di nilpotenza uguale a 2.

Esempio 891 Un blocco di Jordan di ordine n relativo all'autovalore 0 è nilpotente con indice di nilpotenza uguale a n .

Lasciamo la dimostrazione di ciò per esercizio.

Vogliamo dare un algoritmo per verificare se un endomorfismo è nilpotente. Per far ciò abbiamo bisogno della decomposizione di Fitting.

7.9 Decomposizione di Fitting

Teorema 892 Sia $\eta : E \rightarrow E$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale E di dimensione n su un campo K .

Per ogni $i = 0, 1, 2, \dots$ consideriamo l'endomorfismo

$$\eta^i : E \rightarrow E$$

avendo posto $\eta^0 = id_E$, $\eta^1 = \eta$, $\eta^2 = \eta \circ \eta$, ecc.

- 1) Per ogni $i = 0, 1, 2, \dots$ si ha $\ker \eta^i \subset \ker \eta^{i+1}$ e $\eta(\ker \eta^{i+1}) \subset \ker \eta^i$.
- 2) Poiché $\ker \eta^i \subset E$ ed E ha dimensione finita, esistono i tali che $\ker \eta^i = \ker \eta^{i+1}$. Sia s il minimo di tali interi. Si ha pertanto la seguente successione di sottospazi vettoriali di E :

$$\{0\} = \ker \eta^0 \subset \ker \eta \subset \ker \eta^2 \subset \dots \subset \ker \eta^i \subset \ker \eta^{i+1} \subset \dots \subset \ker \eta^s = \ker \eta^{s+1}$$

dove tutte le inclusioni sono proprie.

In particolare, se η è un isomorfismo, si ha $\{0\} = \ker \eta^0 = \ker \eta$ e quindi $s = 0$.

- 3) Si ha $\eta^i(E) \supset \eta^{i+1}(E)$ e $\eta(\eta^i(E)) = \eta^{i+1}(E)$.

- 4) Si ha la seguente successione di sottospazi vettoriali di E :

$$E \supset \eta(E) \supset \eta^2(E) \supset \dots \supset \eta^i(E) \supset \eta^{i+1}(E) \supset \dots \supset \eta^s(E) = \eta^{s+1}(E)$$

dove tutte le inclusioni sono proprie.

- 5) Si ha che

$$\eta|_{\ker \eta^s} : \ker \eta^s \rightarrow \ker \eta^s$$

è un endomorfismo nilpotente con indice di nilpotenza uguale a s .

- 6) Si ha che

$$\eta|_{\eta^s(E)} : \eta^s(E) \rightarrow \eta^s(E)$$

è un isomorfismo.

- 7) Si ha infine:

$$E = \ker \eta^s \oplus \eta^s(E)$$

DIMOSTRAZIONE. Si lasciano per esercizio le dimostrazioni di 1), 2), 3), 4), 5) e 6).

Dimostriamo la 7). Dimostriamo innanzitutto che si ha:

$$\ker \eta^s \cap \eta^s(E) = \{0\}$$

Sia, per assurdo, $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \ker \eta^s \cap \eta^s(E)$. Poiché $\mathbf{v} \in \eta^s(E)$, dalla 6) segue $\mathbf{0} \neq \eta(\mathbf{v}) \in \eta^s(E)$. E quindi iterando $\mathbf{0} \neq \eta^s(\mathbf{v})$. Siamo arrivati ad un assurdo poiché $\mathbf{v} \in \ker \eta^s$.

Dobbiamo ora dimostrare che si ha $\ker \eta^s + \eta^s(E) = E$.

si ha $\dim(\ker \eta^s + \eta^s(E)) = \dim(\ker \eta^s) + \dim(\eta^s(E)) = \dim E$. Da ciò segue la tesi. \square

Teorema 893 (Decomposizione di Fitting¹) Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale E di dimensione n su un campo K .

Sia s il minimo intero per il quale si ha $\ker \eta^s = \ker \eta^{s+1}$. Si ha allora per il teorema precedente:

$$E = \ker \eta^s \oplus \eta^s(E)$$

Sia $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$ una base di $\ker \eta^s$ e $\{\mathbf{v}_{q+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base di $\eta^s(E)$. La matrice associata a η relativamente alla base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q, \mathbf{v}_{q+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è del tipo

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

dove la matrice B è nilpotente mentre la matrice C è invertibile.

DIMOSTRAZIONE. Deriva immediatamente dal teorema precedente. \square

Nota 894 Nel caso in cui l'endomorfismo η sia nilpotente con indice di nilpotenza q , si ha $s = q$, $\ker \eta^s = E$ e $\eta^s(E) = \{\mathbf{0}\}$.

Nel caso in cui l'endomorfismo η sia un isomorfismo si ha $s = 0$, $\ker \eta^s = \{\mathbf{0}\}$ e $\eta^s(E) = E$.

Nota 895 Abbiamo visto che, dato un endomorfismo η di uno spazio vettoriale E di dimensione finita, esiste un intero s tale che si abbia:

$$E = \ker \eta^s \oplus \operatorname{im} \eta^s$$

Bisogna fare attenzione: la formula precedente NON è valida per ogni intero s .

Esercizio 896 Dare un esempio di endomorfismo η di uno spazio vettoriale E di dimensione finita per il quale NON si abbia:

$$E = \ker \eta \oplus \operatorname{im} \eta$$

Esercizio 897 Dimostrare la verità o falsità della seguente affermazione: Sia η un endomorfismo di uno spazio vettoriale E di dimensione finita. Allora:

$$\eta \text{ diagonalizzabile} \iff E = \ker \eta \oplus \operatorname{im} \eta$$

Teorema 898 Sia η un endomorfismo su uno spazio vettoriale E e sia \mathbf{v} un autovettore di η con autovalore λ , allora, per ogni $i \in \mathbb{N}$, si ha che \mathbf{v} è autovettore di η^i con autovalore λ^i .

¹Hans Fitting, (1906-1938)

Se poi η è un automorfismo (cioè un endomorfismo invertibile) allora, per ogni $j \in Z$ si ha che \mathbf{v} è autovettore di η^j con autovalore λ^j dove, se $i \in N$, indichiamo con η^{-i} l'automorfismo $(\eta^{-1})^i$ e con η^0 indichiamo l'endomorfismo identico. DIMOSTRAZIONE. Facile esercizio. \square

Teorema 899 Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale E di dimensione n su un campo K . Si ha che η è nilpotente se e solo se il suo polinomio caratteristico $p(\lambda)$ è uguale a $(-1)^n \lambda^n$, cioè se e solo se 0 è autovalore con molteplicità algebrica uguale a n .

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che, se si ha $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$, allora l'endomorfismo è nilpotente. Supponiamo per assurdo che l'endomorfismo non sia nilpotente. Applicando la decomposizione di Fitting abbiamo

$$E = \ker \eta^s \oplus \eta^s(E)$$

con $\eta^s(E) \neq \{0\}$. Sia A la matrice associata a η relativamente ad una base scelta come nella decomposizione di Fitting (vedi teorema 893). Per ipotesi abbiamo che la matrice A ha 0 come unico autovalore. La matrice A è formata dai blocchi B e C (vedi teorema 893). Ma allora, per il teorema 872, si ha che 0 è autovalore della matrice C . Ma ciò non è possibile poiché la matrice C è invertibile. Siamo arrivati ad un assurdo. Pertanto η è nilpotente.

Dobbiamo ora dimostrare che, se η è nilpotente, allora esso ha come unico autovalore 0 con molteplicità algebrica uguale a n .

Si può dimostrare (noi omettiamo questa dimostrazione) che un endomorfismo nilpotente abbia tutti gli autovalori in K . Supponiamo che uno di questi autovalori, sia esso λ , sia non nullo. Sia \mathbf{v} un autovettore con autovalore λ . Ma allora si avrebbe, per il teorema 898, $\eta^i(\mathbf{v}) = \lambda^i \mathbf{v} \neq 0$ per ogni $i \in N$. Ma ciò è assurdo poiché η è nilpotente. \square

Definizione 900 Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo e sia

$$E = \ker \eta^s \oplus \eta^s(E)$$

la sua decomposizione di Fitting. Supponiamo che $\ker \eta^s \neq \{0\}$. Il sottospazio $\ker \eta^s$ è dato da tutti i vettori v tali che $\eta^i(\mathbf{v}) = 0$ per qualche i . Esso viene chiamato **autospazio generalizzato di η relativo all'autovalore 0**. I suoi vettori non nulli vengono chiamati **autovettori generalizzati relativi all'autovalore 0**.

Teorema 901 Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo e sia

$$E = \ker \eta^s \oplus \eta^s(E)$$

la sua decomposizione di Fitting. La dimensione di $\ker \eta^s$, autospazio generalizzato di η relativo a 0, è uguale alla molteplicità algebrica dell'autovalore 0.

DIMOSTRAZIONE. Usando i simboli introdotti nel teorema 893 abbiamo che il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ della matrice A è uguale a

$$p_B(\lambda) \cdot p_C(\lambda) = (-1)^q \lambda^q p_C(\lambda)$$

Poiché 0 non è radice del polinomio $p_C(\lambda)$, abbiamo $q = \dim \ker \eta^s$ è uguale alla molteplicità algebrica dell'autovalore 0. \square

Teorema 902 Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo e sia $\mathbf{v}_r \in \ker \eta^r - \ker \eta^{r-1}$.

Sia $\mathbf{v}_{r-1} = \eta(\mathbf{v}_r)$.

Sia poi $\mathbf{v}_{r-2} = \eta(\mathbf{v}_{r-1}) = \eta^2(\mathbf{v}_r)$.

E così via, fino a:

$\mathbf{v}_1 = \eta(\mathbf{v}_2) = \eta^{r-1}(\mathbf{v}_r)$.

Si ha, per ogni $i = 1, \dots, r-1$:

$\mathbf{v}_{r-i} \in \ker \eta^{r-i} - \ker \eta^{r-i-1}$.

Inoltre i vettori $\mathbf{v}_r, \dots, \mathbf{v}_1$ sono linearmente indipendenti.

La successione degli r vettori viene chiamata **catena di autovettori generalizzati** relativi all'autovalore 0, di **lunghezza** r .

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che si abbia $\mathbf{v}_{r-i} \in \ker \eta^{r-i} - \ker \eta^{r-i-1}$ viene lasciato per esercizio.

Dimostriamo che i vettori $\mathbf{v}_r, \dots, \mathbf{v}_1$ sono linearmente indipendenti. Sia:

$$a_r \mathbf{v}_r + \dots + a_1 \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$$

Applichiamo a questo vettore l'endomorfismo η^{r-1} . Otteniamo:

$$\mathbf{0} = \eta^{r-1}(a_r \mathbf{v}_r + \dots + a_1 \mathbf{v}_1) = a_r \mathbf{v}_1$$

Ne segue, poiché $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, che si ha $a_r = 0$.

Si ha pertanto:

$$\mathbf{0} = a_{r-1} \mathbf{v}_{r-1} + \dots + a_1 \mathbf{v}_1$$

Applicando a quest'ultimo vettore l'endomorfismo η^{r-2} e ragionando come sopra otteniamo $a_{r-1} = 0$.

Iterando il ragionamento otteniamo:

$$a_r = a_{r-1} = \dots = a_1 = 0$$

Da cui la tesi. \square

Teorema 903 Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo e sia

$$E = \ker \eta^s \oplus \eta^s(E)$$

la sua decomposizione di Fitting. La massima lunghezza delle catene di autovettori generalizzati relativi all'autovalore 0 è uguale a s .

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. \square

7.10 Autospazi generalizzati

Definizione 904 Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo su uno spazio vettoriale E di dimensione n su un campo K e sia λ_i un suo autovalore. Consideriamo

l'endomorfismo $\eta_i = \eta - \lambda_i I$ e consideriamo la decomposizione di Fitting di η_i . Abbiamo

$$E = \ker \eta_i^{s_i} \oplus \eta_i^{s_i}$$

Abbiamo inoltre la seguente successione di sottospazi vettoriali di E :

$$\{\mathbf{0}\} = \ker \eta_i^0 \subset \ker \eta_i = E(\eta, \lambda_i) \subset \ker \eta_i^2 \subset \cdots \subset \ker \eta_i^{s_i} = \ker \eta^{s_i+1}$$

dove tutte le inclusioni sono proprie.

Il sottospazio $\ker \eta_i^{s_i}$ è dato da tutti i vettori v tali che $\eta_i^j(v) = \mathbf{0}$ per qualche j . Esso viene chiamato **autospazio generalizzato** di η **relativo all'autovalore** λ_i e viene indicato con il simbolo $E'(\eta, \lambda_i)$. I suoi vettori non nulli vengono chiamati **autovettori generalizzati relativi all'autovalore** λ_i . L'intero s_i viene chiamato **indice** dell'autovalore λ_i e viene indicato con il simbolo $i(\lambda_i)$.

Nota 905 La definizione appena data è una generalizzazione della definizione di autospazio generalizzato relativo all'autovalore 0.

Teorema 906 Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo, sia λ_i un suo autovalore e sia $E'(\eta, \lambda_i)$ l'autospazio generalizzato di η relativo a λ_i . Si ha che $E'(\eta, \lambda_i)$ è invariante per η .

DIMOSTRAZIONE. Ovviamente $E'(\eta, \lambda_i)$ è invariante per η_i .

Dimostriamo che esso è invariante per η . Sia $\mathbf{v} \in E'(\eta, \lambda_i)$. Si ha:

$$\eta_i(\mathbf{v}) = \eta(\mathbf{v}) - \lambda_i \mathbf{v} = \mathbf{w} \in E'(\eta, \lambda_i)$$

Ne segue:

$$\eta(\mathbf{v}) = \mathbf{w} + \lambda_i \mathbf{v} \in E'(\eta, \lambda_i)$$

poiché $E'(\eta, \lambda_i)$ è un sottospazio vettoriale. \square

Teorema 907 Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo e sia λ_i un suo autovalore. Si ha che la dimensione di $E'(\eta, \lambda_i)$, autospazio generalizzato di η relativo a λ_i , è uguale alla molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i .

DIMOSTRAZIONE. Omessa. \square

Teorema 908 Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo, sia λ_i un suo autovalore e sia $\eta_i = \eta - \lambda_i I$. Sia $\mathbf{v}_r \in \ker \eta_i^r - \ker \eta_i^{r-1}$.

Sia $\mathbf{v}_{r-1} = \eta_i(\mathbf{v}_r)$.

Sia poi $\mathbf{v}_{r-2} = \eta_i(\mathbf{v}_{r-1}) = \eta_i^2(\mathbf{v}_r)$.

E così via, fino a:

$$\mathbf{v}_1 = \eta_i(\mathbf{v}_2) = \eta_i^{r-1}(\mathbf{v}_r).$$

Si ha, per ogni $j = 1, \dots, r-1$:

$$\mathbf{v}_{r-j} \in \ker \eta_i^{r-j} - \ker \eta_i^{r-j-1}.$$

Inoltre i vettori $\mathbf{v}_r, \dots, \mathbf{v}_1$ sono linearmente indipendenti.

La successione degli r vettori viene chiamata **catena di autovettori generalizzati** relativi all'autovalore λ_i , di **lunghezza** r .

DIMOSTRAZIONE. Applicare all'endomorfismo η_i la dimostrazione fatta in 902. \square

Teorema 909 Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo e sia λ_i un suo autovalore. La massima lunghezza delle catene di autovettori generalizzati relativi a l'autovalore λ_i è uguale all'indice $i(\lambda_i)$ dell'autovalore λ_i .

Si ha inoltre

$$i(\lambda_i) \leq ma(\lambda_i)$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione della prima affermazione viene lasciata per esercizio.

La dimostrazione della seconda affermazione segue dalla prima affermazione e dal fatto che una catena di lunghezza r di autovettori generalizzati determina r vettori linearmente indipendenti dello spazio $E'(\eta, \lambda_i)$ il quale ha dimensione uguale a $ma(\lambda_i)$. \square

Teorema 910 Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione uguale a n su un campo K .

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ i suoi autovalori.

Siano $E'(\eta, \lambda_1), E'(\eta, \lambda_2), \dots, E'(\eta, \lambda_p)$ i suoi autospazi generalizzati.

Si ha:

$$E = E'(\eta, \lambda_1) \oplus E'(\eta, \lambda_2) \oplus \dots \oplus E'(\eta, \lambda_p)$$

dove il sottospazio E' di E non coincide necessariamente con E .

DIMOSTRAZIONE. Omessa. \square

7.11 Forma canonica di Jordan

Siamo vicini alla nostra meta: dimostrare che, per ogni endomorfismo $\eta : E \longrightarrow E$ di dimensione n su uno spazio vettoriale K avente tutti gli autovalori in K , esiste una base di E tale che la matrice associata ad η relativamente a tale base sia una matrice di Jordan.

Nota 911 Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione uguale a n su un campo K avente tutti gli autovalori in K .

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ i suoi autovalori distinti.

Si ha:

$$E = E'(\eta, \lambda_1) \oplus E'(\eta, \lambda_2) \oplus \dots \oplus E'(\eta, \lambda_p)$$

Inoltre, se si sceglie una base di E tale che i primi n_1 vettori siano una base di $E'(\eta, \lambda_1)$, i successivi n_2 vettori siano una base di $E'(\eta, \lambda_2)$ e così via, si ha che la matrice associata a η relativamente ad essa è una matrice a p blocchi

$$A = bl(B_1, B_2, \dots, B_p)$$

Consideriamo ora, per ogni intero $i = 1, 2, \dots, p$, l'endomorfismo

$$\eta_i|_{E'(\eta, \lambda_i)} : E'(\eta, \lambda_i) \longrightarrow E'(\eta, \lambda_i)$$

Si tratta di un endomorfismo nilpotente.

Supponiamo di aver determinato una base di Jordan per $\eta_i|_{E'(\eta, \lambda_i)}$. La matrice

B_i'' associata a $\eta_i|_{E'(\eta, \lambda_i)}$ relativamente a tale base è quindi una matrice di Jordan. I suoi blocchi sono blocchi di Jordan relativi all'autovalore 0. Poiché si ha $\eta = \eta_i + \lambda_i I$, la matrice associata a $\eta|_{E'(\eta, \lambda_i)}$ relativamente alla base di cui sopra è data da $B' = B'' + \lambda_i I$. Essa è pertanto una matrice di Jordan. I suoi blocchi sono blocchi di Jordan relativi all'autovalore λ_i (esercizio).

Da tutto ciò segue che, se siamo in grado di determinare una base di Jordan per un endomorfismo nilpotente, siamo in grado di determinare una base di Jordan per qualsiasi endomorfismo di uno spazio vettoriale su un campo K avente tutti gli autovalori in K .

Esempio 912 Prima di dare l'algoritmo per la determinazione di una base di Jordan per un endomorfismo nilpotente vogliamo analizzare il comportamento di un endomorfismo associato ad una matrice di Jordan nilpotente. Sia $\eta : E \rightarrow E$ l'endomorfismo associato alla seguente matrice di Jordan

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

relativamente alla base di Jordan $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_9\}$. Notiamo che si ha la seguente successione di sottospazi vettoriali (sopra ogni sottospazio abbiamo scritto la sua dimensione) e di catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 4 & < & 7 & < & 9 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \eta & \subset & \ker \eta^2 & \subset & \ker \eta^3 \\ \mathbf{0} & \longleftarrow & \mathbf{v}_1 & \longleftarrow & \mathbf{v}_2 & \longleftarrow & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{0} & \longleftarrow & \mathbf{v}_4 & \longleftarrow & \mathbf{v}_5 & \longleftarrow & \mathbf{v}_6 \\ \mathbf{0} & \longleftarrow & \mathbf{v}_7 & \longleftarrow & \mathbf{v}_8 & & \\ \mathbf{0} & \longleftarrow & \mathbf{v}_9 & & & & \end{array}$$

Indichiamo con F_3 il sottospazio vettoriale avente come base $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_6\}$. Si ha:

$$E = \ker \eta^2 \oplus F_3$$

Consideriamo il sottospazio vettoriale $\eta(F_3)$. Esso ha come base $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5\}$.

Consideriamo il sottospazio vettoriale G_2 avente come base $\{\mathbf{v}_8\}$. Si ha:

$$\ker \eta^2 = \ker \eta \oplus \eta(F_3) \oplus G_2$$

Sia $F_2 = \eta(F_3) \oplus G_2$. Esso ha come base $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_8\}$. Consideriamo il sottospazio vettoriale G_1 avente come base $\{\mathbf{v}_9\}$. Si ha:

$$\ker \eta = \eta(F_2) \oplus G_1$$

Tutto ciò ci dà un'idea sull'algoritmo per la determinazione di una base di Jordan.

Teorema 913 Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo nilpotente su uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo K . Esiste allora una base di Jordan per η . **DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo la seguente successione di sottospazi vettoriali di E :

$$\{\mathbf{0}\} = \ker \eta^0 \subset \ker \eta \subset \dots \subset \ker \eta^{s-1} \subset \ker \eta^s = \ker \eta^{s+1} = E$$

dove tutte le inclusioni sono proprie.

Sia F_s un supplementare di $\ker \eta^{s-1}$ in $\ker \eta^s = E$. Cioè:

$$E = \ker \eta^{s-1} \oplus F_s$$

Supponiamo che si abbia $m = \dim F_s$. Consideriamo una base di F_s . Indichiamo con $\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_{2s}, \dots, \mathbf{v}_{ms}$ i vettori di tale base. Consideriamo le m catene di autovettori generalizzati determinate da questi m vettori:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{v}_1 & \longleftarrow & \mathbf{v}_2 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & \mathbf{v}_{s-1} & \longleftarrow & \mathbf{v}_s \\ \mathbf{v}_{s+1} & \longleftarrow & \mathbf{v}_{s+2} & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & \mathbf{v}_{2s-1} & \longleftarrow & \mathbf{v}_{2s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \dots & & \dots \\ \mathbf{v}_{(m-1)s+1} & \longleftarrow & \mathbf{v}_{(m-1)s+2} & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & \mathbf{v}_{ms-1} & \longleftarrow & \mathbf{v}_{ms} \end{array}$$

Si può dimostrare, noi non lo facciamo, che questi vettori sono linearmente indipendenti. Consideriamo ora il sottospazio vettoriale $\eta(F_s)$. Esso ha come base $\{\mathbf{v}_{s-1}, \mathbf{v}_{2s-1}, \dots, \mathbf{v}_{ms-1}\}$ (esercizio) e si ha $\eta(F_s) \cap \ker \eta^{s-2} = \{\mathbf{0}\}$.

Si consideri il sottospazio vettoriale G_{s-1} di $\ker \eta^{s-1}$ tale che si abbia:

$$\ker \eta^{s-1} = \ker \eta^{s-2} \oplus \eta(F_s) \oplus G_{s-1}$$

Si consideri una base di G_{s-1} e si considerino le catene di autovettori generalizzati determinate dai vettori della base scelta di G_{s-1} .

Sia $F_{s-1} = \eta(F_s) \oplus G_{s-1}$.

Si consideri ora il sottospazio vettoriale G_{s-2} di $\ker \eta^{s-2}$ tale che si abbia:

$$\ker \eta^{s-2} = \ker \eta^{s-3} \oplus \eta(F_{s-1}) \oplus G_{s-2}$$

Si consideri una base di G_{s-2} e si considerino le catene di autovettori generalizzati determinate dai vettori della base scelta di G_{s-2} .

Si continui ad operare in questo modo. Otteniamo così una base di Jordan per η . \square

Esempio 914 Consideriamo l'endomorfismo $\eta : E \longrightarrow E$ associato alla seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

relativamente ad una base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_4\}$ di E .

Vogliamo determinare una base di Jordan per η .

Notiamo che la matrice è triangolare superiore. Pertanto i suoi autovalori sono gli elementi della diagonale principale di A . Essendo questi ultimi tutti uguali a 0, si ha che l'endomorfismo η è nilpotente.

Notiamo che si ha $\text{rk} A = 2$. Pertanto si ha $\dim \ker \eta = 4 - 2 = 2$.

Per determinare la successione dei nuclei di η^i consideriamo le immagini successive dei vettori della base considerata. Abbiamo

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e}_1 & \longrightarrow & \mathbf{0} & \\ \mathbf{e}_2 & \longrightarrow & \mathbf{e}_1 & \longrightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_3 & \longrightarrow & \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 & \longrightarrow \mathbf{e}_1 \longrightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_4 & \longrightarrow & \mathbf{0} & \end{array}$$

Da tutto ciò deriva:

$$\dim \eta^2(E) = 1 \implies \dim \ker \eta^2 = 4 - 1 = 3$$

$$\dim \eta^3(E) = 0 \implies \dim \ker \eta^3 = 4 - 0 = 4$$

Abbiamo pertanto la seguente successione di nuclei (sopra abbiamo scritto le loro dimensioni) e le seguenti catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 2 & < & 3 & < & 4 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \eta & \subset & \ker \eta^2 & \subset & \ker \eta^3 \\ \mathbf{0} & \longleftarrow & \mathbf{v}_1 & \longleftarrow & \mathbf{v}_2 & \longleftarrow & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{0} & \longleftarrow & \mathbf{v}_4 & & & & \end{array}$$

Abbiamo quindi una catena di lunghezza 3 e una catena di lunghezza 1. Ne segue che la matrice associata a η relativamente alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Abbiamo pertanto:

$$A' = M^{-1}AM$$

La matrice M è la matrice di passaggio dalla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. Dobbiamo perciò determinare quest'ultima base.

Determiniamo innanzitutto il vettore \mathbf{v}_3 . Dobbiamo scegliere un vettore appartenente a $\ker \eta^3 - \ker \eta^2$. Analizzando le successive immagini dei vettori della base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ ci rendiamo conto che possiamo porre

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3$$

La scelta dei vettori \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_1 è ora obbligata: sono le successive immagini di \mathbf{v}_3 . Abbiamo pertanto:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{v}_2 & = & \eta(\mathbf{v}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{v}_1 & = & \eta^2(\mathbf{v}_3) = \mathbf{e}_1 \end{array}$$

Dobbiamo ora scegliere il vettore \mathbf{v}_4 . Esso deve appartenere a $\ker \eta$ e deve essere linearmente indipendente da \mathbf{v}_1 . Possiamo pertanto porre:

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_4$$

La matrice M è quindi data da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 915 Vogliamo jordanizzare la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Sia η l'endomorfismo di uno spazio vettoriale E di dimensione 3 su R associato alla matrice A relativamente alla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

L'endomorfismo η ha come autovalore $\lambda_1 = 2$ con molteplicità algebrica uguale a 3.

Calcoliamo innanzitutto l'autospazio di η . Si ha:

$$E(\eta, \lambda_1) = \ker(\eta - \lambda_1 I)$$

La matrice associata a $\eta_1 = \eta - \lambda_1 I$ relativamente alla base data è:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi il vettore \mathbf{e}_3 forma una base per $E(\eta, \lambda_1)$.

Notiamo che la matrice A_1 è nilpotente. Determiniamone una base di Jordan. Per far ciò usiamo il solito metodo. Calcoliamo innanzitutto la matrice A_1^2 . Svolgendo i calcoli si nota che essa ha rango uguale a 1. La dimensione di $\ker \eta_1^2$ è quindi uguale a 2. A questo punto è inutile calcolare A_1^3 : sappiamo già che essa è la matrice nulla (esercizio: perchè?). Abbiamo quindi la seguente successione di sottospazi vettoriali (abbiamo scritto sopra ad essi la loro dimensione) e la seguente catena di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 1 & < & 2 & < & 3 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \eta_1 & \subset & \ker \eta_1^2 & \subset & \ker \eta_1^3 = E \\ \mathbf{0} & \longleftarrow & \mathbf{v}_1 & \longleftarrow & \mathbf{v}_2 & \longleftarrow & \mathbf{v}_3 \end{array}$$

dove le frecce rappresentano l'endomorfismo η_1 .

Prendiamo un vettore $\mathbf{v}_3 \in \ker \eta_1^3 - \ker \eta_1^2$.

Analizzando la matrice A_1^2 si nota che possiamo porre $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1$. Poniamo poi

$\mathbf{v}_2 = \eta_1(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v}_1 = \eta_1^2(\mathbf{v}_3) = 6\mathbf{e}_3$. Abbiamo ottenuto una base di Jordan per l'endomorfismo η_1 . La matrice associata ad η_1 relativamente a tale base è la matrice:

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Inoltre

$$\tilde{A}_1 = C^{-1}A_1C$$

con

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha inoltre

$$\eta = \eta_1 + \lambda_1 I$$

e quindi la matrice associata all'endomorfismo η relativamente alla base appena ottenuta è:

$$\tilde{A} = \tilde{A}_1 + \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo ottenuto una matrice di Jordan \tilde{A} simile alla matrice A ; si ha infatti:

$$\tilde{A} = C^{-1}AC$$

Esempio 916 Sia dato lo spazio vettoriale E su R avente come base

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$$

Sia $\eta : E \longrightarrow E$ l'endomorfismo definito da:

$$\eta(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1, \quad \eta(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \eta(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$$

$$\eta(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4, \quad \eta(\mathbf{e}_5) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_5$$

Vogliamo determinare, se esiste, una base di Jordan per η .

Si vede immediatamente che la matrice associata a η relativamente alla base assegnata è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice è triangolare superiore. I suoi autovalori sono gli elementi della diagonale principale. Pertanto η ha 1 come autovalore con molteplicità algebrica

uguale a 5. Esiste quindi una base di Jordan per η . Consideriamo l'endomorfismo $\eta_1 = \eta - I$. La sua matrice associata relativamente alla base assegnata è

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice B è nilpotente. Cerchiamo una base di Jordan. Dobbiamo calcolare i nuclei. Calcoliamo pertanto le immagini successive, attraverso η_1 , dei vettori della base assegnata:

$$\begin{array}{llllll} \mathbf{e}_1 & \longrightarrow & \mathbf{0} & & & \\ \mathbf{e}_2 & \longrightarrow & \mathbf{e}_1 & \longrightarrow & \mathbf{0} & \\ \mathbf{e}_3 & \longrightarrow & \mathbf{e}_1 & \longrightarrow & \mathbf{0} & \\ \mathbf{e}_4 & \longrightarrow & \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 & \longrightarrow & \mathbf{e}_1 & \longrightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_5 & \longrightarrow & \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 & \longrightarrow & 2\mathbf{e}_1 & \longrightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

Ne deduciamo:

$$\dim \eta_1(E) = 3 \implies \dim \ker \eta_1 = 5 - 3 = 2$$

$$\dim \eta_1^2(E) = 1 \implies \dim \ker \eta_1^2 = 5 - 1 = 4$$

$$\dim \eta_1^3(E) = 0 \implies \dim \ker \eta_1^3 = 5 - 0 = 5$$

Abbiamo pertanto la seguente successione di nuclei e le seguenti catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 2 & < & 4 & < & 5 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \eta_1 & \subset & \ker \eta_1^2 & \subset & \ker \eta_1^3 \\ \mathbf{0} & \longleftarrow & \mathbf{v}_1 & \longleftarrow & \mathbf{v}_2 & \longleftarrow & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{0} & \longleftarrow & \mathbf{v}_4 & \longleftarrow & \mathbf{v}_5 & & \end{array}$$

Abbiamo quindi una catena di lunghezza 3 e una catena di lunghezza 2. Ne segue che la matrice associata a η_1 relativamente alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ è:

$$B' = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Abbiamo pertanto:

$$B' = M^{-1}BM$$

La matrice M è la matrice di passaggio dalla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$. Dobbiamo perciò determinare quest'ultima base.

Determiniamo innanzitutto il vettore \mathbf{v}_3 . Dobbiamo scegliere un vettore appartenente a $\ker \eta_1^3 - \ker \eta_1^2$. Analizzando le successive immagini dei vettori della base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ ci rendiamo conto che possiamo porre

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_5$$

La scelta dei vettori \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_1 è ora obbligata: sono le successive immagini, attraverso η_1 , di \mathbf{v}_3 . Abbiamo pertanto:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 &= \eta_1(\mathbf{v}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v}_1 &= \eta_1^2(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{e}_1\end{aligned}$$

Dobbiamo ora scegliere il vettore \mathbf{v}_5 . Indichiamo con F_3 il sottospazio vettoriale generato da \mathbf{v}_3 .

Il vettore \mathbf{v}_5 deve appartenere a $\ker \eta_1^2 - (\ker \eta_1 \oplus \eta_1(F_3))$.

Consideriamo pertanto una base di $\ker \eta_1$ e una base di $\eta_1(F_3)$. Possiamo scegliere le seguenti basi:

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\}$ base di $\ker \eta_1$

$\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$ base di $\eta_1(F_3)$.

Dobbiamo quindi determinare un vettore appartenente a $\ker \eta_1^2$ che sia linearmente indipendente dai vettori:

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ Possiamo pertanto porre:

$$\mathbf{v}_5 = \mathbf{e}_5 - 2\mathbf{e}_4$$

Poniamo infine

$$\mathbf{v}_4 = \eta_1(\mathbf{v}_5) = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$$

La matrice M è quindi data da:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da tutto ciò segue:

$$A' = M^{-1}AM$$

dove $A' = B' + I$ e quindi:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Esempio 917 Vogliamo determinare, se esiste, la forma canonica di Jordan della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo l'endomorfismo $\eta : E \longrightarrow E$ associato alla matrice A relativamente ad una base

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$$

Esso ha come autovalori $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 3 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 2 (fare i conti). Poiché A ha tutti gli autovalori in R la matrice A è jordanizzabile. Sappiamo che si ha:

$$E = E'(\eta, \lambda_1) \oplus E'(\eta, \lambda_2)$$

dove i due autospazi generalizzati hanno dimensione uguale alle molteplicità algebriche dei loro rispettivi autovalori.

Per determinarli consideriamo innanzitutto l'endomorfismo $\eta_1 = \eta - \lambda_1 I$.

Svolgendo i calcoli (esercizio) si nota che si ha la seguente successione di nuclei (come al solito abbiamo posto sopra ad essi le loro dimensioni) e le seguenti catene di autovettori generalizzati relativi all'autovalore λ_1 :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 2 & < & 3 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \eta_1 & \subset & \ker \eta_1^2 = \ker \eta_1^3 \\ \mathbf{0} & \longleftarrow & \mathbf{v}_1 & \longleftarrow & \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{0} & \longleftarrow & \mathbf{v}_3 & & \end{array}$$

Svolgendo i calcoli (esercizio) vediamo che possiamo porre:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$$

$$\mathbf{v}_1 = \eta_1(\mathbf{v}_2) = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_5$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4$$

Consideriamo ora l'endomorfismo $\eta_2 = \eta - \lambda_2 I$.

Svolgendo i calcoli (esercizio) si nota che si ha la seguente successione di nuclei (come al solito abbiamo posto sopra ad essi le loro dimensioni) e la seguente catene di autovettori generalizzati relativi all'autovalore λ_2 :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 1 & < & 2 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \eta_2 & \subset & \ker \eta_2^2 = \ker \eta_2^3 \\ \mathbf{0} & \longleftarrow & \mathbf{v}_4 & \longleftarrow & \mathbf{v}_5 \end{array}$$

Svolgendo i calcoli (esercizio) vediamo che possiamo porre:

$$\mathbf{v}_5 = \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{v}_4 = \eta_2(\mathbf{v}_5) = \mathbf{e}_2$$

Da tutto ciò segue che si ha:

$$A' = M^{-1}AM$$

dove

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 918 Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo jordanizzabile. Sia A' la forma canonica di Jordan dell'endomorfismo η . Sia λ un autovalore di η . Allora:
1) la molteplicità geometrica di λ è uguale al numero di blocchi di Jordan relativi a λ di una qualsiasi matrice di Jordan associata all'endomorfismo η .

2) l'indice di λ è uguale al massimo ordine dei blocchi di Jordan relativi a λ della matrice A' .

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. \square

Esercizio 919 Determinare tutte le forme canoniche di Jordan delle matrici nilpotenti di ordine 2.

Esercizio 920 Determinare tutte le forme canoniche di Jordan delle matrici nilpotenti di ordine 3.

Esercizio 921 Dimostrare che non esiste alcuna matrice A di ordine 3 tale che si abbia:

$$\text{rk}(A) = 2 \quad A^2 = 0$$

Esercizio 922 Determinare tutte le forme canoniche di Jordan delle matrici nilpotenti di ordine 4.

Esercizio 923 Dimostrare che, se $A \in M(K, n, n)$ e A è nilpotente, allora $A^n = 0$.

Esercizio 924 Jordanizzare le seguenti matrici nilpotenti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 925 Jordanizzare la seguente matrice nilpotente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 926 Jordanizzare la seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 927 Jordanizzare la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 928 Jordanizzare la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 929 Jordanizzare le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 930 Jordanizzare le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 931 Jordanizzare le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 932 Jordanizzare le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 933 Jordanizzare le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 934 Jordanizzare le seguenti matrici al variare del parametro $a \in R$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ a & a & a \end{pmatrix}$$

Esercizio 935 Jordanizzare le seguenti matrici al variare del parametro $a \in R$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2a & a & 0 \\ 3a & 4a & a \end{pmatrix}$$

Esercizio 936 Determinare la forma canonica A' di Jordan della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare quindi l'insieme

$$V = \{M \in GL(R, 5) \mid M^{-1}AM = A'\}$$

Determinare infine la cardinalità dell'insieme V .

Esercizio 937 Sia A una matrice triangolare superiore avente tutti gli elementi della diagonale uguali, tutti gli elementi della linea subito superiore alla diagonale principale diversi da zero. Dimostrare che A è simile ad una matrice di Jordan formata da un solo blocco.

Definizione 938 Ad ogni endomorfismo jordanizzabile (e quindi ad ogni matrice quadrata jordanizzabile) sono associati i numeri:

- 1) gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_p$;
- 2) le molteplicità algebriche degli autovalori;
- 3) le molteplicità geometriche degli autovalori;
- 4) gli indici degli autovalori;
- 5) gli ordini dei singoli blocchi di Jordan.

Tutti questi numeri vengono detti **numeri di Jordan** dell'endomorfismo.

7.12 Ancora sulle matrici simili

Nota 939 I numeri di Jordan dipendono esclusivamente dall'endomorfismo. Si ha quindi che, se due matrici rappresentano lo stesso endomorfismo relativamente a basi diverse, allora esse hanno gli stessi numeri di Jordan.

Abbiamo quindi:

Teorema 940 Due matrici, ambedue jordanizzabili, sono simili se e solo se esse hanno gli stessi numeri di Jordan.

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. \square

Esercizio 941 Verificare se le seguenti matrici sono simili in R :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 942 Dimostrare che la seguente matrice, per qualsiasi valore dei parametri a e b in R , è simile ad una matrice di Jordan formata da un solo blocco di Jordan:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Esercizio 943 Verificare se le seguenti matrici sono simili in R :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 944 Dividere l'insieme formato dalle seguenti matrici in classi di equivalenza relative alla relazione di similitudine in R :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} & C &= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} & E &= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} & F &= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\ G &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} & H &= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} & L &= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 945 Determinare, se esistono, due matrici che non siano simili e che abbiano gli stessi autovalori, con la stessa molteplicità algebrica, stessa molteplicità geometrica e con gli stessi indici.

Definizione 946 Un campo K si dice **algebricamente chiuso** se ogni polinomio di grado n a coefficienti nel campo ha n radici in K contate con la loro molteplicità algebrica.

Teorema 947 Il campo C dei numeri complessi è algebricamente chiuso.

DIMOSTRAZIONE. Omessa. \square

Teorema 948 Ogni matrice a coefficienti in un campo algebricamente chiuso è jordanizzabile.

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. \square

Nota 949 Dal teorema 940 segue che, quando abbiamo due matrici jordanizzabili, siamo in grado di dire se esse siano simili.

In particolare, dato un campo K algebricamente chiuso, siamo in grado di dire se due matrici a coefficienti in K siano simili.

Purtroppo non tutti i campi sono algebricamente chiusi. Il campo dei reali, per esempio, non è algebricamente chiuso.

Esercizio 950 Dimostrare che, se due matrici sono una jordanizzabile e l'altra non jordanizzabile, allora esse non sono simili.

Nota 951 Date due matrici entrambe non jordanizzabili, non sappiamo in genere dire se esse siano simili.

In particolare, il campo R dei numeri reali non è algebricamente chiuso. Non ogni matrice di Jordan a coefficienti in R è jordanizzabile. Date quindi due matrici A e B di $M(R, n, n)$ non jordanizzabili in R , non sappiamo dire se esse siano simili in R . Sappiamo però dire se esse siano simili in C . Ci viene in aiuto il seguente:

Teorema 952 Siano $A \in M(R, n, n)$ e $B \in M(R, n, n)$. Si ha:

$A \sim B$ in R (esiste cioè $M \in GL(R, n)$ tale che $M^{-1}AM = B$) \iff

$\iff A \sim B$ in C (esiste cioè $N \in GL(C, n)$ tale che $N^{-1}AN = B$).

DIMOSTRAZIONE. Omessa. Chi è interessato può leggere la parte finale del paragrafo 11 del capitolo 2 di [A.V.] dedicata alla forma canonica reale di Jordan.

\square

Nota 953 Siano $A \in M(R, n, n)$ e $B \in M(R, n, n)$. Il teorema precedente ci permette di utilizzare il seguente algoritmo per vedere se A e B sono simili in R .

- 1) Consideriamo le jordanizzate in C di A e B . Siano esse A' e B' .
- 2) Calcoliamo per mezzo di esse i numeri di Jordan di A e B .
- 3) Le matrici A e B sono simili in C (e quindi in R) se e solo se esse hanno gli stessi numeri di Jordan.

Esercizio 954 Determinare la forma canonica di Jordan in R (o, male che vada, in C) della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 955 Verificare se le seguenti matrici sono simili in R :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 956 Verificare se le seguenti matrici sono simili in R :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 957 Verificare se le seguenti matrici sono simili in R :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 958 Siano date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificare se esse sono simili in R .

Esercizio 959 Sia $A \in M(K, n, n)$. Dimostrare che le matrici A e tA hanno gli stessi polinomi caratteristici.

Esercizio 960 Sia $A \in M(K, n, n)$. Dimostrare che le matrici A e tA hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche e le stesse molteplicità geometriche.

Suggerimento: per dimostrare che gli autovalori di A e tA hanno le stesse molteplicità geometriche, dimostrare che $\text{rk} A = \text{rk} {}^tA$.

Esercizio 961 Sia $A \in M(K, n, n)$ una matrice avente tutti gli autovalori in K . Dimostrare che le matrici A e tA hanno gli stessi numeri di Jordan.

Suggerimento: per ogni autovalore λ_i di A , dimostrare che si ha, per ogni $j \in N$, $\text{rk}(A - \lambda_i)^j = \text{rk}({}^tA - \lambda_i)^j$.

Esercizio 962 Sia $A \in M(K, n, n)$ una matrice avente tutti gli autovalori in K . Dimostrare che le matrici A e tA sono simili.

7.13 Bibliografia

1) **G.Accascina, V.Villani** *Esercizi di algebra lineare*, ETS.

Nei capitoli 2 e 4 sono proposti e risolti molti esercizi sugli endomorfismi di spazi vettoriali.

2) **I.Cattaneo Gasparini** *Strutture algebriche, operatori lineari*, Veschi.

La fine del quarto capitolo e buona parte del quinto capitolo sono dedicati agli endomorfismi di spazi vettoriali.

3) **P.Maroscia** *Problemi di geometria*, Masson editoriale Veschi.

Nei capitoli 6 e 7 sono proposti e risolti molti esercizi sugli endomorfismi di spazi vettoriali.