

## Capitolo 6

# Omomorfismi tra spazi vettoriali

### 6.1 Omomorfismi

Nei capitoli precedenti abbiamo studiato omomorfismi tra gruppi e omomorfismi tra anelli. Si tratta di funzioni tra insiemi dotati di una struttura algebrica che conservano le operazioni. Nel caso degli spazi vettoriali la situazione è analoga. Un omomorfismo tra spazi vettoriali è una funzione che conserva l'operazione di addizione tra vettori e l'operazione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare. Abbiamo già studiato nel corso del primo anno questo argomento. Ne ricordiamo alcuni punti salienti.

**Definizione 759** Definizione di **omomorfismo** (o **applicazione lineare**) tra spazi vettoriali. Vedere [A.V.] Capitolo 2, definizione 9.2 oppure [V.C.P.] capitolo 5, definizione 2.1.

**Nota 760** Un omomorfismo tra spazi vettoriali è in particolare un omomorfismo tra gruppi relativamente all'operazione di addizione.

**Esercizio 761** Sia  $\eta : M(R, p, q) \longrightarrow M(R, q, p)$  l'applicazione definita da  $\eta(A) = {}^tA$  per ogni  $A \in M(R, p, q)$ . Dimostrare che è un omomorfismo tra spazi vettoriali.

**Esercizio 762** Sia  $\phi : M(R, n, n) \longrightarrow M(R, n, n)$  l'applicazione definita da  $\phi(A) = A + {}^tA$  per ogni  $A \in M(R, n, n)$ . Dimostrare che è un omomorfismo tra spazi vettoriali.

**Esercizio 763** Sia  $\psi : M(R, n, n) \longrightarrow M(R, n, n)$  l'applicazione definita da  $\psi(A) = A - {}^tA$  per ogni  $A \in M(R, n, n)$ . Dimostrare che è un omomorfismo tra spazi vettoriali.

**Esercizio 764** Data  $B \in M(R, p, q)$ . Sia  $\eta : M(R, q, r) \longrightarrow M(R, p, r)$  l'applicazione definita da  $\eta(X) = BX$  per ogni  $X \in M(R, q, r)$ . Dimostrare che è un omomorfismo tra spazi vettoriali.

**Teorema 765** Sia  $\eta : E \longrightarrow F$  un omomorfismo tra spazi vettoriali. Si ha allora:

$$\eta(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

$$\eta(-\mathbf{v}) = -\eta(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in E$$

**DIMOSTRAZIONE.** Abbiamo visto ciò nel caso degli omomorfismi tra gruppi.  $\square$

**Teorema 766** Siano  $\alpha : E \longrightarrow F$  e  $\beta : F \longrightarrow G$  omomorfismi. Allora  $\beta \circ \alpha : E \longrightarrow G$  è un omomorfismo.

**DIMOSTRAZIONE.** Lasciata per esercizio.  $\square$

**Definizione 767** Un **isomorfismo** tra spazi vettoriali è un omomorfismo tra spazi vettoriali che sia una corrispondenza biunivoca. Due spazi vettoriali per i quali esista un isomorfismo tra essi si dicono **isomorfi**.

**Teorema 768** La relazione di isomorfismo tra spazi vettoriali è una relazione di equivalenza.

**DIMOSTRAZIONE.** Lasciata per esercizio.  $\square$

**Esercizio 769** Si consideri l'applicazione  $\eta : R^2[x] \longrightarrow R^2$  definita da  $\eta(a + bx) = (a, b)$ . Dimostrare che è un isomorfismo.

**Esercizio 770** Dimostrare che lo spazio vettoriale  $V^2(\pi, O)$  dei vettori di un piano  $\pi$  applicati in un suo punto  $O$  è isomorfo allo spazio vettoriale  $R^2$ .  
Suggerimento. Si consideri una base di  $V^2(\pi, O)$ .

**Esercizio 771** Dimostrare che lo spazio vettoriale  $V^3(O)$  dei vettori dello spazio applicati in un punto  $O$  è isomorfo allo spazio vettoriale  $R^3$ .  
Suggerimento. Si consideri una base di  $V^3(O)$ .

**Teorema 772** Se due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione allora essi sono isomorfi.

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali su un campo  $K$ . Supponiamo che essi abbiano dimensione uguale a  $n$ .

Sia  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  una base di  $V$ .

Sia  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$  una base di  $W$ .

Sia:

$$f : V \longrightarrow W$$

definita da:

$$f(a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n) = a_1\mathbf{w}_1 + \dots + a_n\mathbf{w}_n$$

Si verifica facilmente che  $f$  è un isomorfismo tra spazi vettoriali.  $\square$

**Nota 773** Da ciò segue che, se  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a  $n$  su un campo  $K$ , allora  $V$  è isomorfo a  $K^n$ .

**Esercizio 774** Si segua la dimostrazione del teorema 772 per definire un isomorfismo tra  $R^2[x]$  e  $R^2$  utilizzando le basi canoniche di ambedue gli spazi. Notare che l'isomorfismo che si ottiene non è altro che l'isomorfismo assegnato nell'esercizio 769.

**Esercizio 775** Si segua la dimostrazione del teorema 772 per definire un isomorfismo tra  $R^2[x]$  e  $R^2$  utilizzando per  $R^2[x]$  la base di Lagrange associata ai punti 0 e 1 e per  $R^2$  la base canonica. Notare che l'isomorfismo che si ottiene è diverso da quello ottenuto nell'esercizio precedente.

**Nota 776** Per definire un isomorfismo tra spazi vettoriali aventi la stessa dimensione si è fatto ricorso alle basi degli spazi vettoriali. Cambiando base cambia l'isomorfismo (vedere esercizio precedente). Per questa ragione l'isomorfismo si dice **non canonico**.

**Teorema 777** L'immagine di un omomorfismo  $\eta : V \longrightarrow W$  tra spazi vettoriali è un sottospazio vettoriale di  $W$ .

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. In caso di assoluta necessità vedere [A.V.] Capitolo 2, teorema 9.5. oppure [V.C.P.] capitolo 5, teorema 3.1.  $\square$

**Teorema 778** Il nucleo di un omomorfismo  $\eta : V \longrightarrow W$  tra spazi vettoriali è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. In caso di assoluta necessità vedere [A.V.] Capitolo 2, teorema 9.6. oppure [V.C.P.] capitolo 5, teorema 3.5.  $\square$

**Esercizio 779** Determinare nucleo e immagine dell'omomorfismo definito nell'esercizio 761.

**Esercizio 780** Determinare nucleo e immagine dell'omomorfismo definito nell'esercizio 762.

**Esercizio 781** Determinare nucleo e immagine dell'omomorfismo definito nell'esercizio 763.

**Teorema 782** Un omomorfismo tra spazi vettoriali è iniettivo se e solo se il suo nucleo è formato dal solo vettore nullo.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già visto ciò nel caso di omomorfismi tra gruppi.  $\square$

**Teorema 783** Sia  $\eta : V \longrightarrow W$  un omomorfismo tra spazi vettoriali e sia  $\mathbf{v} \in V$  e  $\mathbf{w} \in W$  tali che  $\eta(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ . Allora:

$$\eta^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v} + \ker \eta$$

DIMOSTRAZIONE. Vista nel caso di omomorfismi tra gruppi.  $\square$

**Teorema 784** Sia  $\eta : V \longrightarrow W$  un omomorfismo tra spazi vettoriali e sia  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$  una base di  $V$ . Allora  $\{\eta(\mathbf{v}_1), \dots, \eta(\mathbf{v}_q)\}$  è un insieme di generatori di  $\eta(V)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathbf{w}$  un vettore dell'immagine di  $\eta$ . Esiste quindi un vettore  $\mathbf{v} \in V$ , tale che si abbia  $\eta(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ . Ma  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$  è una base di  $V$ ; quindi, se  $\mathbf{v} \in V$ , si ha  $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_q\mathbf{v}_q$ . Ma allora, sfruttando il fatto che  $\eta$  è un omomorfismo, segue:

$$\mathbf{w} = \eta(\mathbf{v}) = a_1\eta(\mathbf{v}_1) + \dots + a_q\eta(\mathbf{v}_q)$$

cioè la tesi.  $\square$

Il seguente teorema è l'inverso del teorema 772.

**Teorema 785** Se  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione finita e se  $W$  è uno spazio vettoriale isomorfo a  $V$ , allora le dimensioni di  $V$  e  $W$  sono uguali.

**DIMOSTRAZIONE.** Esercizio.  $\square$

Il teorema di decomposizione di un omomorfismo e il teorema dell'omomorfismo, visti nei capitoli precedenti nel caso di omomorfismi tra gruppi o tra anelli, sono validi anche nel caso di omomorfismi tra spazi vettoriali. Il procedimento è identico a quello visto in precedenza. Ci limitiamo quindi a mettere in luce le differenze.

**Teorema 786** [Teorema dell'omomorfismo tra spazi vettoriali] Dato un omomorfismo tra spazi vettoriali

$$f : V \longrightarrow W$$

si ha che:

1) la relazione di equivalenza in  $V$  definita da:

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{v}' \iff f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}')$$

è compatibile con le operazioni in  $V$ .

2)  $V/\sim = V/\ker f$ .

3)  $V/\ker f$  con le operazioni indotte è uno spazio vettoriale.

4) La funzione quoziente:

$$\pi : V \longrightarrow V/\ker f$$

definita da  $\pi(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \ker f$  è un omomorfismo surgettivo tra spazi vettoriali.

5) La funzione:

$$g : V/\ker f \longrightarrow W' = f(V)$$

definita da  $g(\mathbf{v} + \ker f) = f(\mathbf{v})$  è un isomorfismo tra spazi vettoriali.

6) La funzione inclusione:

$$i : W' \longrightarrow W$$

è un omomorfismo iniettivo tra spazi vettoriali.

7) Si ha infine:

$$f = i \circ g \circ \pi$$

**DIMOSTRAZIONE.** Lasciata per esercizio.  $\square$

**Esercizio 787** Fissato in un piano  $\alpha$  un punto  $O$ , consideriamo lo spazio vettoriale  $V^2(\alpha, O)$  dei vettori del piano  $\alpha$  applicati in  $O$ . Siano  $r$  e  $s$  due rette distinte passanti per  $O$ . Si definisca:

$$f : V^2(\alpha, O) \longrightarrow V^2(\alpha, O)$$

associando ad ogni vettore  $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$  il vettore  $\mathbf{v}' = \overrightarrow{OP'}$  proiezione parallela alla retta  $s$  del vettore  $\mathbf{v}$  sulla retta  $r$ .

- 1) Dimostrare che  $f$  è un omomorfismo tra spazi vettoriali.
- 2) Dimostrare che si ha  $\text{Im } f = r$ .
- 3) Dimostrare che si ha  $\ker f = s$ .
- 4) Dimostrare che  $V^2(\alpha, O)/\ker f$  ha come elementi le rette parallele alla retta  $s$ .

**Esercizio 788** Si consideri l'omomorfismo tra spazi vettoriali:

$$f : R^2 \longrightarrow R^2$$

definito da:

$$f[(x, y)] = (x, x)$$

Determinare nucleo e immagine di  $f$  e dare un'interpretazione geometrica sulla falsariga dell'esercizio precedente.

**Esercizio 789** Sia  $W$  il sottospazio vettoriale di  $R^3$  generato dal vettore  $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$ . Determinare lo spazio vettoriale  $R^3/W$  e dimostrare che esso è isomorfo a  $R^2$ . Si dia quindi un'interpretazione geometrica a tutto ciò considerando  $R^3$  come lo spazio e facendo vedere che  $R^3/W$  è l'insieme delle rette parallele alla retta determinata dal vettore  $\mathbf{w}$ .

Suggerimento. Si consideri un omomorfismo  $f : R^3 \longrightarrow R^3$  tale che

$$f(\mathbf{w}) = \mathbf{0} , \quad f[(1, 0, 0)] = (1, 0, 0) , \quad f[(0, 1, 0)] = (0, 1, 0)$$

Applicare ad  $f$  il teorema dell'omomorfismo.

**Esercizio 790** Sia  $W$  il sottospazio vettoriale di  $R^3$  generato dai vettori  $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$  e  $\mathbf{v}' = (1, 1, 1)$ . Determinare lo spazio vettoriale  $R^3/W$  e dimostrare che esso è isomorfo a  $R$ . Si dia quindi un'interpretazione geometrica a tutto ciò interpretando  $R^3$  come lo spazio e facendo vedere che  $R^3/W$  è l'insieme dei piani paralleli al piano determinato dai vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$ .

Suggerimento. Si consideri un omomorfismo  $f : R^3 \longrightarrow R^3$  tale che

$$f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}') = \mathbf{0} , \quad f[(1, 0, 0)] = (1, 0, 0)$$

Applicare ad  $f$  il teorema dell'omomorfismo.

## 6.2 Omomorfismi e matrici

**Teorema 791** Sia  $\eta : E \longrightarrow F$  un omomorfismo tra spazi vettoriali. Sia  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$  una base di  $E$ . Per ogni vettore

$$\mathbf{v} = b_1 \mathbf{e}_1 + \dots + b_q \mathbf{e}_q \quad \text{di } E$$

si ha:

$$\eta(\mathbf{v}) = b_1 \eta(\mathbf{e}_1) + \dots + b_q \eta(\mathbf{e}_q)$$

La formula precedente con simbolismo compatto diventa:

$$\eta(\mathbf{v}) = \eta \left[ (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \right] = (\eta(\mathbf{e}_1) \dots \eta(\mathbf{e}_q)) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio.  $\square$

**Teorema 792** Siano  $E$  e  $F$  due spazi vettoriali su un campo  $K$ . Sia  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$  una base di  $E$ . Siano  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q\}$  vettori qualsiasi di  $F$ . Allora esiste ed è unico un omomorfismo  $\eta : E \longrightarrow F$  tale che si abbia:

$$\eta(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i \quad i = 1, \dots, q$$

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.  $\square$

**Esempio 793** Consideriamo lo spazio vettoriale  $R^2$  e sia  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  la base canonica di  $R^2$ . Sia  $W$  uno spazio vettoriale su  $R$ . Siano  $\mathbf{f}_1$  e  $\mathbf{f}_2$  due vettori di  $W$ . L'unico omomorfismo  $\eta : R^2 \longrightarrow W$  tale che:

$$\eta(\mathbf{e}_1) = \mathbf{f}_1 \quad , \quad \eta(\mathbf{e}_2) = \mathbf{f}_2$$

è dato da:

$$\eta[(a, b)] = a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2$$

Infatti, poichè  $\eta$  deve essere un omomorfismo, si deve avere:

$$\eta[(a, b)] = \eta(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2) = a\eta(\mathbf{e}_1) + b\eta(\mathbf{e}_2) = a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2$$

**Definizione 794** Sia  $\alpha : E \longrightarrow F$  un omomorfismo tra spazi vettoriali su un campo  $K$ . Siano  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$  e  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$  basi di  $E$  e di  $F$  rispettivamente. Definiamo **matrice associata ad  $\alpha$  relativamente alle basi scelte** la matrice  $A = (a_{ij}) \in M(K, p, q)$  avente come  $j$ -esima colonna le coordinate del vettore  $\alpha(\mathbf{e}_j)$  relative alla base  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$ . Cioè:

$$\alpha(\mathbf{e}_j) = a_{1j}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{pj}\mathbf{f}_p \quad j = 1, \dots, q$$

Usando il simbolismo compatto, si ha quindi:

$$(\alpha(\mathbf{e}_1) \dots \alpha(\mathbf{e}_q)) = (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p)A$$

**Teorema 795** Sia  $\alpha : E \longrightarrow F$  un omomorfismo tra spazi vettoriali su un campo  $K$ . Siano  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$  e  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$  basi di  $E$  e di  $F$  rispettivamente e sia  $A$  la matrice associata ad  $\alpha$  relativamente alle basi scelte. Allora, si ha:

$$\alpha(\mathbf{v}) = \alpha(b_1\mathbf{e}_1 + \dots + b_q\mathbf{e}_q) = (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p)A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

Ossia, usando il simbolismo compatto:

$$\alpha \left[ (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p)A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Lasciata per esercizio. Basta applicare le formule viste in precedenza.  $\square$

**Esempio 796** Si consideri l'omomorfismo  $\eta : R^3 \longrightarrow R^2$  definito da  $\eta[(x, y, z)] = (z, y)$ .

Cerchiamo la matrice associata all'omomorfismo relativamente alle basi canoniche  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  e  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$  di  $R^3$  e  $R^2$  rispettivamente. Si ha:

$$\eta(\mathbf{e}_1) = \eta[(1, 0, 0)] = (0, 0) = 0\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2$$

$$\eta(\mathbf{e}_2) = \eta[(0, 1, 0)] = (0, 1) = 0\mathbf{f}_1 + 1\mathbf{f}_2$$

$$\eta(\mathbf{e}_3) = \eta[(0, 0, 1)] = (1, 0) = 1\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2$$

La matrice associata a  $\eta$  relativamente alle basi canoniche è quindi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Definizione 797** Siano  $E$  e  $F$  spazi vettoriali su un campo  $K$ . Sia  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$  una base di  $E$  e  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$  una base di  $F$ .

Sia  $A \in M(K, p, q)$ . Si definisce **omomorfismo associato ad  $A$  relativamente alle basi  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ ,  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$**  l'omomorfismo definito da:

$$\eta(\mathbf{e}_j) = a_{1j}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{pj}\mathbf{f}_p \quad j = 1, \dots, q$$

**Esempio 798** Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'omomorfismo  $\eta' : R^3 \longrightarrow R^2$  associato ad  $A$  relativamente alle basi canoniche dei due spazi è tale che:

$$\eta'(\mathbf{e}_1) = 0\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2 = \mathbf{0} \ , \ \eta'(\mathbf{e}_2) = 0\mathbf{f}_1 + 1\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_2 \ , \ \eta'(\mathbf{e}_3) = 1\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1$$

Quindi:

$$\eta'[(x, y, z)] = x\eta'(\mathbf{e}_1) + y\eta'(\mathbf{e}_2) + z\eta'(\mathbf{e}_3) = x\mathbf{0} + y\mathbf{f}_2 + z\mathbf{f}_1 = (z, y)$$

Notiamo che l'omomorfismo  $\eta'$  coincide con l'omomorfismo  $\eta$  visto nell'esempio 796.

**Teorema 799** Sia  $\alpha : E \longrightarrow F$  un omomorfismo tra spazi vettoriali su un campo  $K$ . Siano  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$  e  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$  basi di  $E$  e di  $F$  rispettivamente e sia  $A$  la matrice associata ad  $\alpha$  relativamente alle basi scelte. Quindi:

$$\alpha \left[ (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

Siano  $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_q\}$  e  $\{\mathbf{f}'_1, \dots, \mathbf{f}'_p\}$  altre basi di  $E$  e di  $F$  rispettivamente e sia  $A'$  la matrice associata ad  $\alpha$  relativamente ad esse. Quindi:

$$\alpha \left[ (\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_q) \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{f}'_1 \dots \mathbf{f}'_p) A' \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix}$$

Sia:

$$(\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_q) = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) M$$

Sia:

$$(\mathbf{f}'_1 \dots \mathbf{f}'_p) = (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p) N$$

Si ha allora:

$$A' = N^{-1} A M$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha:

$$\begin{aligned} \alpha \left[ (\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_q) \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix} \right] &= \alpha \left[ (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) M \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix} \right] = \\ &= (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p) A M \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix} = (\mathbf{f}'_1 \dots \mathbf{f}'_p) N^{-1} A M \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da cui la tesi.  $\square$

**Teorema 800** Siano  $E, F, G$  spazi vettoriali su un campo  $K$  aventi come basi rispettivamente  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ ,  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$ ,  $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_r\}$ .

Sia  $\alpha : E \longrightarrow F$  un omomorfismo avente come matrice associata relativamente alle basi  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$  e  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$  la matrice  $A$ .

Sia  $\beta : F \longrightarrow G$  un omomorfismo avente come matrice associata relativamente



alle basi  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$  e  $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_r\}$  la matrice  $B$ . Allora l'omomorfismo  $\beta \circ \alpha$  ha come matrice associata relativamente alle basi  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$  e  $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_r\}$  la matrice  $BA$ .

DIMOSTRAZIONE. Poichè  $A$  è la matrice associata ad  $\alpha$  si ha:

$$\alpha \left[ (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

Poichè  $B$  è la matrice associata a  $\beta$ , si ha:

$$\beta \left[ (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{g}_1 \dots \mathbf{g}_r) B \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$$

Ma allora:

$$\begin{aligned} (\beta \circ \alpha) \left[ (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \right] &= \beta \left[ \alpha \left[ (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \right] \right] = \\ &= \beta \left[ (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{g}_1 \dots \mathbf{g}_r) BA \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da cui la tesi.  $\square$

**Teorema 801** Sia  $\alpha : E \longrightarrow F$  un omomorfismo tra spazi vettoriali su  $K$  aventi come basi rispettivamente  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$  e  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$ . Sia  $A$  la matrice associata ad  $\alpha$  relativamente alle basi scelte. Allora:

1)  $\dim \alpha(E) = \text{rk}(A)$

2)  $\dim \text{Ker } \alpha = \dim E - \text{rk}(A)$

da cui:

3)  $\dim E = \dim \text{Ker } \alpha + \dim \alpha(E)$

DIMOSTRAZIONE.

1) Sappiamo che  $\{\alpha(\mathbf{e}_1), \dots, \alpha(\mathbf{e}_q)\}$  è un insieme di generatori di  $\alpha(E)$ . Per estrarre da questi una base, consideriamo la matrice avente come colonne le coordinate di tali vettori relative alla base scelta in  $F$ . Tale matrice è proprio la matrice  $A$ . Dal teorema 692 del capitolo 5 segue la tesi.

2) Cerchiamo i vettori  $\mathbf{v} \in E$  tali che  $\alpha(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ . Sia:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$\alpha(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Da cui:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Abbiamo un sistema omogeneo di  $p$  equazioni in  $q$  incognite. Lo spazio vettoriale delle soluzioni ha dimensione uguale a  $q - \text{rango } A$ . Da cui la tesi.  $\square$

**Nota 802** La dimostrazione appena data dà un modo concreto per determinare una base per il nucleo di  $\alpha$  e una base per l'immagine di  $\alpha$ .

**Teorema 803** Sia  $\alpha : E \longrightarrow F$  un omomorfismo tra spazi vettoriali su  $K$  di dimensione finita aventi come basi rispettivamente  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$  e  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$ . Sia  $A$  la matrice associata ad  $\alpha$  relativamente alle basi scelte. L'omomorfismo  $\alpha$  è un isomorfismo se e solo se la matrice  $A$  è invertibile.

Inoltre, se  $\alpha$  è un isomorfismo, la matrice associata all'isomorfismo  $\alpha^{-1}$  relativamente alle basi date è la matrice  $A^{-1}$ .

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.  $\square$

**Esercizio 804** Sia  $L : S(R, 2) \longrightarrow R^2[x]$  definito da:

$$L(B) = \text{tr } B + (\text{tr}' B)x$$

dove:

$\text{tr } B$  = somma degli elementi della diagonale principale di  $B$ ,

$\text{tr}' B$  = somma degli elementi della diagonale secondaria di  $B$ .

(Ricordiamo che  $S(R, 2)$  è lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2 a coefficienti reali).

1) Dimostrare che  $L$  è un omomorfismo.

2) Dimostrare che:

$$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di  $S(R, 2)$ .

Questa base viene detta **base canonica** di  $S(R, 2)$ .

3) Determinare la matrice  $A$  associata a  $L$  relativamente alla base canonica di  $S(R, 2)$  e alla base canonica di  $R^2[x]$ .

4) Dimostrare che:

$$\left\{ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di  $S(R, 2)$ .

5) Dimostrare che  $\{\mathbf{f}_1 = 1 + x, \mathbf{f}_2 = 1 - x\}$  è una base di  $R^2[x]$ .

6) Determinare la matrice  $A'$  associata a  $L$  relativamente alle basi date in 4) e 5).

Si suggerisce di rispondere alla domanda 6) in due modi:

a) determinando direttamente la matrice  $A'$ ;

b) determinando la matrice  $A'$  utilizzando la matrice  $A$  e il teorema 799.

**Esercizio 805** Sia  $L' : M(R, 2, 2) \longrightarrow S(R, 2)$  definito da:

$$L'(B) = B + {}^t B$$

1) Dimostrare che  $L'$  è un omomorfismo.

2) Determinare la matrice associata a  $L'$  relativamente alle basi canoniche.

3) Dato l'omomorfismo  $L$  definito nell'esercizio precedente, determinare la matrice associata a  $L \circ L'$  relativamente alle basi canoniche.

Si suggerisce di rispondere alla domanda 3) in due modi:

a) determinando direttamente la matrice associata;

b) determinando la matrice associata utilizzando il teorema 800 e le matrici associate a  $L$  e a  $L'$  relativamente alle basi canoniche che sono state calcolate in precedenza.

**Esercizio 806** Determinare basi per il nucleo e l'immagine degli omomorfismi  $L, L', L \circ L'$  definiti nei due esercizi precedenti.

**Esercizio 807** Determinare la matrice associata, relativamente alla base canonica, all'omomorfismo:

$$\eta : M(R, 2, 2) \longrightarrow M(R, 2, 2)$$

definito da  $\eta(A) = A + {}^t A$ .

**Esercizio 808** Verificare che le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

formano una base di  $M(R, 2, 2)$ .

Dato quindi l'omomorfismo dell'esercizio precedente, determinarne la matrice associata relativa a quest'ultima base.

**Esercizio 809** Sia  $\alpha : M(R, 2, 2) \longrightarrow R^2$  definito da:

$$\alpha \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = (a + d, b + c)$$

i) Dimostrare che  $\alpha$  è un omomorfismo tra spazi vettoriali su  $R$ .

ii) Determinare la matrice  $A$  associata ad  $\alpha$  relativamente alle basi canoniche.

iii) Determinare nucleo e immagine di  $\alpha$ .

**Esercizio 810** Sia  $\beta : R^2 \longrightarrow C$  definito da:

$$\beta[(x, y)] = x + (x + y)i$$

- i) Dimostrare che  $\beta$  è un omomorfismo tra spazi vettoriali su  $R$ .
- ii) Determinare la matrice  $B$  associata a  $\beta$  relativamente alle basi canoniche.
- iii) Determinare nucleo e immagine di  $\beta$ .

**Esercizio 811** Sia  $\gamma = \beta \circ \alpha$  dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono gli omomorfismi definiti negli ultimi due esercizi.

- i) Determinare la matrice  $C$  associata ad  $\gamma$  relativamente alle basi canoniche.
- ii) Determinare nucleo e immagine di  $\gamma$ .

**Teorema 812** Siano  $A \in M(K, p, q)$  e  $B \in M(K, r, p)$ . Allora:

$$\text{rk}(BA) \leq \text{rk}(A) \quad , \quad \text{rk}(BA) \leq \text{rk}(B)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Lasciata per esercizio. Suggerimento. Si considerino le matrici  $A$  e  $B$  come omomorfismi tra spazi vettoriali e si ricordi la relazione intercorrente tra la dimensione dell'immagine di un omomorfismo e il rango della matrice ad esso associata.  $\square$

**Esercizio 813** Determinare due matrici  $A$  e  $B$  tali che:

$$\text{rk}(BA) < \text{rk}(A) \quad , \quad \text{rk}(BA) < \text{rk}(B)$$

**Esercizio 814** Sia  $A \in M(K, m, n)$  e  $B \in M(K, r, m)$  e sia  $\text{rk}(A) = m$ . Dimostrare che allora si ha  $\text{rk}(BA) = \text{rk}(B)$ .

Suggerimento. Pensare le matrici come omomorfismi. Uno di essi è surgettivo.

### 6.3 Spazio degli omomorfismi

**Definizione 815** Sia  $\text{Hom}(E, F)$  l'insieme degli omomorfismi tra lo spazio vettoriale  $E$  e lo spazio vettoriale  $F$ . Definiamo in  $\text{Hom}(E, F)$  una operazione di addizione nel seguente modo:

dati gli omomorfismi  $\alpha : E \longrightarrow F$  e  $\beta : E \longrightarrow F$  definiamo:

$$\alpha + \beta : E \longrightarrow F$$

nel seguente modo:

$$(\alpha + \beta)(\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{v})$$

Si verifica (esercizio) che  $\alpha + \beta$  è un omomorfismo.

Definiamo in  $\text{Hom}(E, F)$  una operazione di moltiplicazione per uno scalare nel seguente modo:

dato l'omomorfismo  $\alpha : E \longrightarrow F$  e l'elemento  $k \in K$ , definiamo:

$$k\alpha : E \longrightarrow F$$

nel seguente modo:

$$(k\alpha)(\mathbf{v}) = k\alpha(\mathbf{v})$$

Si verifica (esercizio) che  $k\alpha$  è un omomorfismo.

**Teorema 816** L'insieme  $\text{Hom}(E, F)$  con le operazioni di cui sopra è uno spazio vettoriale.

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio.  $\square$

**Teorema 817** Siano  $E$  e  $F$  spazi vettoriali su un campo  $K$ .

Siano  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$  e  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$  basi di  $E$  e  $F$  rispettivamente.

Si consideri l'applicazione:

$$\psi : \text{Hom}(E, F) \longrightarrow M(K, p, q)$$

che associa ad ogni omomorfismo la matrice ad esso associata relativamente alle basi date.

Allora:

- l'applicazione  $\psi$  è un isomorfismo tra spazi vettoriali;
- l'isomorfismo inverso di  $\psi$  è l'applicazione che associa ad ogni matrice l'omomorfismo associato ad essa relativamente alle basi date.

Da tutto ciò segue inoltre:

$$\dim \text{Hom}(E, F) = \dim E \cdot \dim F$$

DIMOSTRAZIONE. Facile esercizio.  $\square$

**Nota 818** L'isomorfismo appena definito dipende dalla scelta delle basi. In altre parole, se si cambiano le basi, cambia l'isomorfismo. Per questa ragione l'isomorfismo viene detto **non canonico**.

**Esempio 819** Consideriamo in  $R^3$  lo spazio vettoriale  $\pi$  formato dai vettori  $(x, y, z)$  tali che  $x + y + z = 0$ . Vogliamo dimostrare che l'insieme  $W$  degli omomorfismi  $\eta : R^3 \longrightarrow R^4$  tali che  $\pi \subseteq \ker \eta$  è un sottospazio vettoriale di  $\text{Hom}(R^3, R^4)$  e vogliamo determinarne la dimensione.

Siano  $\eta$  e  $\beta$  elementi di  $W$ . Quindi:

$$\eta(\mathbf{v}) = \beta(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{v} \in \pi$$

Dobbiamo dimostrare che si ha  $\eta + \beta \in W$  e che, per ogni  $k \in R$ , si ha  $k\eta \in W$ . Per ogni  $\mathbf{v} \in \pi$ , si ha:

$$(\eta + \beta)(\mathbf{v}) = \eta(\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{v}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad (k\eta)(\mathbf{v}) = k(\eta(\mathbf{v})) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Abbiamo dimostrato quel che volevamo.

Dobbiamo ora determinare la dimensione di  $W$ . Per far ciò, ci è utile vedere come è fatto un omomorfismo di  $W$ . Sappiamo che, per definire un omomorfismo  $\eta : R^3 \longrightarrow R^4$ , è sufficiente definire le immagini dei vettori di una base di  $R^3$ .

Poichè noi vogliamo che si abbia  $\pi \subseteq \ker \eta$  ci conviene scegliere una base di  $R^3$  che abbia due vettori in  $\pi$ . Si consideri allora una base di  $\pi$ . Sia  $\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1)\}$  una base di  $\pi$ . Completiamo tale base aggiungendo ad essa un vettore linearmente indipendente. Sia, per esempio:

$$\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)\}$$

una base di  $R^3$ .

Un omomorfismo  $\eta : R^3 \longrightarrow R^4$  appartiene a  $W$  se e solo se:

$$\eta(\mathbf{v}_1) = \eta(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$$

Notiamo inoltre che non abbiamo alcuna condizione su  $\eta(\mathbf{v}_3)$ .

La matrice associata ad un omomorfismo  $\eta \in W$  relativamente alla base  $\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)\}$  di  $R^3$  e alla base canonica di  $R^4$  è del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Per determinare la dimensione di  $W$  basta determinare la dimensione del sotto-spazio  $W'$  di  $M(R, 4, 3)$  formato dalle matrici di cui sopra. Si verifica facilmente che  $W'$  ha dimensione uguale a 4. Quindi  $\dim W = 4$ .

## 6.4 Bibliografia

1) **G.Accascina, V.Villani** *Esercizi di algebra lineare*, ETS.

Nei capitoli 2 e 4 sono proposti e risolti molti esercizi sugli omomorfismi tra spazi vettoriali.

2) **I.Cattaneo Gasparini** *Strutture algebriche, operatori lineari*, Veschi.

Il quarto capitolo è dedicato agli omomorfismi tra spazi vettoriali.

3) **P.Maroscia** *Problemi di geometria*, Masson editoriale Veschi.

Nel quinto capitolo sono proposti e risolti molti esercizi sugli omomorfismi tra spazi vettoriali.

4) **S.Lang** *Algebra Lineare*, Boringhieri.

Il quarto e il quinto capitolo sono dedicati agli omomorfismi tra spazi vettoriali.

5) **F.Brogia, E.Fortuna, D.Luminati** *Problemi risolti di algebra lineare* Decibel, Padova.