

## Capitolo 2

# Teoria ingenua degli insiemi

### 2.1 Insiemi equipotenti

Abbiamo visto nel primo capitolo che ad ogni insieme finito  $A$  possiamo associare la sua potenza, o cardinalità  $|A|$ : il numero dei suoi elementi. Abbiamo poi visto che, per ogni insieme finito  $A$ , si ha che la cardinalità di  $A$  è minore della cardinalità dell'insieme  $P(A)$  delle parti di  $A$ . In formule:

$$A \text{ finito} \implies |A| < |P(A)|$$

Vogliamo generalizzare questo teorema ad insiemi non necessariamente finiti. Per fare ciò dobbiamo innanzitutto dare la definizione di cardinalità di un insieme non necessariamente finito. Prendiamo spunto dalla seguente proprietà degli insiemi finiti:

**Teorema 184** Siano  $A$  e  $B$  due insiemi finiti non vuoti; allora  $A$  e  $B$  hanno la stessa cardinalità se e solo se esiste una corrispondenza biunivoca tra  $A$  e  $B$ .

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio.  $\square$

**Nota 185** L'insieme vuoto  $\emptyset$  non è ovviamente in corrispondenza biunivoca con alcun insieme.

Diamo allora la seguente:

**Definizione 186** Due insiemi  $A$  e  $B$  si dicono **equipotenti** se esiste una corrispondenza biunivoca tra essi. Indichiamo il fatto che  $A$  e  $B$  sono equipotenti con il simbolo  $A \sim B$ . Per definizione diciamo che l'insieme vuoto è equipotente a se stesso.

**Teorema 187** La relazione di equipotenza è una relazione di equivalenza.

DIMOSTRAZIONE. a) Proprietà riflessiva:  $A \sim A$  per ogni insieme  $A$ .

La funzione identica  $id_A : A \longrightarrow A$  è biunivoca; è quindi valida la proprietà riflessiva.

b) Proprietà simmetrica:  $A \sim B \implies B \sim A$ .

Infatti  $A \sim B$  implica che esiste una funzione biunivoca  $f : A \longrightarrow B$ , ma allora la funzione  $f^{-1} : B \longrightarrow A$  è biunivoca; quindi  $B \sim A$ .

c) Proprietà transitiva:  $A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$ . La dimostrazione viene lasciata per esercizio. Suggerimento: sfruttare il fatto che la composizione di funzioni biunivoche è una funzione biunivoca.  $\square$

**Definizione 188** Dato un insieme  $A$ , chiamiamo **cardinalità**, o **potenza**, o **numero cardinale** di  $A$ , la classe di equivalenza determinata da  $A$  relativamente alla relazione di equipotenza. Indichiamo tale classe con  $|A|$ .

Si ha quindi:

$$|A| = |B| \iff A \sim B \iff \exists f : A \longrightarrow B \text{ biunivoca}$$

Poniamo per definizione:

$$|\emptyset| = 0$$

**Nota 189** Sia  $n$  un numero naturale. Tutti gli insiemi aventi  $n$  elementi appartengono ovviamente ad una stessa classe di equivalenza. Useremo quindi il simbolo  $n$  anche per indicare la classe di equivalenza degli insiemi aventi  $n$  elementi. Abbiamo pertanto le cardinalità finite  $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$

**Esempio 190** L'insieme  $r$  dei punti di una retta ha la cardinalità dell'insieme  $R$  dei numeri reali. Fissato infatti sulla retta un sistema di riferimento, la funzione che associa ad ogni punto della retta  $r$  la sua coordinata è una corrispondenza biunivoca tra  $r$  e  $R$ .

**Esempio 191** L'insieme  $\alpha$  dei punti di un piano ha la cardinalità dell'insieme  $R^2$ . Fissato infatti un sistema di riferimento sul piano  $\alpha$ , la funzione che associa ad ogni punto di  $\alpha$  le sue coordinate è una corrispondenza biunivoca tra  $\alpha$  e  $R^2$ .

**Esercizio 192** Dimostrare che l'insieme dei punti dello spazio euclideo ha la cardinalità di  $R^3$ .

**Nota 193** Abbiamo visto che le cardinalità finite possono essere poste in corrispondenza biunivoca con i numeri  $0, 1, 2, \dots$ . Le cardinalità finite hanno una ovvia relazione d'ordine totale:

$$0 < 1 < 2 < \dots < n < n + 1 < \dots$$

Esistono però anche numeri cardinali non finiti, quelli degli insiemi con infiniti elementi. Vogliamo ora introdurre nei numeri cardinali, non necessariamente finiti, una relazione di ordine. Prendiamo spunto dalla seguente proprietà degli insiemi finiti:

**Teorema 194** Siano  $A$  e  $B$  due insiemi finiti non vuoti. Allora  $|A| \leq |B|$  se e solo se esiste una funzione iniettiva  $f : A \longrightarrow B$ .

Inoltre la cardinalità 0 dell'insieme vuoto è minore o uguale alla cardinalità di un qualsiasi insieme finito.

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.  $\square$

Poniamo allora la seguente:

**Definizione 195** Poniamo per definizione  $0 \leq a$  per ogni cardinalità  $a$ .  
Date due cardinalità  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ , poniamo:

$$a \leq b$$

se e solo se, dati gli insiemi  $A$  e  $B$  tali che  $|A| = a$  e  $|B| = b$ , esiste una funzione iniettiva  $f : A \rightarrow B$ .

**Nota 196** Dobbiamo dimostrare che la definizione è ben posta. Dobbiamo cioè far vedere che la definizione non dipende dalla scelta degli insiemi  $A$  e  $B$ . Siano infatti dati gli insiemi  $A'$  e  $B'$  tali che  $|A'| = a$  e  $|B'| = b$ . Dobbiamo dimostrare che, se esiste  $f : A \rightarrow B$  iniettiva, allora esiste una funzione  $f' : A' \rightarrow B'$  iniettiva. Dalle ipotesi segue che esistono le funzioni biunivoche:  
 $h : A \rightarrow A'$  e  $k : B \rightarrow B'$ .

Si ha allora (esercizio) che la funzione:

$$k \circ f \circ h^{-1} : A' \rightarrow B'$$

è iniettiva.

**Teorema 197** Dati due insiemi non vuoti  $A$  e  $B$  si ha:

$|A| \leq |B|$  se e solo se esiste  $B'$  sottoinsieme di  $B$  ed una funzione biunivoca  $f : A \rightarrow B'$ .

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio.  $\square$

Si ha il seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione:

**Teorema 198** [Teorema di Cantor<sup>1</sup>-Bernstein<sup>2</sup>] Siano  $A$  e  $B$  due insiemi. Se esistono funzioni iniettive  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow A$ , allora esiste una funzione biunivoca  $h : A \rightarrow B$ .  $\square$

**Nota 199** L'enunciato del teorema precedente è stato dato da Cantor il quale però non è stato in grado di darne una dimostrazione. Nel 1897 indipendentemente Bernstein e Schröder<sup>3</sup> hanno dimostrato il teorema. Per questa ragione il teorema in questione viene anche detto Teorema di Schröder-Berstein.

Chi è interessato alla dimostrazione del teorema può consultare il paragrafo 10 del primo capitolo del testo di Lombardo Radice oppure l'esercizio E.12.10 del testo di Fontana, Gabelli. Vedere la bibliografia alla fine del capitolo.

**Teorema 200** La relazione introdotta nella definizione 195 nell'insieme delle cardinalità è una relazione d'ordine totale.

DIMOSTRAZIONE. a) Proprietà riflessiva. Viene lasciata per esercizio.

<sup>1</sup>Georg Cantor, (1845-1918), matematico tedesco.

<sup>2</sup>Felix Bernstein, (1878-1956), matematico tedesco allievo di Cantor.

<sup>3</sup>Ernst Schröder, (1841-1902), matematico tedesco.

- b) Proprietà antisimmetrica.  $|A| \leq |B|$ ,  $|B| \leq |A| \implies |A| = |B|$ . Questa proprietà non è altro che il teorema di Cantor-Bernstein.
- c) Proprietà transitiva. Viene lasciata per esercizio.
- d) Se  $A$  e  $B$  sono due insiemi, allora si ha  $|A| \leq |B|$  oppure  $|B| \leq |A|$ . La dimostrazione di ciò viene omessa.  $\square$

**Definizione 201** Date due cardinalità  $a$  e  $b$  definiamo  $a < b$  se e solo se  $a \leq b$  e  $a \neq b$ .

In particolare  $0 < a$  per ogni cardinalità  $a \neq 0$ . Dati quindi due insiemi  $A$  e  $B$  non vuoti, si ha  $|A| < |B|$  se esiste una funzione iniettiva  $f : A \longrightarrow B$  e non esiste una funzione biunivoca  $g : A \longrightarrow B$ .

Possiamo ora finalmente enunciare (e dimostrare) il teorema di cui abbiamo parlato all'inizio del paragrafo:  $|A| < |P(A)|$  per ogni insieme  $A$ . Per capire meglio la dimostrazione è utile risolvere il seguente:

**Esercizio 202** Sia  $A$  un insieme non vuoto.

Sia  $g : A \longrightarrow P(A)$ ; quindi la funzione  $g$  associa ad ogni elemento di  $A$  un sottoinsieme  $g(a)$  di  $A$ . Poniamo:

$$B_g = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$$

- i) Determinare  $B_g$  nel caso in cui la funzione  $g$  sia definita da:  
 $g(a) = \{a\} \forall a \in A$ .
- ii) Determinare  $B_g$  nel caso in cui la funzione  $g$  sia definita da:  
 $g(a) = \emptyset \forall a \in A$ .
- iii) Determinare  $B_g$  nel caso in cui la funzione  $g$  sia definita da:  
 $g(a) = A \forall a \in A$ .
- iv) Determinare  $B_g$  nel caso in cui la funzione  $g$  sia definita da:  
 $g(a) = A - \{a\} \forall a \in A$ .
- v) Dato  $A = A_1 \cup A_2$ , con  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , determinare una funzione  $g : A \longrightarrow P(A)$  tale che si abbia  $B_g = A_1$ .

**Teorema 203** Dato un insieme  $A$ , non necessariamente finito, si ha:

$$|A| < |P(A)|$$

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $A = \emptyset$  il teorema è ovviamente vero.

Sia allora  $A$  un insieme non vuoto.

La funzione  $f : A \longrightarrow P(A)$  che associa ad ogni elemento  $a$  di  $A$  il sottoinsieme  $\{a\}$  di  $A$  formato dall'elemento  $a$  stesso è chiaramente una funzione iniettiva. Quindi  $|A| \leq |P(A)|$ .

Supponiamo ora, per assurdo, che esista una funzione  $g : A \longrightarrow P(A)$  che sia biunivoca. Poniamo:

$$B_g = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$$

Chiaramente  $B_g$  è un sottoinsieme di  $A$ , quindi  $B_g \in P(A)$ . Poichè la funzione  $g$  è biunivoca, esiste  $a \in A$  tale che  $g(a) = B_g$ . Si ha allora una delle seguenti

possibilità: o  $a \in B_g$  oppure  $a \notin B_g$ . Se  $a \in B_g$  allora, per definizione di  $B_g$ , si ha  $a \notin g(a)$ . Ma  $g(a) = B_g$ , quindi  $a \notin B_g$ . Il che è assurdo perchè non si può avere contemporaneamente  $a \in B_g$  e  $a \notin B_g$ . D'altronde, se  $a \notin B_g$ , allora, per definizione di  $B_g$ , si ha  $a \in g(a) = B_g$ . Anche in questo caso siamo arrivati ad un assurdo. Abbiamo quindi un elemento  $a \in A$  non appartenente nè a  $B_g$  nè a  $A - B_g$ . Ciò è assurdo. L'assurdo è nato dall'aver supposto l'esistenza di una funzione biunivoca  $g : A \rightarrow P(A)$ .  $\square$

## 2.2 Insiemi infiniti

**Teorema 204** Se  $A$  è un insieme finito, allora non esiste alcun sottoinsieme  $B$  di  $A$ , con  $B \neq A$ , che sia equipotente ad  $A$ .

DIMOSTRAZIONE. Induzione sul numero degli elementi dell'insieme.

Se  $A$  non ha alcun elemento si ha  $A = \emptyset$ : In questo caso il teorema è banalmente verificato poiché  $A$  non ha alcun sottoinsieme distinto da esso.

Se  $A$  ha un solo elemento, l'unico sottoinsieme non coincidente con esso è  $\emptyset$ . Chiaramente  $A$  e  $\emptyset$  non sono equipotenti. Sia vero il teorema per ogni insieme formato da  $n - 1$  elementi con  $n > 1$ . Ciò vuol dire che, se  $B$  è un insieme con  $n - 1$  elementi, allora non esiste alcuna corrispondenza biunivoca tra  $B$  ed un suo qualsiasi sottoinsieme proprio.

Dimostriamo ora il teorema per un insieme  $A$  con  $n$  elementi. Supponiamo, per assurdo, che esista una funzione biunivoca  $f : A \rightarrow A'$  con  $A'$  sottoinsieme proprio di  $A$ .

Sia  $a \in A - A'$ . Sia  $f(a) = a'$ . Si ha (esercizio)  $A' - \{a'\} \subset A - \{a\}$  e  $a' \in A - \{a\}$ ,  $a' \notin A' - \{a'\}$  e quindi  $A' - \{a'\} \neq A - \{a\}$ . La funzione  $g : A - \{a\} \rightarrow A' - \{a'\}$  definita da  $g(x) = f(x) \forall x \in A - \{a\}$  è una corrispondenza biunivoca (esercizio). Abbiamo contraddetto l'ipotesi induttiva perchè  $A - \{a\}$  ha  $n - 1$  elementi. L'assurdo nasce dal fatto di aver supposto che esista la funzione biunivoca  $f$ .  $\square$

Ci chiediamo se questa proprietà sia valida anche per gli insiemi infiniti. La risposta è negativa come dimostra il seguente :

**Esempio 205** Sia  $2N$  il sottoinsieme di  $N$  dato dai numeri pari. La funzione  $f : N \rightarrow 2N$  definita da  $f(a) = 2a \forall a \in N$  è una corrispondenza biunivoca. Quindi si ha  $|N| = |2N|$

Il teorema 204 ci dice che non esiste alcun insieme finito equipotente con un suo sottoinsieme proprio. D'altronde l'esempio precedente ci ha mostrato che l'insieme infinito  $N$  è equipotente con un suo sottoinsieme proprio. Vogliamo dimostrare che quest'ultima proprietà è una caratteristica degli insiemi infiniti. Abbiamo bisogno del seguente teorema.

**Teorema 206** Se  $A$  è un insieme tale che  $|A| = |N|$ , allora esiste un sottoinsieme proprio  $A'$  di  $A$  tale che  $|A'| = |A|$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $g : N \rightarrow A$  una corrispondenza biunivoca. Sia

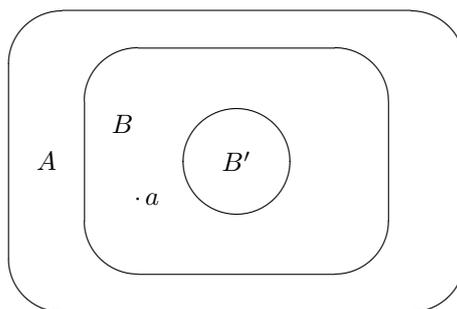
$A' = g(2N)$ . Sfruttando l'esempio 205 si dimostra (esercizio) che  $A'$  verifica le proprietà richieste.  $\square$

**Teorema 207** Ogni insieme infinito è dotato di un sottoinsieme  $B$  tale che  $|B| = |N|$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $A$  un insieme infinito. Poichè  $A$  è infinito, esiste un elemento  $a_1 \in A$ . Sia  $A_1 = A - \{a_1\}$ . L'insieme  $A$  contiene più di un elemento. Esiste quindi  $a_2 \in A_1$ . Sia  $A_2 = A - \{a_1, a_2\}$ . L'insieme  $A$  contiene più di due elementi, esiste quindi  $a_3 \in A_2$ . Continuando in questo modo si ottiene il sottoinsieme  $B = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  di  $A$  che è chiaramente in corrispondenza biunivoca con  $N$ .  $\square$

**Teorema 208** Ogni insieme infinito è dotato di un suo sottoinsieme proprio ad esso equipotente.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $A$  un insieme infinito. Sia  $B$  un sottoinsieme di  $A$  tale che  $|B| = |N|$  (abbiamo sfruttato la proposizione precedente). Sia  $B'$  un sottoinsieme proprio di  $B$  che sia in corrispondenza biunivoca con  $B$  (abbiamo sfruttato il teorema 206). Sia  $f : B \rightarrow B'$  una corrispondenza biunivoca. Sia  $a \in B - B'$ . Consideriamo l'insieme  $A' = (A - B) \cup B'$ . Tale insieme è un sottoinsieme proprio di  $A$ , infatti  $a \notin A'$  (la verifica di ciò viene lasciata per esercizio).



Consideriamo la funzione  $g : A \rightarrow A'$  definita da:

$$g(x) = x \quad \forall x \in A - B, \quad g(x) = f(x) \quad \forall a \in B$$

Si dimostra facilmente che tale funzione è biunivoca.  $\square$

**Nota 209** Nella dimostrazione precedente abbiamo rappresentato gli insiemi per mezzo dei **diagrammi di Venn**<sup>4</sup>.

**Esempio 210** Sia  $R$  l'insieme dei numeri reali e sia  $R'$  l'insieme dei numeri reali che non siano numeri naturali dispari. Cioè  $R' = R - \{1, 3, 5, \dots\}$ . La funzione  $g : R \rightarrow R'$  definita da:

$$g(a) = a \quad \forall a \notin N, \quad g(a) = 2a \quad \forall a \in N \text{ è biunivoca.}$$

Dai teoremi 204 e 208 segue il seguente teorema dimostrato da Dedekind<sup>5</sup> nel 1888:

<sup>4</sup>John Venn, (1834-1923), logico inglese.

<sup>5</sup>Julius Wilhelm Richard Dedekind, (1831-1916), matematico tedesco.

**Teorema 211** Un insieme ha infiniti elementi se e solo se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.  $\square$

## 2.3 La cardinalità del numerabile

**Definizione 212** Un insieme  $A$  equipotente all'insieme  $N$  si dice **numerabile**. La classe di equivalenza di  $N$  viene chiamata **classe del numerabile** e viene di solito indicata con  $\aleph_0$  (il simbolo  $\aleph$  si legge “alef”: è la prima lettera dell'alfabeto ebraico).

**Nota 213** Il termine “numerabile” deriva dal fatto che, se un insieme  $A$  è in corrispondenza biunivoca con  $N$ , allora possiamo numerare gli elementi di  $A$ : chiamiamo primo elemento di  $A$  l'elemento corrispondente al numero 1 (esso esiste ed è unico poichè la corrispondenza è biunivoca), chiamiamo secondo elemento di  $A$  l'elemento corrispondente al numero 2, e così via.

Notiamo che, se  $A$  è un insieme numerabile, esso non è dotato di una sola numerazione. Non esiste infatti una sola corrispondenza biunivoca tra  $A$  e  $N$ .

**Esempio 214** L'esempio 205 ci mostra che  $2N \in \aleph_0$ .

**Esempio 215** L'insieme  $N^-$  dei numeri interi negativi è numerabile. Infatti la funzione:

$$\begin{aligned} f: N &\longrightarrow N^- \\ n &\longmapsto -n \end{aligned}$$

è biunivoca.

**Esercizio 216** Dimostrare che l'insieme dei numeri dispari è numerabile.

**Esercizio 217** Nel 1638 Galileo<sup>6</sup> ha notato che l'insieme dei numeri quadrati dei numeri naturali è numerabile. Dare una dimostrazione di ciò.

**Nota 218** Il teorema 207 ci dice che, se  $A$  è un insieme infinito, allora  $\aleph_0 \leq |A|$ . Quindi la cardinalità  $\aleph_0$  è la “prima” cardinalità non finita.

Non esiste alcun insieme  $A$  avente cardinalità  $a$  infinita tale che  $a < \aleph_0$ .

**Teorema 219** Ogni sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è numerabile. Cioè, in simboli:

$$A \in \aleph_0, B \subset A \implies B \in \aleph_0 \vee B \text{ finito}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $A \in \aleph_0$ . Sia  $B$  un insieme infinito contenuto in  $A$ . Abbiamo allora:

$$|B| \leq \aleph_0$$

Dal teorema 207 segue che esiste  $C \subset B$  tale che  $|C| = \aleph_0$ . Abbiamo quindi:

$$|C| = \aleph_0 \leq |B| \leq \aleph_0$$

Da ciò segue  $|B| = \aleph_0$ .  $\square$

<sup>6</sup>Galileo Galilei, (1564-1642), fisico e matematico nato a Pisa.

**Definizione 220** Dati due insiemi  $A$  e  $B$  tali che  $A \cap B = \emptyset$  chiamiamo  $A \cup B$  **unione disgiunta** di  $A$  e  $B$ . Utilizziamo per l'unione disgiunta il simbolo  $A \sqcup B$ .

Ci poniamo ora la seguente domanda: dati due insiemi disgiunti di cardinalità finita o numerabile, quale è la cardinalità della loro unione disgiunta? Nel caso in cui ambedue gli insiemi siano finiti, la risposta è immediata: la cardinalità della loro unione disgiunta è data dalla somma delle loro cardinalità. Ma cosa succede nel caso in cui uno o ambedue gli insiemi siano numerabili? Studiamo innanzitutto il caso in cui uno dei due insiemi sia numerabile e l'altro sia formato da un solo elemento.

**Teorema 221** Sia  $A \in \aleph_0$  e  $B = \{b\}$  con  $b \notin A$ , allora  $A \sqcup B \in \aleph_0$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $f : N \rightarrow A$  una funzione biunivoca. allora la funzione  $g : N \rightarrow A \sqcup B$  definita da:

$$g(1) = b \quad , \quad g(n) = f(n-1) \quad \forall n > 1$$

è biunivoca.  $\square$

**Esempio 222** Consideriamo il seguente **paradosso dell'albergo con infinite stanze**. Vi è un albergo con infinite stanze. L'albergo è completo: ogni stanza è occupata da un ospite. Arriva un turista il quale chiede al gestore se l'albergo è pieno. Il gestore risponde: "Tutte le stanze sono occupate, ma io una stanza per lei la trovo." Il turista replica che non vuole avere nessuno nella propria stanza, né tantomeno vuole che qualche altro cliente condivida la stanza con altri. Il gestore replica all'allibito turista "Non si preoccupi. Ci penso io." Detto fatto. Fa dormire il turista nella camera numero 1. Sposta il cliente della camera 1 nella camera 2. Sposta quindi il cliente della stanza 2 nella stanza 3 e così via. Tutti i clienti, compreso il turista, ebbero la loro stanza. Ebbene, il teorema precedente, con la sua dimostrazione, è la matematizzazione del paradosso dell'albergo.

**Teorema 223** Sia dato un insieme  $A$  numerabile e un insieme finito  $B$  disgiunto da  $A$ . Allora  $A \sqcup B$  è numerabile.

**DIMOSTRAZIONE.** Lasciata per esercizio.  $\square$

Studiamo ora il caso in cui ambedue gli insiemi siano numerabili.

**Teorema 224** L'unione disgiunta di due insiemi numerabili è numerabile.

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $A$  e  $B$  due insiemi numerabili disgiunti. Indichiamo con  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  gli elementi di  $A$  e con  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  gli elementi di  $B$ . Possiamo numerare gli elementi di  $A \sqcup B$  scegliendoli seguendo il seguente ordine:

$$a_1 \ b_1 \ a_2 \ b_2 \ \dots \ a_n \ b_n \ \dots$$

Quindi l'insieme  $A \sqcup B$  è numerabile.  $\square$

**Nota 225** Esplicitiamo la funzione  $f : N \rightarrow A \sqcup B$  che numerava  $A \sqcup B$  data nella dimostrazione precedente. Si ha:

se  $n = 2p - 1$  con  $p \in N$ , allora  $f(n) = a_p$

se  $n = 2p$  con  $p \in N$ , allora  $f(n) = b_p$

Possiamo dare una rappresentazione grafica di ciò nel seguente modo:

$$\begin{array}{cccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & \dots \\ & \nearrow & & \nearrow & & \\ b_1 & & b_2 & & b_3 & \dots \end{array}$$

Abbiamo una tabella; per dare la numerazione seguiamo le diagonali di essa. Questo procedimento è stato descritto da Cantor. Per tale ragione il procedimento appena descritto viene chiamato **procedimento diagonale di Cantor**.

Vogliamo studiare ora il caso di infiniti insiemi numerabili. Dobbiamo innanzitutto generalizzare la definizione di unione di insiemi al caso di infiniti insiemi.

**Definizione 226** Per ogni intero  $i$  sia dato un insieme  $A_i$ , poniamo:

$$\bigcup_{i \in N} A_i = \{a \mid a \in A_i \text{ per qualche } i \in N\}$$

Tale insieme viene ovviamente chiamato **unione degli  $A_i$** .

Se per ogni  $i \neq j$  si ha  $A_i \cap A_j = \emptyset$  allora si ha l'**unione disgiunta** e si usa il simbolismo:

$$\bigsqcup_{i \in N} A_i$$

Possiamo estendere il procedimento di diagonalizzazione di Cantor al caso di un'infinità numerabile di insiemi numerabili.

**Teorema 227** Siano dati gli insiemi numerabili  $A_i$  con  $i \in N$  tali che, per ogni  $i \neq j$ , si ha  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . Si ha che l'insieme unione degli  $A_i$  è numerabile.

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo con  $a_{11}, a_{12}, a_{13} \dots$  gli elementi dell'insieme  $A_1$  e analogamente per gli altri insiemi. Consideriamo quindi la seguente tabella:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & \dots \\ & \nearrow & & \nearrow & & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & \dots \\ & \nearrow & & \nearrow & & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}$$

Numeriamo gli elementi dell'unione seguendo le diagonali:

$$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \dots$$

Abbiamo dimostrato che l'unione è numerabile.  $\square$

**Teorema 228** Nel teorema precedente alcuni insiemi, invece di essere numerabili, possono essere finiti. Si ha cioè:

- 1) L'unione di un'infinità numerabile di insiemi non vuoti disgiunti finiti o numerabili è numerabile;
- 2) l'unione di un numero finito di insiemi disgiunti finiti o numerabili, di cui almeno uno numerabile, è numerabile.

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.  $\square$

**Teorema 229** L'insieme  $Z$  dei numeri interi relativi è numerabile.

DIMOSTRAZIONE. Segue dal fatto che si ha  $Z = \{0\} \sqcup N \sqcup N^-$  e dal fatto che  $N^-$  è numerabile (vedere l'esempio 215).  $\square$

**Nota 230** Il procedimento diagonale di Cantor applicato nel caso precedente dà la seguente numerazione di  $Z$ :

$$0, 1, -1, 2, -2, \dots$$

La corrispondenza biunivoca  $f : N \rightarrow Z$  associata a questa numerazione è definita da:

$$f(n) = \begin{cases} p & \text{per } n = 2p \quad p \in N \\ -p & \text{per } n = 2p + 1 \quad p \in N \sqcup \{0\} \end{cases}$$

Cambiando l'ordine degli insiemi  $\{0\}, N$  e  $N^-$  cambia la numerazione di  $Z$ . Si determini, per esempio, la corrispondenza biunivoca  $g : N \rightarrow Z$  ottenuta considerando  $Z = N \sqcup \{0\} \sqcup N^-$ .

**Nota 231** L'usuale ordinamento di  $Z$ :

$$\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

non è una numerazione di  $Z$ . Non è infatti definita una corrispondenza biunivoca tra  $N$  e  $Z$ . Non è, per esempio, definito il primo elemento.

Se  $A$  e  $B$  sono insiemi finiti allora l'insieme  $A \times B$  è finito: la sua cardinalità è il prodotto delle cardinalità di  $A$  e di  $B$  (esercizio). Cosa succede nel caso di insiemi numerabili? Studiamo innanzitutto un caso particolare.

**Teorema 232** L'insieme  $N^2 = N \times N$  è numerabile.

DIMOSTRAZIONE. Fissato  $i \in N$ , sia

$$N_i = \{(i, n) \mid n \in N\}$$

Ovviamente  $N_i$  è numerabile. Dal fatto che si ha:

$$N \times N = \bigsqcup_{i \in N} N_i$$

segue la tesi.  $\square$

**Esercizio 233** Il procedimento diagonale di Cantor utilizzato nel teorema precedente determina una numerazione di  $N \times N$ .

Determinare il numero assegnato ad  $(a, b) \in N \times N$ .

Suggerimento. Notare innanzitutto che la  $i$ -esima diagonale contiene  $i$  elementi. Da ciò segue che il numero di elementi appartenenti alle prime  $p$  diagonali è uguale a  $\sum_{i=1}^p i = p(p+1)/2$ . Notare poi che l'elemento  $(a, b)$  appartiene alla  $(a+b-1)$ -esima diagonale. Quindi  $(a, b)$  è l'elemento di posto:

$$\sum_{i=1}^{a+b-2} i + b = (a+b-2)(a+b-1)/2 + b$$

Calcolare l'elemento di posto 100 e l'elemento di posto 2001.

**Esercizio 234** Calcolare la cardinalità di  $N \times Z$ .

**Teorema 235**

$$|A| = |A'| > 0 \wedge |B| = |B'| > 0 \implies |A \times B| = |A' \times B'|$$

DIMOSTRAZIONE. Siano date le funzioni biunivoche  $f: A \rightarrow A'$  e  $g: B \rightarrow B'$ . Si verifica facilmente (esercizio) che la funzione

$$f \times g : A \times B \longrightarrow A' \times B' \\ (a, b) \longmapsto (f(a), g(b))$$

è una funzione biunivoca.  $\square$

Si può allora generalizzare il teorema 232:

**Teorema 236** Siano  $A$  e  $B$  insiemi non vuoti finiti o numerabili ed almeno uno di essi sia numerabile, allora  $A \times B$  è numerabile.

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.  $\square$

**Teorema 237** Sia  $A$  un insieme numerabile, allora per ogni  $n \in N$  l'insieme  $A^n$  delle  $n$ -ple di elementi di  $A$  è numerabile.  $\square$

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.  $\square$

**Esercizio 238** Dimostrare che l'insieme  $Z^n[x]$  dei polinomi di grado minore di  $n$  a coefficienti in  $Z$  è numerabile.

Suggerimento: dimostrare innanzitutto che  $Z^n[x]$  e  $Z^n$  hanno la stessa cardinalità.

**Esercizio 239** Dimostrare che l'insieme dei polinomi di grado  $n$  a coefficienti in  $Z$  è numerabile.

**Esercizio 240** Dimostrare che l'insieme  $M(Z, p, q)$  delle matrici a coefficienti in  $Z$  a  $p$  righe e  $q$  colonne è numerabile.

**Teorema 241** L'insieme  $Q$  dei numeri razionali è numerabile.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $Q_+$  l'insieme dei numeri razionali positivi,  $Q_-$  l'insieme dei numeri razionali negativi. Si ha  $Q = \{0\} \cup Q_+ \cup Q_-$ . Ovviamente  $Q_+$  e  $Q_-$  sono equipotenti. Se dimostriamo quindi che  $Q_+$  è numerabile, abbiamo che  $Q$  è numerabile.

Sia  $A$  il sottoinsieme di  $N \times N$  dato dalle coppie di numeri naturali primi tra loro. Si ha che  $Q_+$  è equipotente ad  $A$ . Ma  $A$ , essendo un sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è numerabile.  $\square$

**Esercizio 242** 1) Dimostrare che l'insieme  $Q^2 = Q \times Q$  è numerabile.  
 2) Dimostrare che l'insieme  $Q[x]$  dei polinomi a coefficienti in  $Q$  è numerabile.  
 3) Dimostrare che l'insieme  $M(Q, p, q)$  è numerabile.

**Esercizio 243** Sia  $A = \{(a, b, c) \in Z \times Z \times Z \mid 0 \leq a \leq 5, b > 0, c < 0\}$ . Calcolare la cardinalità di  $A$ .

## 2.4 La cardinalità del continuo

Abbiamo fino a questo momento studiato gli insiemi finiti e gli insiemi numerabili. Abbiamo visto che l'insieme  $P(N)$  formato dai sottoinsiemi dei naturali non è numerabile, ha anzi una potenza maggiore della classe del numerabile (teorema 203). L'obiettivo di questo paragrafo è dimostrare che l'insieme  $P(N)$  è equipotente all'insieme  $R$  dei numeri reali.

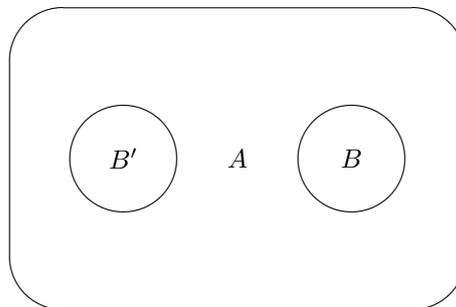
Abbiamo innanzitutto il seguente teorema.

**Teorema 244** Sia  $A$  un insieme infinito non numerabile e sia  $B$  un suo sottoinsieme finito o numerabile; allora l'insieme  $A - B$  è equipotente a  $A$ .

In simboli:

$$|A| > \aleph_0 \wedge B \subset A \wedge |B| \leq \aleph_0 \implies |A - B| = |A|$$

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo l'insieme  $A - B$ . Tale insieme è infinito; se fosse infatti finito, l'insieme  $A = (A - B) \sqcup B$ , essendo unione di insiemi finiti o numerabili, sarebbe o finito o numerabile. Esiste quindi, per il teorema 207, un insieme numerabile  $B' \subset A - B$ .



Essendo  $B$  finito o numerabile e  $B'$  numerabile, si ha che  $B \sqcup B'$  è numerabile; esiste quindi una funzione biunivoca  $f : B \sqcup B' \rightarrow B'$ .

Si verifica facilmente che la funzione  $g : A \rightarrow A - B$  definita da:

$$g(x) = \begin{cases} x & \forall x \notin B \sqcup B' \\ f(x) & \forall x \in B \sqcup B' \end{cases}$$

è biunivoca.  $\square$

**Teorema 245** Sia  $A$  un insieme infinito e  $B$  un insieme finito o numerabile disgiunto da esso, allora gli insiemi  $A$  e  $A \sqcup B$  sono equipotenti.

**DIMOSTRAZIONE.** Il caso in cui  $A$  sia numerabile è già stato trattato. Studiamo il caso in cui  $A$  non sia numerabile. L'insieme infinito  $A \sqcup B$  non è numerabile. Se infatti lo fosse, per il teorema 219 il suo sottoinsieme  $A$  sarebbe o finito o numerabile. Ma allora, possiamo applicare il teorema precedente:  $A \sqcup B$  è infinito non numerabile,  $B$  finito o numerabile, implica che  $A \sqcup B$  è equipotente a  $(A \sqcup B) - B = A$ .  $\square$

**Teorema 246** L'insieme  $P(N)$  delle parti di  $N$  è equipotente all'insieme delle successioni:

$$a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

dove  $a_i$  è uguale a 0 o a 1.

Indichiamo quest'insieme di successioni con  $2^N$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Si generalizza la definizione di funzione caratteristica data nel primo capitolo. Sia  $A$  un sottoinsieme di  $N$ . Associamo ad  $A$  la successione

$$a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

dove  $a_i = 1$  se  $i \in A$  e  $a_i = 0$  se  $i \notin A$ . Abbiamo quindi costruito una corrispondenza biunivoca tra  $P(N)$  e  $2^N$ .  $\square$

**Nota 247** Vogliamo ora ricordare alcune proprietà della numerazione in base 2.

Sia  $a$  un numero reale tale che  $0 < a < 1$ . Consideriamo una rappresentazione di  $a$  in base 2. Se essa è data da:

$$0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \quad \text{con } a_i \text{ uguale a 0 o a 1}$$

si ha:

$$a = 0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^{-1} + a_2 \cdot 2^{-2} + \dots + a_n \cdot 2^{-n} + \dots$$

Per esempio, il numero in base 2 rappresentato dalla successione definitivamente uguale a 0:

$$0, 01000 \dots$$

è il numero

$$0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

Consideriamo ora la successione definitivamente uguale a 1:

$$0,00111\dots$$

Essa rappresenta il numero:

$$0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^0} - \frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Quindi il numero  $1/4$  ha due diverse rappresentazioni in base 2, una delle quali è data da una successione definitivamente uguale a 1.

In generale, il numero rappresentato in base 2 dalla successione definitivamente uguale a 0:

$$0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} 1000 \dots$$

è uguale al numero rappresentato in base 2 dalla successione definitivamente uguale a 1:

$$0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} 01111 \dots$$

Si può dimostrare che, a parte i numeri rappresentati in base 2 da successioni definitivamente uguali a 1 o a 0 (esercizio: quali sono questi numeri?), ogni numero ha una sola rappresentazione in base 2. Quindi ogni numero è rappresentato in base 2 da una ed una sola successione di 0 e 1 non definitivamente uguale a 1.

**Teorema 248** L'intervallo aperto di numeri reali:

$$(0, 1) = \{x \in R \mid 0 < x < 1\}$$

è equipotente all'insieme  $P(N)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Ricordiamo innanzitutto che  $P(N)$  è equipotente all'insieme  $2^N$  delle successioni di 0 e 1. Per ogni numero  $a \in (0, 1)$  consideriamo la sua rappresentazione in base 2 non definitivamente uguale a 1:

$$0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

Associamo al numero  $a$  la successione:

$$a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

Essa è non definitivamente uguale a 1; inoltre, essendo  $a \neq 0$  la successione non è formata da soli 0. Indichiamo con  $S$  l'insieme formato dalla successione nulla e dalle successioni definitivamente uguali a 1. Abbiamo quindi creato una corrispondenza biunivoca tra  $(0, 1)$  e l'insieme di  $2^N - S$ . Per dimostrare il nostro teorema ci basta dimostrare che  $2^N - S$  è equipotente a  $2^N$ . Se dimostriamo che  $S$  è numerabile, dalla proposizione 244 segue la tesi.

A tal scopo consideriamo l'insieme  $S_0$  formato dalla successione composta da soli 0. Sia poi  $S_1$  l'insieme formato dalla successione composta da soli 1. Sia poi  $S_2$  l'insieme formato dalla successione avente 0 al posto 1 e 1 nei posti successivi.

Sia poi  $S_3$  l'insieme delle successioni aventi 0 al posto 2 e 1 nei posti successivi. Cioè:

$$S_3 = \{a_1 0 1 1 1 \dots\}$$

Chiaramente  $S_3$  è formata da due elementi.

Consideriamo infine, per ogni  $i > 2$ , l'insieme delle successioni aventi al posto  $i - 1$ -simo il numero 0 e in tutti i posti successivi il numero 1. Cioè :

$$S_i = \{a_1 \dots a_{i-2} 0 1 1 1 \dots\}$$

L'insieme  $S_i$  è finito (esercizio: calcolare il numero dei suoi elementi). Si ha:

$$S = S_0 \sqcup \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \right)$$

L'insieme  $S$  è numerabile poiché è unione di un'infinità numerabile di insiemi finiti disgiunti. Abbiamo quindi la tesi.  $\square$

**Teorema 249** Tutti gli intervalli aperti di  $R$  sono tra loro equipotenti.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $(a, b)$  un intervallo aperto di  $R$ . La funzione:

$$f : (0, 1) \longrightarrow (a, b)$$

definita da  $f(t) = a + (b - a)t$  con  $t \in (0, 1)$  è biunivoca. Da ciò segue facilmente la tesi.  $\square$

**Teorema 250** Dati i numeri reali  $a$  e  $b$  con  $a < b$ , gli intervalli:

$(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$ ,  $[a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$  e

$[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$  sono tutti equipotenti all'intervallo  $(0, 1)$ .

DIMOSTRAZIONE. Applicare la proposizione 244.  $\square$

**Teorema 251** L'intervallo  $(-\pi/2, \pi/2)$  è equipotente all'insieme  $R$  dei numeri reali.

DIMOSTRAZIONE. Si consideri la funzione:

$$f : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow R$$

definita da:

$$f(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha \quad \forall \alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$$

Essa è biunivoca.  $\square$

Da tutto ciò segue il teorema.

**Teorema 252** Gli insiemi  $R$  e  $P(N)$  sono equipotenti.  $\square$

**Definizione 253** Chiamiamo **classe del continuo** la classe formata dagli insiemi equipotenti all'insieme dei numeri reali. Indichiamo questa classe con il simbolo  $\aleph_1$ .

**Teorema 254**

$$A \in \aleph_1 \wedge B \in \aleph_1 \implies A \times B \in \aleph_1$$

DIMOSTRAZIONE. Dal teorema 235 segue che possiamo limitarci a dimostrare il teorema nel caso  $A = B = 2^{\aleph_1}$ .

Abbiamo visto che gli elementi di  $2^{\aleph_1}$  possono essere visti come successioni infinite  $a_1 a_2 \dots a_n \dots$  dove  $a_i \in \{0, 1\}$ . Si verifica facilmente che la funzione:

$$f : \begin{array}{ccc} 2^{\aleph_1} \times 2^{\aleph_1} & \longrightarrow & 2^{\aleph_1} \\ (a_1 a_2 \dots a_n \dots, b_1 b_2 \dots b_n \dots) & \longmapsto & a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n \dots \end{array}$$

è una corrispondenza biunivoca.  $\square$

**Teorema 255** Si ha:

1)  $R^2 \in \aleph_1$

2) Posto  $I = [0, 1]$  si ha  $I \times I \in \aleph_1$

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.  $\square$

**Nota 256** La parte 1) del teorema precedente ci mostra che il concetto di cardinalità è completamente differente dal concetto di dimensione di uno spazio vettoriale. Gli spazi vettoriali su  $R$  dati da  $R$  stesso e da  $R^2$  hanno differente dimensione ma stessa cardinalità.

**Nota 257** Dalla parte 2) del precedente teorema segue l'apparente paradosso che i punti di un quadrato sono in corrispondenza biunivoca con i punti di un suo lato. Questo teorema è stato dimostrato da Cantor. Egli scrisse la dimostrazione di ciò in una lettera indirizzata a Dedekind nel 1877. Dopo la dimostrazione Cantor scrisse "Lo vedo ma non ci credo."

**Esercizio 258** Calcolare la cardinalità di  $R^n[x]$ , insieme dei polinomi di grado minore di  $n$  a coefficienti reali.

**Esercizio 259** Calcolare la cardinalità dell'insieme  $M(R, n, n)$ .

**Esercizio 260** Calcolare la cardinalità dell'insieme  $C$  dei numeri complessi.

**Teorema 261**

$$A \cap B = \emptyset \wedge |A| \geq 2 \wedge |B| \geq 2 \implies |A \sqcup B| \leq |A \times B|$$

DIMOSTRAZIONE. Siano  $a_1, a_2$  elementi distinti di  $A$  e siano  $b_1, b_2$  elementi distinti di  $B$ . Si ha (esercizio) che la seguente funzione è iniettiva:

$$f : \begin{array}{ccc} A \sqcup B & \longrightarrow & A \times B \\ a & \longmapsto & (a, b_1) \quad \forall a \in A \\ b & \longmapsto & (a_1, b) \quad \forall b \in B - \{b_1\} \\ b_1 & \longmapsto & (a_2, b_2) \end{array}$$

Da ciò segue la tesi.  $\square$

**Teorema 262**

$$A \cap B = \emptyset \wedge |A| = |B| = \aleph_1 \implies |A \sqcup B| = \aleph_1$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dal fatto che si ha:

$$\aleph_1 = |A| \leq |A \sqcup B| \leq |A \times B| = \aleph_1 \quad \square$$

**Teorema 263**

$$A \cap B = \emptyset \wedge |A| = \aleph_1 \wedge |B| \leq \aleph_1 \implies |A \sqcup B| = \aleph_1$$

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio.  $\square$

## 2.5 Insiemi delle funzioni tra insiemi

**Definizione 264** Dati due insiemi  $A \neq \emptyset$  e  $B \neq \emptyset$ , indichiamo con  $B^A$  l'insieme delle funzioni da  $A$  in  $B$ ; cioè

$$B^A = \{f : A \longrightarrow B\}$$

Se  $A$  e  $B$  sono due insiemi finiti non vuoti, allora l'insieme  $B^A$  è finito; si ha infatti:

**Teorema 265** Siano  $A$  e  $B$  insiemi finiti. Allora:

$$|A| = a \wedge |B| = b \implies |B^A| = b^a$$

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. Suggerimento: notare che, per decidere l'immagine di un elemento di  $A$ , si hanno  $b$  scelte possibili.  $\square$

**Nota 266** Indichiamo con il simbolo  $2$  l'insieme  $\{0, 1\}$ .

Dato quindi un insieme  $A$ , l'insieme  $2^A$  è l'insieme delle funzioni da  $A$  all'insieme  $2 = \{0, 1\}$ .

Con il simbolismo appena introdotto, abbiamo che  $2^N$  indica l'insieme delle funzioni da  $N$  all'insieme  $\{0, 1\}$ .

Ricordiamo però che in precedenza abbiamo indicato con il simbolo  $2^N$  l'insieme delle successioni infinite dei simboli 0 e 1. Ciò non deve creare confusione. Infatti ogni successione infinita dei simboli 0 e 1 può essere considerata come una funzione  $f : N \longrightarrow \{0, 1\}$ . Data infatti una successione  $a_1 a_2 \dots a_n \dots$ , con  $a_i = 0$  o  $a_i = 1$ , possiamo associare ad essa la funzione  $f : N \longrightarrow \{0, 1\}$  definita da  $f(i) = a_i$ . Viceversa ad ogni funzione  $f : N \longrightarrow \{0, 1\}$  possiamo associare una successione infinita.

**Teorema 267** Dato un insieme  $A \neq \emptyset$ , si ha  $|2^A| = |P(A)|$ .

DIMOSTRAZIONE. Nella dimostrazione del teorema 246 abbiamo costruito una corrispondenza biunivoca tra  $P(N)$  e l'insieme delle stringhe infinite formate

dai simboli 0 e 1. Possiamo facilmente generalizzare questa costruzione al caso in cui  $A$  sia un insieme qualsiasi. Definiamo la funzione:

$$f : P(A) \longrightarrow 2^A$$

nel seguente modo:

fissato  $B \in P(A)$ , poniamo  $f(B) = f_B$  dove  $f_B$  è la **funzione caratteristica** di  $B$ :

$$f_B : A \longrightarrow 2$$

definita da:

$$f_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ 0 & \text{se } x \notin B \end{cases}$$

Si verifica facilmente che la funzione  $f$  è biunivoca.  $\square$

**Definizione 268** Una funzione  $g : B \longrightarrow B'$  definisce, per ogni insieme  $A$  non vuoto, una funzione:

$$\begin{array}{ccc} g_* : B^A & \longrightarrow & B'^A \\ f & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

**Teorema 269** 1) Siano date le funzioni  $g : B \longrightarrow B'$  e  $g' : B' \longrightarrow B''$ . Per ogni insieme  $A$  non vuoto si ha

$$g'_* \circ g_* = (g' \circ g)_* : B^A \longrightarrow B''^A$$

2) Sia  $1 : B \longrightarrow B$  la funzione identica di  $B$ . Allora per ogni insieme  $A$  non vuoto si ha

$$1_* = 1 : B^A \longrightarrow B^A$$

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio.  $\square$

**Teorema 270** Sia data  $g : B \longrightarrow B'$  e sia  $A$  un insieme non vuoto. Allora:  $g$  biunivoca  $\implies g_*$  biunivoca. Inoltre si ha:

$$(g_*)^{-1} = (g^{-1})_*$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè la funzione  $g$  è biunivoca, esiste la sua inversa  $g^{-1} : B' \longrightarrow B$  tale che  $g \circ g^{-1} = 1_{B'}$  e  $g^{-1} \circ g = 1_B$ .

Si ha allora:

$$g_* \circ (g^{-1})_* = (g \circ g^{-1})_* = 1_{B'} = 1$$

In modo analogo si dimostra che si ha:

$$(g^{-1})_* \circ g_* = 1$$

Ne segue che la funzione  $g_*$  è biunivoca e che la sua inversa è la funzione  $(g^{-1})_*$ .  $\square$

**Definizione 271** Una funzione  $g : A \rightarrow A'$  definisce, per ogni insieme  $B$  non vuoto, una funzione:

$$\begin{aligned} g^* : B^{A'} &\longrightarrow B^A \\ f &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

**Teorema 272** 1) Siano date le funzioni  $g : A \rightarrow A'$  e  $g' : A' \rightarrow A''$ . Per ogni insieme  $B$  non vuoto si ha

$$g^* \circ g'^* = (g' \circ g)^* : B^{A''} \longrightarrow B^A$$

2) Sia  $1 : A \rightarrow A$  la funzione identica di  $A$ . Allora per ogni insieme  $B$  non vuoto si ha

$$1^* = 1 : B^A \longrightarrow B^A$$

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio.  $\square$

**Teorema 273** Sia data  $g : A \rightarrow A'$  e sia  $B$  un insieme non vuoto. Allora:  $g$  biunivoca  $\implies g^*$  biunivoca. Inoltre si ha:

$$(g^*)^{-1} = (g^{-1})^*$$

DIMOSTRAZIONE. Analoga alla dimostrazione data nel teorema 270. Viene lasciata per esercizio.  $\square$

**Teorema 274** Si ha:

$$|A| = |A'| > 0 \wedge |B| = |B'| > 0 \implies |B^{A'}| = |B^A|$$

DIMOSTRAZIONE. Siano date le funzioni biunivoche  $g : A \rightarrow A'$  e  $f : B \rightarrow B'$ . Dal teorema 270 e dal teorema 273 segue che le funzioni:

$$B^A \xrightarrow{f_*} B'^A \xleftarrow{g^*} B'^{A'}$$

sono biunivoche. Da cui la tesi.  $\square$

**Esercizio 275** La legge di composizione di funzioni  $\circ$  definisce una funzione:

$$\begin{aligned} \circ : C^B \times B^A &\longrightarrow C^A \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

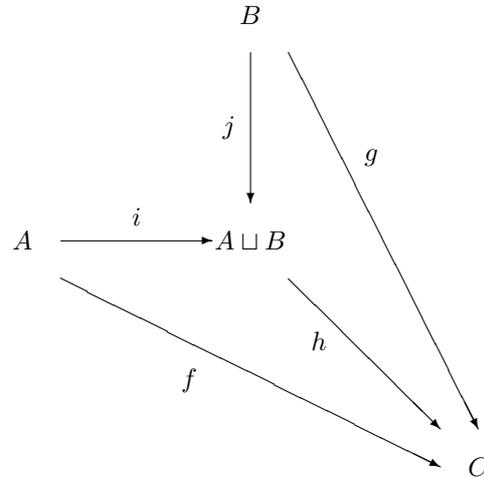
Tale funzione è iniettiva? E' surgettiva?

**Teorema 276** Siano  $A$  e  $B$  due insiemi disgiunti.

Indichiamo con  $i : A \rightarrow A \sqcup B$  e con  $j : B \rightarrow A \sqcup B$  le funzioni inclusione.

Ogni funzione  $h : A \sqcup B \rightarrow C$  definisce le funzioni:

$f = h \circ i : A \rightarrow C$  e  $g = h \circ j : B \rightarrow C$  che rendono commutativo il seguente diagramma:



Abbiamo quindi definito una funzione:

$$\alpha : C^{A \cup B} \longrightarrow C^A \times C^B$$

Viceversa, date comunque due funzioni:  $f : A \longrightarrow C$  e  $g : B \longrightarrow C$ , esiste ed è unica una funzione  $h : A \cup B \longrightarrow C$  tale che si abbia:

$$h \circ i = f \text{ e } h \circ j = g$$

Essa è definita da:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ g(x) & \text{se } x \in B \end{cases}$$

Abbiamo quindi definito una funzione:

$$\beta : C^A \times C^B \longrightarrow C^{A \cup B}$$

Si ha:

$$\alpha \circ \beta = 1 \quad \beta \circ \alpha = 1$$

Da tutto ciò deriva:

$$|C^{A \cup B}| = |C^A \times C^B|$$

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.  $\square$

Dal teorema precedente segue una dimostrazione di una ben nota proprietà dell'elevamento a potenza:

**Teorema 277** Siano  $A, B$  insiemi finiti disgiunti e  $C$  sia un insieme finito, allora:

$$|C^{A \cup B}| = |C^A| \cdot |C^B|$$

e quindi, se  $|A| = a$ ,  $|B| = b$ ,  $|C| = c$ , si ha:

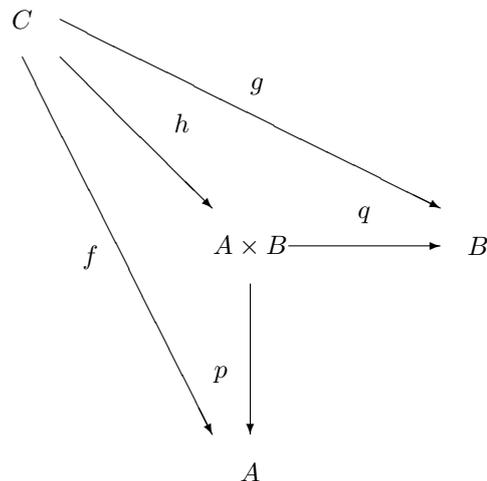
$$c^{a+b} = c^a \cdot c^b$$

DIMOSTRAZIONE. Facile esercizio.  $\square$

**Teorema 278** Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , indichiamo con  $p : A \times B \rightarrow A$  e con  $q : A \times B \rightarrow B$  le funzioni proiezione.

Ogni funzione  $h : C \rightarrow A \times B$  definisce le funzioni:

$f = p \circ h : C \rightarrow A$  e  $g = q \circ h : C \rightarrow B$  che rendono commutativo il seguente diagramma:



Abbiamo definito una funzione

$$\gamma : (A \times B)^C \rightarrow A^C \times B^C$$

Viceversa, date comunque due funzioni:  $f : C \rightarrow A$  e  $g : C \rightarrow B$ , esiste ed è unica una funzione  $h : C \rightarrow A \times B$  tale che si abbia:

$$p \circ h = f \quad \text{e} \quad q \circ h = g$$

La funzione  $h : C \rightarrow A \times B$  è definita da:

$$h(c) = (f(c), g(c))$$

Abbiamo definito una funzione

$$\delta : A^C \times B^C \rightarrow (A \times B)^C$$

Si ha:

$$\gamma \circ \delta = 1, \quad \delta \circ \gamma = 1$$

Da tutto ciò deriva:

$$|A^C \times B^C| = |(A \times B)^C|$$

**DIMOSTRAZIONE.** Esercizio.  $\square$

Ne segue una dimostrazione di un'altra ben nota proprietà dell'elevamento a potenza:

**Teorema 279** Siano  $A, B$  e  $C$  insiemi finiti, allora:

$$|A^C| \cdot |B^C| = |(A \times B)^C|$$

e quindi, se  $|A| = a$ ,  $|B| = b$ ,  $|C| = c$ , si ha:

$$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$$

DIMOSTRAZIONE. Facile esercizio.  $\square$

## 2.6 Operazioni sui numeri cardinali

Tra numeri interi positivi sono ben note le definizioni di addizione, moltiplicazione ed elevamento a potenza.

Vogliamo estendere queste definizioni alle cardinalità di insiemi.

**Definizione 280** Date due cardinalità  $a$  e  $b$  (finite o infinite) definiamo

$$a + b = |A \sqcup B|$$

dove  $|A| = a$  e  $|B| = b$  e  $A \cap B = \emptyset$ .

**Nota 281** Nel caso in cui non si abbia  $A \cap B \neq \emptyset$ , si può ovviare al problema nel seguente modo. Consideriamo l'insieme  $C = A \times B \times \{0, 1\}$ . Fissiamo poi un elemento  $a_0 \in A$  e un elemento  $b_0 \in B$ . I sottoinsiemi  $A'$  e  $B'$  di  $C$  definiti nel modo seguente:  $A' = A \times \{b_0\} \times \{0\}$  e  $B' = \{a_0\} \times B \times \{1\}$  sono equipotenti ad  $A$  e a  $B$  rispettivamente e sono tra loro disgiunti.

Per avere un'idea geometrica di ciò che abbiamo appena fatto, si pensi  $A = B = [0, 1]$  (intervallo chiuso di estremi 0 e 1) e  $a_0 = b_0 = 0$ .

**Nota 282** Notiamo che, affinché la definizione appena posta abbia senso, dobbiamo verificare che essa non dipende dalle scelte fatte. Dobbiamo quindi dimostrare che si ha:

$$|A| = |A'| \wedge |B| = |B'| \implies |A \sqcup B| = |A' \sqcup B'|$$

Lasciamo ciò per esercizio.

**Teorema 283** L'operazione di addizione tra cardinalità verifica le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \text{associativa :} & \quad (a + b) + c = a + (b + c) \\ \text{commutativa :} & \quad a + b = b + a \\ \text{elemento neutro :} & \quad 0 + a = a \quad \forall a \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.  $\square$

**Teorema 284** L'operazione di addizione tra cardinalità verifica le seguenti proprietà:

$$1) \quad a \leq a', \quad b \leq b' \implies a + b \leq a' + b'$$

$$2) \quad \text{data una cardinalità } a, \text{ per ogni cardinalità } b, \text{ si ha: } a \leq a + b.$$

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.  $\square$

**Nota 285** Abbiamo visto che si ha:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \quad \aleph_1 + \aleph_1 = \aleph_1$$

Ciò è generalizzato dal seguente teorema che non dimostriamo.

**Teorema 286** Per ogni cardinalità  $a \geq \aleph_0$  si ha:

$$a + a = a \quad \square$$

**Teorema 287** Sia  $a \geq \aleph_0$ . Allora, per ogni  $b \leq a$  si ha:

$$a + b = a$$

**DIMOSTRAZIONE.** Lasciata come esercizio. Suggerimento: applicare il teorema precedente e il teorema 284.  $\square$

**Definizione 288** Date due cardinalità  $a > 0$  e  $b > 0$  (finite o infinite) definiamo:

$$a \cdot b = |A \times B|$$

dove  $|A| = a$  e  $|B| = b$ .

Data poi una qualsiasi cardinalità  $a$  definiamo:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

**Nota 289** La definizione è ben posta per il teorema 235.

**Teorema 290** L'operazione di moltiplicazione tra cardinalità verifica le seguenti proprietà per ogni cardinalità  $a > 0, b > 0, c > 0$ :

$$\begin{array}{ll} \text{associativa :} & a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \\ \text{commutativa :} & a \cdot b = b \cdot a \\ \text{elemento neutro :} & a \cdot 1 = a \quad \forall a \\ \text{distributiva :} & a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \end{array}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Esercizio.  $\square$

**Teorema 291** L'operazione di moltiplicazione tra cardinalità verifica le seguenti proprietà:

$$1) \quad a \leq a', \quad b \leq b' \implies a \cdot b \leq a' \cdot b'$$

$$2) \quad \text{data una cardinalità } a > 0, \text{ per ogni cardinalità } b > 0, \text{ si ha: } a \leq a \cdot b.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Esercizio.  $\square$

**Nota 292** Abbiamo visto che si ha:

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \quad \text{e} \quad \aleph_1 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$$

Ciò è generalizzato dal seguente teorema che non dimostriamo:

**Teorema 293** Per ogni cardinalità  $a \geq \aleph_0$  si ha:

$$a \cdot a = a \quad \square$$

**Teorema 294** Sia  $a \geq \aleph_0$ . Allora, per ogni  $b \leq a$  si ha:

$$a \cdot b = a$$

DIMOSTRAZIONE. Lasciata come esercizio. Suggerimento: applicare il teorema precedente e il teorema 291.  $\square$

**Definizione 295** Date le cardinalità  $a > 0$  e  $b > 0$  si definisce:

$$a^b = |A^B|$$

dove  $|A| = a$  e  $|B| = b$ .  $C = A \times B \times 0, 1$

**Nota 296** La definizione è ben posta per il teorema 274.

**Teorema 297** L'elevazione a potenza di cardinalità verifica le seguenti proprietà, per ogni  $a > 0, b > 0, c > 0$ :

$$\begin{aligned} c^{a+b} &= c^a \cdot c^b \\ a^c \cdot b^c &= (a \cdot b)^c \\ (a^b)^c &= a^{b \cdot c} \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. La prima uguaglianza deriva dal teorema 276. La seconda uguaglianza deriva dal teorema 278. Omettiamo la dimostrazione della terza uguaglianza.  $\square$

**Teorema 298** Sia data  $g : B' \rightarrow B$  e sia  $A$  un insieme non vuoto. Dimostrare che si ha:

$g$  iniettiva  $\implies g_* : B'^A \rightarrow B^A$  iniettiva.

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. Suggerimento: sfruttare la caratterizzazione delle funzioni iniettive (vedere esercizio 155) e ispirarsi alla dimostrazione del teorema 270.  $\square$

**Teorema 299** Date le cardinalità  $0 < a' \leq a$  si ha per ogni  $b > 0$ :

$$a'^b \leq a^b$$

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.  $\square$

**Esercizio 300** Indichiamo con 1 la cardinalità degli insiemi con un elemento. Dimostrare che, per ogni cardinalità  $a > 0$ , si ha:

$$1^a = 1$$

$$a^1 = a$$

**Teorema 301** Per ogni cardinalità  $a > 0$  si ha:

$$a < 2^a$$

DIMOSTRAZIONE. Deriva dal fatto che, per ogni insieme  $A$ , si ha:

$$|A| < |P(A)| = |2^A|.$$

□

**Teorema 302**

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.

**Definizione 303** Definiamo, per induzione su  $n \geq 1$ :

$$\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$$

**Teorema 304** Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha:

$$\aleph_{n-1} < \aleph_n$$

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. □

**Nota 305** Abbiamo introdotto la teoria della cardinalità degli insiemi. Questa teoria è stata creata da Cantor.

Notiamo che all'inizio non abbiamo dato alcuna definizione di insieme. Abbiamo implicitamente accettato qualsiasi insieme.

Per definire un insieme o si elencano tutti i suoi elementi (per esempio: l'insieme formato dai simboli 1 e 2) o si enuncia una proprietà che caratterizza tutti i suoi elementi (per esempio l'insieme di tutti gli uomini aventi 20 anni). Cantor non poneva alcuna limitazione alle proprietà che definiscono un insieme.

Consideriamo ora la proprietà di un insieme di non contenere se stesso come elemento. Chiamiamo regolare un insieme verificante questa proprietà. Vi sono quindi gli insiemi regolari (quelli che non contengono se stessi come elemento) e quelli irregolari (quelli che contengono se stessi come elemento). Consideriamo l'insieme *reg* di tutti gli insiemi regolari. Ci chiediamo se *reg* contenga se stesso come elemento.

Se esso contiene se stesso come elemento è irregolare e quindi non appartiene a *reg*. Ma se non appartiene a *reg*, non contiene se stesso come elemento. Siamo arrivati ad un assurdo.

Viceversa, se non contiene se stesso come elemento, esso è regolare. Appartiene quindi a *reg*. Ma allora contiene se stesso come elemento. Siamo arrivati anche in questo caso ad un assurdo.

Questa antinomia viene chiamata *antinomia di Russell*. Infatti Russell<sup>7</sup> ha esposto questo argomento in una lettera a Frege<sup>8</sup> nel 1902.

Il problema nasce dall'aver considerato qualsiasi tipo di insieme. La teoria degli

<sup>7</sup>Bertrand Russell, (1872- 1970), matematico e filosofo inglese.

<sup>8</sup>Gottlog Friedrich Frege, (1848- 1925), matematico tedesco.

insiemi di Cantor viene per questa ragione chiamata *teoria ingenua degli insiemi*. Abbiamo finalmente potuto spiegare la ragione dello strano nome dato a questo capitolo.

Per superare questa antinomia bisogna porre qualche limitazione agli insiemi che si possono considerare. Sono state allo scopo costruite teorie assiomatiche degli insiemi. Una di queste teorie è la teoria di Zermelo<sup>9</sup> - Fraenkel<sup>10</sup>. In questa teoria, che non enunciamo, vengono esclusi quegli insiemi che creano antinomie analoghe alla antinomia di Russell.

**Nota 306** Sappiamo che si ha  $\aleph_0 < \aleph_1$ . Ci si pone la seguente domanda: Esiste un insieme avente cardinalità maggiore di  $\aleph_0$  e minore di  $\aleph_1$ ? Cantor aveva fatto la seguente **ipotesi del continuo**: non esiste alcuna cardinalità  $a$  tale che:

$$\aleph_0 < a < \aleph_1$$

Molti matematici si sono prodigati per dare una risposta a questo problema. Hilbert<sup>11</sup> al secondo congresso internazionale dei matematici nel 1900 ha elencato 23 problemi di matematica a quel tempo irrisolti la cui soluzione avrebbe portato progressi nella scienza. Molti dei problemi posti da Hilbert (e da quel momento chiamati **problemi di Hilbert**) non sono stati ancora risolti. Ebbene il primo problema posto da Hilbert è proprio l'ipotesi del continuo.

L'ipotesi del continuo è generalizzata nell'**ipotesi generalizzata del continuo**:

per ogni  $n \in \mathbb{N}$  non esiste alcuna cardinalità  $a$  tale che:

$$\aleph_{n-1} < a < \aleph_n$$

Nel 1938 Gödel<sup>12</sup> ha dimostrato che l'ipotesi generalizzata del continuo non è in contraddizione con la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel.

Nel 1963 Cohen<sup>13</sup> ha dimostrato che anche la negazione dell'ipotesi generalizzata del continuo non è in contraddizione con la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel.

Da tutto ciò segue che, a partire dalla sola teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel non è possibile dimostrare nè la verità nè la falsità dell'ipotesi generalizzata del continuo.

## 2.7 Esercizi

**Esercizio 307** Calcolare la cardinalità dei seguenti insiemi.

- 1) L'insieme dei punti di una circonferenza.
- 2) L'insieme dei punti di una ellisse.

<sup>9</sup>Ernst Zermelo, (1871- 1953), matematico tedesco.

<sup>10</sup>Adolf Abraham Halevi Fraenkel, (1891- 1965), matematico di origine tedesca.

<sup>11</sup>David Hilbert, (1862-1943), matematico tedesco.

<sup>12</sup>Kurt Gödel, (1906-1978), matematico di origine cecoslovacca, naturalizzato statunitense.

<sup>13</sup>Paul Joseph Cohen, matematico statunitense allievo di Gödel, nato nel 1934.

- 3) L'insieme dei punti di un'iperbole.
- 4) L'insieme dei punti di una sfera.
- 5) L'insieme dei punti interni ad una circonferenza.
- 6) L'insieme dei punti interni ad un triangolo.
- 7) L'insieme dei punti di un semipiano.
- 8) L'insieme dei punti interni ad un angolo.
- 9) L'insieme dei punti di un semispazio.
- 10) L'insieme dei punti interni ad una sfera.

**Esercizio 308** Calcolare la cardinalità dei seguenti insiemi.

- 1) L'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y + 1\}$
- 2) L'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x = y + 1\}$
- 3) L'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y + 1\}$
- 4) L'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x = 2y + 1\}$
- 5) L'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x = 3y + 1\}$
- 6) L'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 2x = 3y + 1\}$
- 7) L'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid 2x = 3y + 1\}$
- 8) L'insieme  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 1 = x + y + 2 = 0\}$
- 9) L'insieme  $\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x - y - 1 = x + y + 2 = 0\}$

## 2.8 Bibliografia

- 1) **M.Fontana, S.Gabelli** *Insiemi, numeri e polinomi*, CISU  
Il paragrafo 12 è dedicato alla teoria della cardinalità.
- 2) ) **R. Procesi Ciampi, R.Rota** *Algebra moderna.Esercizi*, Veschi.  
Il nono capitolo è dedicato ad esercizi sulla cardinalità.
- 3) **P.R.Halmos** *Teoria elementare degli insiemi*, Feltrinelli  
Libro di circa 120 pagine che tratta la teoria della cardinalità.
- 4) **P.J.Cohen** *La teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo*, Feltrinelli  
Libro di circa 200 pagine dedicato all'ipotesi del continuo.
- 5) **G.Cantor** *La formazione della teoria degli insiemi*, Sansoni.  
Libro di circa 130 pagine contenente i saggi originali (tradotti) di Cantor sulla teoria degli insiemi. Vi è un'ampia introduzione.
- 6) **L.Lombardo Radice** *Istituzioni di algebra astratta*, Feltrinelli.  
Il primo capitolo è dedicato alla teoria della cardinalità.
- 7) **J.W.Dauben** *Georg Cantor e la teoria degli insiemi trasfiniti*, in *Insiemi Gruppi Strutture*, Le Scienze , Quaderni n.92.  
Articolo divulgativo di alto livello.
- 8) **P.J.Cohen, R. Hersch** *La teoria non cantoriana degli insiemi*, in *Insiemi Gruppi Strutture*, Le Scienze, Quaderni n.92.  
Articolo divulgativo di alto livello sull'ipotesi del continuo.