

Note del corso

di

# **GEOMETRIA ED ALGEBRA**

per

il Corso di Laurea

in

**Ingegneria Informatica**

svolte da

Giuseppe Accascina

**A.A. 2000-2001**

In queste note vengono scritti gli argomenti svolti nelle lezioni. Sono inoltre scritti gli esercizi assegnati a lezione ed altri ancora. Si è volutamente evitato di scrivere le soluzioni degli esercizi. Di solito infatti, quando ci si trova di fronte ad un problema, non se ne conosce la soluzione. Spesso, anzi, non si sa neanche se il problema abbia soluzione.

Alla fine di ogni capitolo vi è una breve bibliografia.

Con il simbolo  $\square$  si indica la fine di una dimostrazione (o la sua omissione).

# Capitolo 1

## Insiemi e funzioni

### 1.1 Inclusione, unione e intersezione

Nei corsi del primo anno si sono viste le nozioni di appartenenza di un elemento ad un insieme e la relazione di inclusione tra insiemi. Ricordiamo quest'ultima:

**Definizione 1** Un insieme  $A$  si dice **incluso** o **contenuto** in un insieme  $B$  (in simboli  $A \subset B$ ) se si ha:

$$a \in A \implies a \in B$$

Se  $A \subset B$  si usa anche dire che  $A$  è un **sottoinsieme** di  $B$ .

**Nota 2** L'**insieme vuoto**  $\emptyset$ , cioè l'insieme non avente alcun elemento, è contenuto in qualsiasi insieme.

**Nota 3** Alcuni testi preferiscono riservare il simbolo  $A \subset B$  al caso in cui  $A$  sia un sottoinsieme di  $B$  e  $A \neq B$ . Per indicare che  $A$  è un sottoinsieme di  $B$ , eventualmente coincidente con  $B$ , essi usano il simbolo  $A \subseteq B$ .

**Definizione 4** Ricordiamo che due insiemi coincidono se e solo se hanno gli stessi elementi. Quindi:

$$A = B \iff (x \in A \iff x \in B)$$

o, equivalentemente:

$$A = B \iff A \subset B, B \subset A$$

**Esempio 5** Ricordiamo alcuni insiemi che utilizzeremo spesso in seguito:

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$ . L'insieme  $N$  è cioè l'insieme dei numeri **naturali**. Facciamo notare che alcuni autori inseriscono in  $N$  anche il numero 0.

$Z = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ . L'insieme  $Z$  è cioè l'insieme dei numeri **interi**.

$Q$ : insieme dei numeri **razionali**.

$R$ : insieme dei numeri **reali**.

$C$ : insieme dei numeri **complessi**.

$Z^*$ : insieme dei numeri interi non nulli.

$Q^*$ : insieme dei numeri razionali non nulli.

$R^*$ : insieme dei numeri reali non nulli.

$C^*$ : insieme dei numeri complessi non nulli.

**Nota 6** Sappiamo che si ha:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

Si ha inoltre:

$$Z^* \subset Z, \quad Q^* \subset Q, \quad R^* \subset R, \quad C^* \subset C$$

**Nota 7** Ricordiamo che il simbolo  $\vee$  significa *oppure*. Quindi, per esempio:

$A = \{a \in N \mid a > 3 \vee a < 5\}$  significa che  $A$  è dato da tutti i numeri naturali  $a$  che sono maggiori di 3 oppure minori di 5. Quindi abbiamo  $A = N$ .

Il simbolo  $\wedge$  significa *e*. Quindi, per esempio:

$B = \{b \in N \mid b > 3 \wedge b < 5\}$  significa che  $B$  è dato da tutti i numeri naturali  $b$  che sono maggiori di 3 e sono minori di 5. Quindi abbiamo  $B = \{4\}$ .

**Teorema 8** L'inclusione tra insiemi ha le seguenti proprietà :

1) proprietà riflessiva:

$A \subset A$  per ogni insieme  $A$

2) proprietà antisimmetrica:

$A \subset B$  e  $B \subset A \implies A = B$

3) proprietà transitiva:

$A \subset B$  e  $B \subset C \implies A \subset C$

**DIMOSTRAZIONE.** Notare che la proprietà riflessiva e la proprietà antisimmetrica seguono dalla definizione di uguaglianza tra insiemi e dalla definizione di inclusione. La dimostrazione della proprietà transitiva viene lasciata per esercizio.  $\square$ .

**Definizione 9** Dati due insiemi  $A$  e  $B$  si definiscono gli insiemi:

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ , detto **unione** di  $A$  e  $B$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ , detto **intersezione** di  $A$  e  $B$

**Definizione 10** Due insiemi  $A$  e  $B$  tali che  $A \cap B = \emptyset$  si dicono **disgiunti**.

**Esempio 11** Sia  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{2, 5, 7\}$ , allora:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

$A \cap B = \{2\}$

**Esempio 12** Sia  $S$  un insieme di studenti. Indichiamo con  $LS$  l'insieme degli studenti di  $S$  che hanno frequentato il liceo scientifico e con  $LC$  l'insieme degli studenti di  $S$  che hanno frequentato il liceo classico. Abbiamo ovviamente:

$$LC \subset S, \quad LS \subset S$$

L'insieme  $L$  degli studenti che hanno frequentato o il liceo classico o il liceo scientifico è dato da:

$$L = LS \cup LC$$

Poiché non vi è alcun studente che abbia frequentato sia il liceo classico che lo scientifico, si ha:

$$LS \cap LC = \emptyset$$

Gli insiemi  $LC$  e  $LS$  sono quindi disgiunti.

**Nota 13** Notiamo che, dati gli insiemi  $A$  e  $B$ , si ha:

$$x \in A \wedge x \in B \implies x \in A \cup B$$

$$x \in A \wedge x \notin B \implies x \in A \cup B$$

$$x \notin A \wedge x \in B \implies x \in A \cup B$$

$$x \notin A \wedge x \notin B \implies x \notin A \cup B$$

Possiamo indicare tutto ciò per mezzo della seguente **tabella di verità dell'unione** di due insiemi:

$A$	$B$	$A \cup B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Abbiamo scritto tre colonne. La prima è la colonna dell'insieme  $A$ , la seconda quella di  $B$  e la terza quella di  $A \cup B$ . In una colonna di un insieme utilizziamo il simbolo 1 per indicare che un elemento appartiene all'insieme in questione e il simbolo 0 per indicare che un elemento non appartiene all'insieme. Quindi la prima riga indica che, se un elemento appartiene ad  $A$  e a  $B$ , allora esso appartiene all'insieme  $A \cup B$ . Analogamente per le altre righe. Quindi la tabella di verità appena vista può essere considerata come definizione dell'insieme unione. Notiamo che la colonna di  $A \cup B$  può essere facilmente scritta ricordando la seguente regola: nella colonna di  $A \cup B$  vi è il simbolo 1 se e solo se nelle colonne di  $A$  e  $B$  compare almeno una volta il simbolo 1.

In modo analogo si ha la seguente **tabella di verità dell'intersezione** di due insiemi:

$A$	$B$	$A \cap B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

La regola per costruire la colonna di  $A \cap B$  è la seguente: nella colonna di  $A \cap B$  vi è il simbolo 1 se e solo se sia nella colonna di  $A$  che in quella di  $B$  compare il simbolo 1.

**Teorema 14** Le operazioni di intersezione e unione tra insiemi verificano le seguenti proprietà :

1) (proprietà associativa dell'unione)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(da ciò segue che il simbolo  $A \cup B \cup C$  non è ambiguo)

1') (proprietà associativa dell'intersezione)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(da ciò segue che il simbolo  $A \cap B \cap C$  non è ambiguo)

2) (proprietà commutativa dell'unione)  $A \cup B = B \cup A$

2') (proprietà commutativa dell'intersezione)  $A \cap B = B \cap A$

3) (proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

3') (proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

DIMOSTRAZIONE: le proprietà 1,1',2,2' seguono immediatamente dalle definizioni.

Dimostriamo la proprietà 3.

Dobbiamo dimostrare :

$$a) A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$b) A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Dimostrazione di a):

$x \in A \cup (B \cap C) \implies x \in A \vee x \in (B \cap C)$ . Distinguiamo due casi: Primo caso:  $x \in A$ . Secondo caso:  $x \in B \cap C$ .

Primo caso:  $x \in A$ . Da ciò segue:  $x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$ .

Per cui  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

Secondo caso:  $x \in B \cap C$ . Da ciò segue:

$x \in B \wedge x \in C$ . Per cui  $x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$ . Quindi  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

Abbiamo dimostrato a). La dimostrazione di b) è analoga. La lasciamo per esercizio.

Diamo ora un'altra dimostrazione della stessa proprietà che utilizza le tabelle di verità. Sfruttiamo il fatto che due insiemi coincidono se e solo se hanno la stessa tabella di verità.

$A$	$B$	$C$	$B \cap C$	$A \cup (B \cap C)$	$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Nelle colonne di  $A$ ,  $B$  e  $C$  si sono contemplati tutti i casi possibili di appartenenza di un elemento ai tre insiemi. Ciò corrisponde a scrivere i simboli 0 e 1 in tutti i modi possibili nelle tre colonne. La colonna di  $B \cap C$  è stata costruita mettendo 1 se e solo se nelle colonne di  $B$  e  $C$  vi è 1; analogamente nella colonna di  $A \cup (B \cap C)$  si mette 1 se e solo se in almeno una delle colonne di  $A$  e di  $B \cap C$  vi è un 1. In modo analogo si sono via via costruite le altre colonne. Gli insiemi  $A \cup (B \cap C)$  e  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$  coincidono perché coincidono le loro colonne.

La dimostrazione della proprietà 3' è analoga alla dimostrazione della proprietà 3. La lasciamo per esercizio.  $\square$

**Teorema 15** Si hanno le seguenti **proprietà di assorbimento**:

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. Consigliamo di dare, come nel caso precedente, due dimostrazioni; una in cui si usano le definizioni delle operazioni tra insiemi; un'altra in cui si usano le tavole di verità.  $\square$

**Teorema 16** L'insieme unione di due insiemi ha la seguente proprietà:

$$A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$$

$$(A \subset C \wedge B \subset C) \implies A \cup B \subset C.$$

L'insieme intersezione di due insiemi ha la seguente proprietà:

$$A \cap B \subset A \wedge A \cap B \subset B$$

$$(D \subset A \wedge D \subset B) \implies D \subset A \cap B.$$

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio.  $\square$

**Esercizio 17** Dimostrare la seguente proprietà:

$$A \subset B, C \subset D \implies A \cup C \subset B \cup D, A \cap C \subset B \cap D$$

**Esercizio 18** Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

$$A \cup B = A \cup C \implies B = C$$

$$A \cap B = A \cap C \implies B = C$$

**Definizione 19**  $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ , detto **differenza** di  $A$  e  $B$ .

**Esempio 20** Sia:

$$A = \{a \in \mathbb{N} \mid 1 < a < 5\} \quad B = \{b \in \mathbb{N} \mid 3 < b < 8\}$$

Si ha:

$$A - B = \{2, 3\} \quad B - A = \{5, 6, 7\}$$

**Esercizio 21** Dall'esempio precedente segue che si ha:

$$A - B \neq B - A$$

Quali condizioni devono verificare  $A$  e  $B$  affinché si abbia  $A - B = B - A$ ?

**Esempio 22** Si ha:

$$Z^* = Z - \{0\}$$

Vedere esempio 5 per la definizione di  $Z^*$ .

Analogamente per  $Q^*, R^*, C^*$ .

**Esercizio 23** È valida la seguente formula  $C - (A \cup B) = (C - A) \cup (C - B)$ ?

**Definizione 24** Dati due insiemi  $A$  e  $B$  chiamiamo **differenza simmetrica** di  $A$  e  $B$  l'insieme:

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

**Esercizio 25** Scrivere la tabella di verità della differenza simmetrica.

**Esercizio 26** Dimostrare che si ha:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A \triangle B = B \triangle A$$

**Esercizio 27** Dimostrare che si ha:

$$A \subset C, B \subset C \implies A \triangle B \subset C.$$

## 1.2 Insieme delle parti

**Definizione 28** Dato un insieme  $U$ , indichiamo con il simbolo  $P(U)$  l'**insieme delle parti** di  $U$ . Esso ha come elementi i sottoinsiemi di  $U$ .

**Esempio 29** Vediamo vari esempi.

a)  $U = \emptyset \implies P(U) = \{\emptyset\}$

b)  $U = \{1\} \implies P(U) = \{\emptyset, \{1\}\}$

c)  $U = \{1, 2\} \implies P(U) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

**Teorema 30** Dato un insieme  $U$ , sia  $A \in P(U)$  e  $B \in P(U)$ . Si ha allora:

$$A \cup B \in P(U), A \cap B \in P(U)$$

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.  $\square$

**Esercizio 31** Sia  $U$  un insieme e  $A \in P(U)$ . Dimostrare che si ha:

$$A \cup B = B \quad \forall B \in P(U) \iff A = \emptyset$$

**Esercizio 32** Sia  $U$  un insieme e  $A \in P(U)$ . Dimostrare che si ha:

$$A \cap B = B \quad \forall B \in P(U) \iff A = U$$

**Definizione 33** Dato un insieme  $U$  e  $A \in P(U)$ , si definisce **complementare** di  $A$  in  $U$  il seguente sottoinsieme di  $U$ :

$$A' = U - A$$

Quindi  $A' \in P(U)$ .

**Nota 34** Possiamo indicare tutto ciò per mezzo della seguente **tabella di verità del complementare** di un insieme:

$A$	$A'$
1	0
0	1

Quindi nella colonna del complementare di  $A$  si sostituisce il simbolo 1 con il simbolo 0 e viceversa.



**Esercizio 35** Dato  $U$ , determinare  $\emptyset'$  e  $U'$ .

**Teorema 36** Dato un insieme  $U$ , sia  $A \in P(U)$ . Si ha:

$$(A')' = A$$

In altre parole il complementare del complementare di  $A$  è  $A$  stesso.

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.  $\square$

**Teorema 37** Sia  $U$  un insieme e  $A \in P(U)$ , cioè  $A \subset U$ . Dato  $B \in P(U)$ , si ha:

$$A' = B \iff (A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = U)$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che si ha  $A \cap A' = \emptyset$  e  $A \cup A' = U$ . Utilizziamo le tabelle di verità:

$A$	$A'$	$A \cap A'$	$A \cup A'$
1	0	0	1
0	1	0	1

poiché nella colonna di  $A \cap A'$  vi sono solo 0, abbiamo  $A \cap A' = \emptyset$ .

poiché nella colonna di  $A \cup A'$  vi sono solo 1, abbiamo  $A \cup A' = U$ .

Dobbiamo ora dimostrare che, se si ha  $A \cap B = \emptyset$  e  $A \cup B = U$ , allora  $B = A'$ . Utilizziamo le tabelle di verità. Abbiamo:

$A$	$A'$	$A \cap B$	$A \cup B$	$B$
1	0	0	1	
0	1	0	1	

La colonna di  $A \cap B$  è formata da tutti 0 poiché, per ipotesi  $A \cap B = \emptyset$ . La colonna di  $A \cup B$  è formata da tutti 1 poiché  $A \cup B = U$ . Vogliamo riempire la colonna di  $B$ . Al primo posto non vi può essere 1. Se vi fosse infatti 1, poiché al primo posto della colonna di  $A$  vi è 1, allora al primo posto della colonna  $A \cap B$  vi dovrebbe essere 1, il che non è vero. Quindi al primo posto della colonna  $B$  vi deve essere 0. Con un ragionamento analogo si dimostra che, poiché al secondo posto delle colonne  $A$  e  $A \cup B$  vi è 0, al secondo posto della colonna  $B$  vi deve essere necessariamente 1. Ma allora le colonne di  $B$  e  $A'$  coincidono, quindi  $B = A'$ .  $\square$

**Teorema 38** [Leggi di De Morgan<sup>1</sup>] Sia  $U$  un insieme. Dati  $A \in P(U)$  e  $B \in P(U)$ , si ha:

$$1) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$2) (A \cup B)' = A' \cap B'$$

DIMOSTRAZIONE. Si può dare una dimostrazione diretta (esercizio).

<sup>1</sup>Augustus De Morgan, (1806-1871), logico matematico inglese.

Noi diamo una dimostrazione utilizzando le tabelle di verità:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A$	$B$	$A'$	$B'$	$A \cup B$	$A \cap B$	$A' \cup B'$	$A' \cap B'$	$(A \cup B)'$	$(A \cap B)'$
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1

La tabella è stata scritta automaticamente. Nelle prime due colonne abbiamo scritto i simboli 0 e 1 in tutti i modi possibili. La terza colonna è ottenuta dalla prima utilizzando le regole per il complementare. La quarta colonna è stata ottenuta dalla seconda, la quinta dalla prima e dalla seconda, la sesta dalla prima e dalla seconda, la settima dalla terza e dalla quarta, l'ottava dalla terza e dalla quarta, la nona dalla quinta ed infine la decima dalla sesta. poiché la decima colonna è uguale alla settima, abbiamo la proprietà 1). poiché la nona colonna è uguale all'ottava, abbiamo la proprietà 2).  $\square$

**Esercizio 39** Sia  $U$  un insieme e  $A \in P(U), B \in P(U)$ . Dimostrare che si ha:

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A' \cap B')' \\ A \cap B &= (A' \cup B')' \\ A \cap (A' \cup B) &= A \cap B \\ A \cup (A' \cap B) &= A \cup B \\ A - B &= A \cap B' \end{aligned}$$

**Esercizio 40** Sia  $U$  un insieme e  $A \in P(U), B \in P(U)$ . Dimostrare che si ha:

$$A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff A \cap B' = \emptyset \iff A' \cup B = U$$

**Esercizio 41** Sia  $U$  un insieme e  $A \in P(U), B \in P(U)$ . Dimostrare che si ha:

$$A \subset B \iff B' \subset A'$$

### 1.3 Insiemi finiti

**Definizione 42** Dato un insieme finito  $A$ , chiamiamo **cardinalità** (o **potenza** o **ordine**) di  $A$  il numero dei suoi elementi. La cardinalità di un insieme  $A$  viene indicata con il simbolo  $|A|$ . Quindi, se un insieme ha  $n$  elementi, scriviamo  $|A| = n$ .

**Teorema 43** Se un insieme  $A$  ha  $n$  elementi, allora l'insieme delle parti di  $A$  ha  $2^n$  elementi.

Possiamo esprimere sinteticamente ciò nel seguente modo:

$$|A| = n \implies |P(A)| = 2^n$$

**DIMOSTRAZIONE.** Ordiniamo in qualche modo gli elementi dell'insieme  $A$ . Indichiamo tali elementi con  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Possiamo associare ad ogni sottoinsieme  $B$  di  $A$  una stringa di lunghezza  $n$  formata dai simboli 0 e 1 nel seguente modo:

il primo elemento della stringa è 1 se  $a_1 \in B$ , in caso contrario è 0. Analogamente il secondo elemento della stringa è 1 se  $a_2 \in B$ , altrimenti è 0. E così via. In altre parole, associamo al sottoinsieme  $B$  di  $A$  la stringa  $s_1 s_2 \dots s_n$  dove  $s_i = 1$  se e solo se  $a_i \in B$  e  $s_i = 0$  se e solo se  $a_i \notin B$ . Ovviamente a sottoinsiemi differenti corrispondono stringhe differenti e viceversa. Quindi il numero dei sottoinsiemi di  $A$  è uguale al numero di stringhe di lunghezza  $n$  dei simboli 1 e 0. Il numero di tali stringhe è uguale a  $2^n$ . Infatti, per determinare il primo elemento della stringa abbiamo due possibilità; altrettante ne abbiamo per determinare il secondo elemento. Per determinare quindi i primi due elementi abbiamo  $2^2$  possibilità. Per determinare il terzo elemento abbiamo ancora due possibilità. Per determinare quindi i primi tre elementi abbiamo  $2 \cdot 2^2 = 2^3$  possibilità. E così via.  $\square$

**Nota 44** La legge che associa al sottoinsieme  $B$  di  $A$  una stringa nel modo detto sopra viene detta **funzione caratteristica** di  $B$ .

**Teorema 45** Se  $A$  è un insieme finito, allora:

$$|P(A)| > |A|$$

**DIMOSTRAZIONE.** Basta verificare che, per ogni  $n = 0, 1, 2, \dots$  si ha:

$$2^n > n$$

Dimostriamo il teorema per induzione su  $n$ .

Per  $n = 0, n = 1, n = 2$  ciò è chiaramente vero (fare i calcoli).

Sia  $n > 2$ . Supponiamo vero il teorema per  $n - 1$ ; supponiamo cioè che, se  $n > 2$ , allora si ha  $2^{n-1} > n - 1$ . Dimostriamo ora il teorema per  $n$  con  $n > 2$ . Si ha:

$$2^n = 2^{(n-1)+1} = 2^{n-1} \cdot 2 > (n-1) \cdot 2 = 2n - 2.$$

Ma, per  $n > 2$ , si ha  $2n - 2 > n$  da cui la tesi.  $\square$

**Teorema 46** Siano  $A$  e  $B$  due insiemi finiti. Allora:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

**DIMOSTRAZIONE.** Vogliamo contare gli elementi di  $A \cup B$ . Contiamo tutti gli elementi di  $A$  e quindi tutti gli elementi di  $B$ . Così facendo abbiamo contato due volte gli elementi appartenenti sia ad  $A$  che a  $B$ . Dobbiamo quindi sottrarre dalla somma degli elementi di  $A$  e degli elementi di  $B$  il numero degli elementi di  $A \cap B$ , da cui la tesi.  $\square$

**Esercizio 47** Il numero degli studenti che hanno superato l'esame di Geometria 1 è 250; il numero degli studenti che hanno superato Analisi 1 è 230. Il numero degli studenti che hanno superato sia Geometria 1 che Analisi 1 è 190. Calcolare il numero degli studenti che hanno superato almeno uno dei due esami.

**Teorema 48** Siano  $A_1, A_2$  e  $A_3$  insiemi finiti. Allora:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

**DIMOSTRAZIONE.** Esercizio. Suggerimento: si possono usare due strategie per dimostrare il teorema. La prima consiste nel cercare di ragionare in modo analogo a quel che si è fatto nella dimostrazione del teorema 46. La seconda strategia consiste nell'applicare la proprietà associativa dell'unione, il teorema 46 e la proprietà distributiva.  $\square$

**Definizione 49** Dati  $n$  insiemi  $A_1, A_2, \dots, A_n$  usiamo i seguenti simboli:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

Nel caso in cui sia chiaro il campo di variabilità degli indici si scrive anche:

$$\bigcup_i A_i, \quad \bigcap_i A_i$$

**Esercizio 50** Gli studenti che hanno superato Geometria 1 sono 250. Gli studenti che hanno superato Analisi 1 sono 230. Gli studenti che hanno superato Fisica 1 sono 50. Gli studenti che hanno superato sia Geometria 1 che Analisi 1 sono 190. Gli studenti che hanno superato sia Geometria 1 che Fisica 1 sono 40. Gli studenti che hanno superato Analisi 1 e Fisica 1 sono 30. Gli studenti che hanno superato tutti e tre gli esami sono 25. Calcolare il numero degli studenti che hanno superato almeno uno dei tre esami.

**Esercizio 51** In un gruppo di 500 studenti, 285 hanno superato l'esame di Geometria, 195 quello di Analisi e 115 quello di Fisica. Inoltre 45 hanno superato sia Geometria che Analisi, 70 sia Analisi che Fisica, 50 sia Geometria che Fisica, mentre 50 studenti non hanno dato alcun esame. Calcolare il numero degli studenti che hanno superato tutti e tre gli esami e il numero degli studenti che hanno superato un solo esame.

**Nota 52** Con il simbolismo appena introdotto la formula data nel teorema 48 diventa

$$\left| \bigcup_{i=1}^3 A_i \right| = \sum_{i=1}^3 |A_i| - \sum_{i,j,i < j} |A_i \cap A_j| + \left| \bigcap_{i=1}^3 A_i \right|$$

dove la sommatoria nel secondo addendo significa sommatoria su  $i$  e  $j$  compresi tra 1 e 3 con la condizione  $i < j$ .

**Nota 53** La formula appena data può essere generalizzata al caso di  $n$  insiemi  $A_1, A_2, \dots, A_n$ :

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \left| \bigcap_{j=1}^p A_{i_j} \right|$$

## 1.4 Relazioni su un insieme

**Definizione 54** Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , indichiamo con  $A \times B$  l'insieme formato dalle coppie ordinate  $(a, b)$ , con  $a \in A$ ,  $b \in B$ . Cioè:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

L'insieme  $A \times B$  viene chiamato **prodotto cartesiano** degli insiemi  $A$  e  $B$ . Più in generale, dati  $n$  insiemi  $A_1, A_2, \dots, A_n$  poniamo:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

Dato poi un insieme  $A$  e un intero positivo  $n$  poniamo:

$$A^n = A \times A \times \dots \times A \quad (n \text{ volte})$$

**Esempio 55** Dati gli insiemi  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{1, 2, 3\}$ , si ha:  
 $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$ .

**Definizione 56** Dato un insieme  $A$ , sia  $B$  un sottoinsieme di  $A \times A$ . L'insieme  $B$  è quindi dato da coppie di elementi  $(a, a')$  di  $A$ . Introduciamo in  $A$  una **relazione binaria** ponendo che un elemento  $a$  è in relazione con un elemento  $a'$  se e solo se  $(a, a') \in B$ . Se  $a$  è in relazione con  $a'$  scriviamo  $aRa'$ . Quindi abbiamo:

$$aRa' \iff (a, a') \in B$$

**Esempio 57** Sia  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ . La relazione determinata da  $B$  è data da  $1R1$ ,  $1R2$ ,  $2R3$ .

**Esempio 58** La relazione binaria in un insieme  $A$  associata all'insieme  $\emptyset \subset A \times A$  è la relazione in cui per nessuna coppia  $a, b$  di elementi di  $A$  si ha  $aRb$ . La relazione binaria in un insieme  $A$  associata all'insieme  $A \times A \subset A \times A$  è la relazione in cui si ha  $aRb$  per ogni coppia di elementi  $a, b$  di  $A$ .

**Esercizio 59** Sia  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\}$ . Considerare la relazione determinata da  $B = \{(a, a') \in A^2 \mid a + a' = 10\}$ . Determinare tutte le coppie di elementi in relazione tra loro.

**Esercizio 60** Dato un insieme  $A$  con  $n$  elementi, calcolare il numero di relazioni binarie di  $A$ .

## 1.5 Relazioni d'ordine

**Definizione 61** Una relazione  $R$  in un insieme  $A$  si dice **relazione d'ordine**, se essa verifica le seguenti proprietà:

proprietà riflessiva:

$$aRa \quad \forall a \in A$$

proprietà antisimmetrica:

$$aRa', a'Ra \implies a = a'$$

proprietà transitiva:

$$aRa', a'Ra'' \implies aRa''.$$

**Esempio 62** Consideriamo nell'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali la seguente relazione:

$$aRa' \iff a \leq a'.$$

Si verifica facilmente che si tratta di una relazione d'ordine.

**Esercizio 63** Verificare quali delle relazioni date nel paragrafo precedente sono relazioni d'ordine.

**Nota 64** Di solito, quando si ha una relazione d'ordine, si usa il simbolo  $\prec$  al posto del simbolo  $R$ . Se si ha  $a \prec a'$  si dice che  $a$  è **minorante** o **precede**  $a'$ . Si dice anche che  $a'$  è **maggiorante** o **segue**  $a$ .

Con questa notazione le tre proprietà che caratterizzano le relazioni d'ordine si scrivono:

$$a \prec a \quad \forall a \in A$$

$$a \prec a', a' \prec a \implies a = a'$$

$$a \prec a', a' \prec a'' \implies a \prec a''.$$

**Definizione 65** Un insieme  $A$  si dice **ordinato** (o anche **parzialmente ordinato**) se in esso è definita una relazione d'ordine. Un insieme ordinato è quindi dato da una coppia formata da un insieme  $A$  e da una relazione  $\prec$  in  $A$ . Indichiamo ciò con il simbolo  $(A, \prec)$ .

**Nota 66** Si faccia attenzione alla definizione di insieme ordinato. Vi possono essere elementi  $a$  e  $b$  di un insieme ordinato  $(A, \prec)$  per i quali non si ha nè  $a \prec b$ , nè  $b \prec a$ . Daremo tra poco esempi di casi del genere.

**Definizione 67** Un insieme ordinato  $(A, \prec)$  si dice **totalmente ordinato** se, dati comunque  $a \in A$ ,  $b \in A$ , è verificata almeno una delle seguenti condizioni:  $a \prec b$  oppure  $b \prec a$ .

**Nota 68** La proprietà antisimmetrica implica che, se ambedue le condizioni  $a \prec b$  e  $b \prec a$  sono verificate allora  $a = b$ .

Pertanto in un insieme totalmente ordinato, dati comunque due elementi  $a$  e  $b$  distinti, si ha che è verificata una ed una sola delle due condizioni  $a \prec b$  e  $b \prec a$ .

**Esempio 69** L'insieme  $R$  con la relazione d'ordine di  $\leq$  (vedi sopra) è un insieme totalmente ordinato.

**Esempio 70** Dato un insieme  $U$ , sia  $P(U)$  l'insieme delle parti di  $U$ . La relazione  $\prec$  in  $P(U)$  data da  $B \prec C \iff B \subset C$  rende  $P(U)$  un insieme ordinato non totalmente (esercizio).

**Esempio 71** Nell'insieme  $N$  dei numeri interi positivi diamo la seguente relazione:  $a \prec b$  se e solo se  $b = ha$  con  $h \in N$ . Tale relazione rende  $(N, \prec)$  un insieme ordinato non totalmente (la dimostrazione di ciò viene lasciata per esercizio).

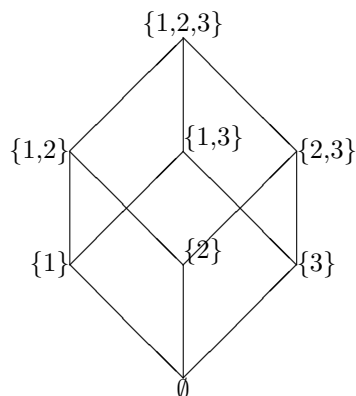
**Definizione 72** Un **diagramma di Hasse**<sup>2</sup> di un insieme ordinato  $(A, \prec)$  è una rappresentazione grafica dell'insieme, i cui elementi sono rappresentati da punti e delle relazioni intercorrenti tra di essi. Sia  $a \in A$  e  $b \in A$ . Se  $a \prec b$ , e  $a \neq b$ , allora si disegna  $b$  più in alto di  $a$ . I punti rappresentanti  $a$  e  $b$  sono collegati tra loro se e solo se  $a \prec b$  e non esiste alcun  $c$  tale che  $a \prec c \prec b$  e  $c \neq a$ ,  $c \neq b$ .

**Esempio 73** Consideriamo l'insieme  $U$  formato da tre elementi che indichiamo con 1,2,3. In  $P(U)$  introduciamo la relazione d'ordine data dalla relazione di inclusione (vedere esempio 70).

Rappresentiamo tale relazione con il seguente diagramma di Hasse:

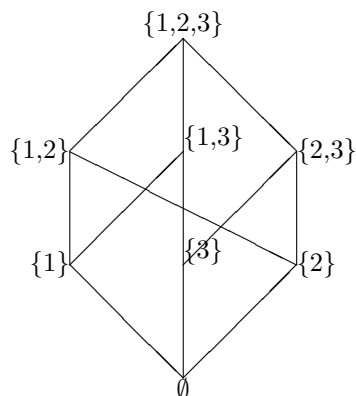
---

<sup>2</sup>**Helmut Hasse**, (1898-1979), algebrista tedesco.



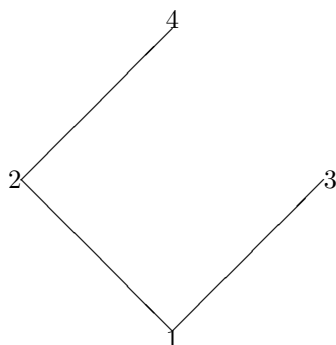
**Nota 74** Salvaguardata la regola di disegnare un elemento  $b$  più in alto di un elemento  $a$  se  $a \prec b$ , i punti in un diagramma di Hasse si possono disegnare in qualsiasi posizione. Infatti ciò che interessa in un diagramma di Hasse sono i collegamenti tra i punti.

Per esempio, possiamo disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato precedente anche nel modo seguente:

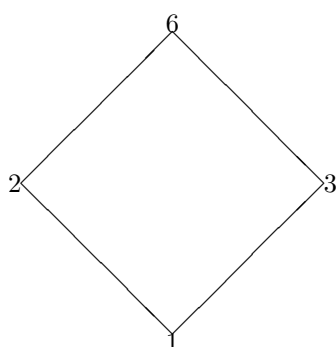


**Esempio 75** Sia  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Consideriamo in  $A$  la relazione d'ordine data nell'esempio 71. Il diagramma di Hasse di  $A$  è il seguente:





**Esempio 76** Sia  $D_6$  l'insieme dei divisori di 6. Consideriamo in  $D_6$  la relazione d'ordine data nell'esempio 71. Il diagramma di Hasse di  $D_6$  è il seguente:



**Esercizio 77** Sia  $D_9$  l'insieme dei divisori di 9. Si consideri in  $D_9$  la relazione d'ordine data nell'esempio 71. Tracciare il diagramma di Hasse di  $D_9$ .

**Esercizio 78** Sia  $D_{30}$  l'insieme dei divisori di 30. Si consideri in  $D_{30}$  la relazione d'ordine data nell'esempio 71. Tracciare il diagramma di Hasse di  $D_{30}$ .

**Definizione 79** Sia  $(A, \prec)$  un insieme ordinato e siano  $a \in A$  e  $b \in A$ . Un elemento  $u \in A$  si dice **minimo comun maggiorante** di  $a$  e  $b$  se:

- 1)  $a \prec u$ ,  $b \prec u$
- 2)  $a \prec x$ ,  $b \prec x \implies u \prec x$

Un elemento  $v \in A$  si dice **massimo comun minorante** di  $a$  e  $b$  se:

- 1)  $v \prec a$ ,  $v \prec b$
- 2)  $x \prec a$ ,  $x \prec b \implies x \prec v$

**Esempio 80** Consideriamo un qualsiasi insieme  $(A, \prec)$  totalmente ordinato. Siano  $a$  e  $b$  due elementi distinti di  $A$ . Sappiamo che necessariamente uno dei due elementi precede l'altro. Supponiamo, per fissare le idee, che si abbia  $a \prec b$ . Si verifica facilmente (esercizio) che  $a$  è il massimo comun minorante di  $a$  e  $b$  e che  $b$  è il minimo comun maggiorante di  $a$  e  $b$ .

**Teorema 81** Sia  $(A, \prec)$  un insieme ordinato e siano  $a, b$  elementi di  $A$ . Si ha che esiste al più un minimo comun maggiorante di  $a, b$ . Analogamente esiste al più un massimo comun minorante di  $a$  e  $b$ .

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio.  $\square$

**Esempio 82** Consideriamo l'esempio 75. I numeri 2 e 3 hanno come massimo comun minorante il numero 1; non esiste invece alcun minimo comun maggiorante di 2 e 3.

**Definizione 83** Un **reticolo**  $(A, \prec)$  è un insieme ordinato tale che ogni coppia di elementi  $a, b$  in  $A$  è dotata di minimo comun maggiorante e di massimo comun minorante.

**Esempio 84** L'insieme  $N$  con l'ordinamento dato dalla divisione (vedere esempio 71) è un reticolo. Dati infatti i numeri naturali  $a$  e  $b$  si ha che il loro massimo comun minorante è il loro massimo comun divisore mentre il loro minimo comun maggiorante è il loro minimo comune multiplo. Lasciamo la dimostrazione di ciò per esercizio.

**Esercizio 85** Verificare che la coppia  $(A, \prec)$  data nell'esempio 75 non è un reticolo.

**Esempio 86** Dato un insieme  $U$ , l'insieme  $P(U)$ , con la relazione d'ordine data dall'inclusione (vedere l'esempio 70), è un reticolo. Dati infatti due sottoinsiemi di  $U$  il loro massimo comun minorante è la loro intersezione. Il loro minimo comun maggiorante è la loro unione. Si lascia la dimostrazione di ciò per esercizio.

**Esempio 87** L'insieme  $N$ , con la relazione d'ordine data nell'esempio 71, è un reticolo. La dimostrazione di ciò viene lasciata per esercizio.

**Esempio 88** Dato  $n \in N$ , sia  $D_n$  l'insieme dei divisori di  $n$ . Si consideri la relazione d'ordine  $\prec$  data nell'esempio 71. Si ha che (esercizio)  $(D_n, \prec)$  è un reticolo.

## 1.6 Relazioni di equivalenza.

**Definizione 89** Una relazione  $R$  in un insieme  $A$  si dice **relazione di equivalenza** se essa verifica le seguenti proprietà :

proprietà riflessiva:

$aRa$  per ogni  $a \in A$

proprietà simmetrica:

$aRa' \implies a'Ra$

proprietà transitiva:

$$aRa', a'Ra'' \implies aRa''.$$

**Nota 90** Di solito, quando si ha una relazione di equivalenza, si usa il simbolo  $\sim$  al posto del simbolo  $R$ . Con questa notazione le tre proprietà precedenti vengono scritte nel seguente modo:

$$a \sim a \quad \forall a \in A$$

$$a \sim a' \implies a' \sim a$$

$$a \sim a', a' \sim a'' \implies a \sim a''.$$

**Esempio 91** Nell'insieme delle rette di un piano consideriamo equivalenti due rette se e solo se esse sono parallele (due rette complanari si dicono parallele se e solo se esse coincidono o non hanno alcun punto in comune). Si tratta di una relazione di equivalenza (esercizio).

**Esercizio 92** Nell'insieme delle rette di un piano consideriamo equivalenti due rette se e solo se esse sono perpendicolari. Si tratta di una relazione di equivalenza?

**Esercizio 93** In alcuni paesi della Sicilia si dice che due rette di un piano sono in *apparpagno* se esse sono parallele o perpendicolari. La relazione di apparpagno è una relazione di equivalenza nell'insieme delle rette del piano?

**Esempio 94** Nell'insieme dei piani dello spazio consideriamo equivalenti due piani se e solo se sono paralleli (due piani si dicono paralleli se e solo se essi coincidono o non hanno alcun punto in comune). Si tratta di una relazione di equivalenza (esercizio).

**Esercizio 95** Nell'insieme dei piani dello spazio consideriamo equivalenti due piani se e solo se essi sono perpendicolari. Si tratta di una relazione di equivalenza?

**Esempio 96** Nel corso del primo anno è stata già vista la relazione di equivalenza nell'insieme dei segmenti orientati data dall'equipollenza: due segmenti orientati del piano (o dello spazio) si dicono equipollenti se essi appartengono a rette parallele, sono equiorientati ed hanno la stessa lunghezza.

**Esempio 97** Si consideri un punto  $O$  di un piano. Nell'insieme dei punti del piano, diciamo equivalenti due punti se essi hanno la stessa distanza da  $O$ . Si tratta di una relazione di equivalenza (esercizio).

**Esempio 98** Analogo al precedente; ora però si considerano i punti dello spazio.

**Esercizio 99** Consideriamo l'insieme  $Z \times Z^*$ , cioè l'insieme delle coppie  $(a, b)$  di numeri interi con  $b \neq 0$ . Fissiamo in esso la seguente relazione:  $(a, b) \sim (c, d)$  se e solo se  $ad - bc = 0$ . Dimostrare che è una relazione di equivalenza.

**Esercizio 100** Consideriamo un insieme  $A$  in cui sia data una relazione  $\sim$  che verifichi la proprietà simmetrica e la proprietà transitiva. Vogliamo dimostrare che è verificata anche la proprietà riflessiva. Sia  $a \sim b$ . Per la proprietà simmetrica si ha allora  $b \sim a$ . Ma allora, da  $a \sim b$ ,  $b \sim a$ , per la proprietà transitiva si ha  $a \sim a$ . Da questa dimostrazione sembra che, nella definizione di relazione di equivalenza, la proprietà riflessiva sia superflua. In effetti, ciò non è vero. La dimostrazione appena data è infatti *sbagliata*. Trovare l'errore.

Se non si è trovato l'errore, risolvere il seguente:

**Esercizio 101** Si consideri l'insieme  $A = \{a, b, c\}$ . Poniamo in  $A$  la relazione  $\sim$  data da:  $b \sim b, b \sim c, c \sim b, c \sim c$ . Dimostrare che tale relazione verifica la proprietà simmetrica, la proprietà transitiva ma non la proprietà riflessiva.

**Nota 102** L'esempio precedente costituisce un controesempio all'affermazione "dimostrata" nell'esercizio 100. Analizzando con cura l'esempio si dovrebbe ora essere in grado di determinare l'errore della dimostrazione.

**Definizione 103** Sia dato un insieme  $A$  e sia data una relazione di equivalenza  $\sim$  in  $A$ . Indichiamo con  $[a]$  l'insieme degli elementi di  $A$  che sono equivalenti ad  $a$ . In simboli:

$$[a] = \{b \in A \mid b \sim a\}$$

Tale sottoinsieme  $[a]$  di  $A$  viene chiamato **classe di equivalenza** di  $a$ .

**Esempio 104** Le classi di equivalenza dell'esempio 91 sono le direzioni del piano.

**Esempio 105** Le classi di equivalenza dell'esempio 94 sono le giaciture dello spazio.

**Esempio 106** Le classi di equivalenza dell'esempio 96 sono i vettori del piano (dello spazio).

**Esercizio 107** Determinare le classi di equivalenza degli esempi 97, 98 e 99.

**Esempio 108** Introduciamo in  $M(R, n, n)$  la seguente relazione:

$$A \sim B \iff \det(A) = \det(B)$$

Si verifica facilmente che è una relazione di equivalenza. Due matrici appartengono alla stessa classe di equivalenza se e solo se hanno lo stesso determinante.

**Teorema 109** Ogni elemento  $a \in A$  appartiene ad una ed una sola classe di equivalenza. Quindi, se due classi  $[a]$  e  $[b]$  hanno almeno un elemento in comune, allora esse coincidono.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $a \in A$ . Dimostriamo che  $a$  appartiene ad una classe di equivalenza. Per la proprietà riflessiva si ha  $a \sim a$ . Quindi  $a \in [a]$ . Dimostriamo ora che  $a$  appartiene ad una sola classe. Sia  $a \in [b]$ . Quindi  $a \sim b$ . Dimostriamo che si ha  $[a] = [b]$ . Per far ciò dimostriamo innanzitutto che si ha  $[a] \subset [b]$ . Sia  $a' \in [a]$ . Allora  $a' \sim a$ . Ma  $a \sim b$ . Per la proprietà transitiva allora  $a' \sim b$ ; da cui  $a' \in [b]$ . Dimostriamo ora che si ha  $[b] \subset [a]$ . Sia  $b' \in [b]$ . Allora  $b' \sim b$ . Ma  $a \sim b$  e quindi, per la proprietà simmetrica,  $b \sim a$ . Da  $b' \sim b$ ,  $b \sim a$  segue, per la proprietà transitiva,  $b' \sim a$ . Da cui  $b' \in [a]$ .  $\square$

**Nota 110** Dal teorema precedente deriva in particolare:

$$b \sim a \iff [b] = [a]$$

**Definizione 111** Indichiamo con  $A/\sim$  l'insieme avente come elementi le classi di equivalenza di  $A$ . Tale insieme viene detto **insieme quoziente** di  $A$  relativamente alla relazione di equivalenza  $\sim$ .

## 1.7 Funzioni

Richiamiamo alcune nozioni già viste nei corsi del primo anno.

**Definizione 112** Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , una **funzione** (o **applicazione**) tra  $A$  e  $B$  è una legge  $f$  che associa ad ogni elemento  $a \in A$  uno ed un solo elemento di  $B$  che viene indicato con  $f(a)$ . L'elemento  $f(a)$  viene detto **immagine** di  $a$  attraverso  $f$ . Una funzione  $f$  tra  $A$  e  $B$  viene indicata con il simbolo  $f : A \longrightarrow B$ . L'insieme delle immagini degli elementi di  $A$  viene detto **immagine** di  $f$ . Esso viene indicato con il simbolo  $f(A)$  o con il simbolo  $\text{Im}f$ . Quindi  $f(A) \subset B$ . In altre parole:

$$f(A) = \{b \in B \mid \exists a \in A \text{ tale che } f(a) = b\}$$

Dato  $b \in B$ , chiamiamo **controimmagine** (o **fibra**) di  $b$  il sottoinsieme di  $A$  dato dagli elementi di  $A$  le cui immagini coincidono con  $b$ . Tale sottoinsieme di  $A$  viene indicato con il simbolo  $f^{-1}(b)$ . In altre parole:

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

**Esercizio 113** Sia  $f : A \longrightarrow B$  una funzione. Dimostrare che si ha:

$$b \in f(A) \iff f^{-1}(b) \neq \emptyset$$

**Esercizio 114** Consideriamo la funzione

$$r : R \longrightarrow R$$

che associa ad  $a \in R$  il suo arrotondamento  $round(a)$  come viene fatto in PASCAL. Determinare

$$r^{-1}(3) , r^{-1}(3.5) , r^{-1}(0) , r^{-1}(-3) , r^{-1}(-3.5)$$

**Esercizio 115** Svolgere lo stesso esercizio precedente considerando, al posto della funzione arrotondamento, la funzione  $trunc$  che associa ad  $a \in R$  la sua parte intera.

**Definizione 116** Data una funzione  $f : A \longrightarrow B$  e dato  $A' \subset A$  chiamiamo **immagine di  $A'$**  l'insieme delle immagini degli elementi di  $A'$ . Indichiamo questo insieme con il simbolo  $f(A')$ . Quindi:

$$f(A') = \{b \in B \mid \exists a' \in A' \text{ tale che } f(a') = b\}$$

Possiamo anche definire la **restrizione** della funzione  $f$  a  $A'$ , che viene indicata con il simbolo  $f|_{A'}$  (si dice  **$f$  ristretta** ad  $A'$ ). Essa è la funzione ottenuta considerando la funzione  $f$  solo sugli elementi di  $A'$ . La funzione  $f|_{A'} : A' \longrightarrow B$  è quindi definita da  $f|_{A'}(a') = f(a') \forall a' \in A'$ .

Si definisce anche la **funzione inclusione**  $i : A' \longrightarrow A$  nel modo seguente  $i(a') = a' \forall a' \in A'$

**Definizione 117** Una funzione  $f : A \longrightarrow B$  si dice **iniettiva** (o **monomorfismo**) se elementi diversi hanno immagini diverse. Cioè:

$$f \text{ iniettiva} \iff (a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')) .$$

O, equivalentemente:

$$f \text{ iniettiva} \iff (f(a) = f(a') \Rightarrow a = a') .$$

**Esercizio 118** Dimostrare che, data una funzione  $f : A \longrightarrow B$ , si ha:

$$f \text{ iniettiva} \iff \forall b \in B \mid f^{-1}(b) \mid \leq 1$$

**Definizione 119** Una funzione  $f : A \longrightarrow B$  si dice **suriettiva** o **surgettiva** o **sopra** (o **epimorfismo**), se si ha  $B = f(A)$ .

**Esercizio 120** Dimostrare che, data una funzione  $f : A \longrightarrow B$ , si ha:

$$f \text{ surgettiva} \iff \forall b \in B \mid f^{-1}(b) \mid \geq 1$$

**Definizione 121** Una funzione si dice **biiettiva** o **biunivoca** se essa è iniettiva e suriettiva.

**Esercizio 122** Dimostrare che, data una funzione  $f : A \longrightarrow B$ , si ha:

$$f \text{ biiettiva} \iff \forall b \in B \ |f^{-1}(b)| = 1$$

**Esercizio 123** Consideriamo la nostra indagine tra gli studenti. Sia  $A$  l'insieme degli studenti. Consideriamo la funzione  $f : A \longrightarrow N \cup \{0\}$  che associa ad ogni studente il numero degli esami del primo anno da lui superati. La funzione  $f$  è iniettiva, è surgettiva? Spiegare cosa è  $f^{-1}(5)$ .

**Esercizio 124** Dare un esempio di funzione non iniettiva e non surgettiva.

Dare un esempio di funzione iniettiva e non surgettiva.

Dare un esempio di funzione non iniettiva e surgettiva.

Dare un esempio di funzione iniettiva e surgettiva (cioè biunivoca).

**Esercizio 125** Dimostrare che, se  $A$  è un insieme finito e se  $f : A \longrightarrow A$ , allora  $f$  è iniettiva se e solo se  $f$  è surgettiva.

**Definizione 126** Dato un insieme  $A$  la **funzione identica** di  $A$  è la funzione  $f : A \longrightarrow A$  definita da  $f(a) = a \ \forall a \in A$ . Di solito la funzione identica di  $A$  viene indicata con il simbolo  $id_A$  (o con il simbolo  $id$  se non vi sono dubbi sull'insieme su cui opera l'identità) o anche con il simbolo  $1_A$ .

**Teorema 127** La funzione identica di un insieme  $A$  è biunivoca.

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio.  $\square$

**Teorema 128** Dati  $A' \subset A$ , la funzione inclusione  $i : A' \longrightarrow A$  è iniettiva.

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio.  $\square$

**Esercizio 129** Dimostrare che la funzione inclusione  $i : A' \longrightarrow A$  è surgettiva se e solo se  $A' = A$ .

**Definizione 130** Dati due insiemi  $A$  e  $B$  definiamo le funzioni:

$$p_A : A \times B \longrightarrow A$$

$$p_B : A \times B \longrightarrow B$$

nel modo seguente:

$$p_A[(a, b)] = a \quad p_B[(a, b)] = b.$$

Esse sono dette **proiezioni** su  $A$  e su  $B$  rispettivamente.

**Teorema 131** Le funzioni proiezioni  $p_A : A \times B \longrightarrow A$  e  $p_B : A \times B \longrightarrow B$  sono suriettive.

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio.  $\square$

**Esercizio 132** Dimostrare che la funzione proiezione  $p_A : A \times B \longrightarrow A$  è biunivoca se e solo se l'insieme  $B$  è formato da un solo elemento.

Dimostrare che la funzione proiezione  $p_B : A \times B \longrightarrow B$  è biunivoca se e solo se l'insieme  $A$  è formato da un solo elemento.

**Definizione 133** Sia  $A$  un insieme e sia  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $A$ . Sia  $A/\sim$  l'insieme quoziente. La funzione  $\pi : A \longrightarrow A/\sim$  definita da  $\pi(a) = [a] \quad \forall a \in A$  viene detta **funzione quoziente**.

**Teorema 134** La funzione quoziente è surgettiva.  
**DIMOSTRAZIONE.** Lasciata per esercizio.  $\square$

**Esercizio 135** Consideriamo nell'insieme  $A$  degli studenti che frequentano il corso di geometria ed algebra la relazione di equivalenza  $\sim$  così definita: dati  $a \in A$  e  $a' \in A$  poniamo  $a \sim a' \iff$  gli studenti  $a$  e  $a'$  hanno frequentato lo stesso tipo di scuola. Determinare  $A/\sim$  e verificare se la funzione quoziente  $\pi : A \longrightarrow A/\sim$  è iniettiva.

**Esercizio 136** Dimostrare che la funzione quoziente è iniettiva se e solo se la relazione  $\sim$  è l'identità; cioè  $a \sim b$  se e solo se  $a = b$ .

**Definizione 137** Date due funzioni  $f : A \longrightarrow B$  e  $g : A \longrightarrow B$ , esse si dicono **uguali** se si ha:

$$\forall a \in A \quad f(a) = g(a)$$

**Nota 138** Dalla definizione precedente segue che date due funzioni  $f : A \longrightarrow B$  e  $g : A \longrightarrow B$  sono diverse se esiste  $a \in A$  tale che  $f(a) \neq g(a)$ .

**Esercizio 139** Siano date due funzioni  $f : A \longrightarrow B$  e  $g : A \longrightarrow B$ , e sia  $C \subset A$  e  $C \neq A$ . Verificare la verità o falsità della seguente affermazione:

$$f|_C = g|_C \implies f = g$$

## 1.8 Composizione di funzioni

**Definizione 140** Date due funzioni  $f : A \longrightarrow B$  e  $g : B \longrightarrow C$ , la **funzione composta** è la funzione  $g \circ f : A \longrightarrow C$  definita da

$$(g \circ f)(a) = g[f(a)] \quad \forall a \in A$$

**Teorema 141** La composizione di funzioni verifica le seguenti proprietà :  
 proprietà associativa:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad \forall f : A \longrightarrow B \quad \forall g : B \longrightarrow C \quad \forall h : C \longrightarrow D$$

proprietà della funzione identica  $id_A : A \longrightarrow A$ :

$$f \circ id_A = f \quad \forall f : A \longrightarrow B$$

$$id_A \circ g = g \quad \forall g : C \longrightarrow A$$

**DIMOSTRAZIONE.** Esercizio.  $\square$

**Esercizio 142** Verificare che, data una funzione  $f : A \longrightarrow B$  e  $A' \subset A$ , si ha  $f|_{A'} = f \circ i$  dove  $i : A' \longrightarrow A$  è la funzione inclusione.



**Definizione 143** Data una funzione biunivoca  $f : A \longrightarrow B$ , la **funzione inversa** di  $f$  è la funzione:

$$f^{-1} : B \longrightarrow A$$

definita da:

$$f^{-1}(b) = a \quad \text{dove } a \in A \text{ è tale che } f(a) = b.$$

**Nota 144** Il fatto che la funzione  $f$  sia biunivoca assicura che l'elemento  $a$  verificante la condizione richiesta esista e sia unico.

**Nota 145** Attenzione. Con il simbolo  $f^{-1}(b)$  si indica sia la controimmagine di  $b$  attraverso una *qualsiasi* funzione  $f$  sia l'immagine di  $b$  attraverso la funzione  $f^{-1}$  inversa di una funzione  $f$  che sia *biunivoca*.

**Teorema 146** La funzione inversa  $f^{-1}$  di una funzione biunivoca  $f$  è essa stessa biunivoca.

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio.  $\square$

**Esercizio 147** Sia  $f : A \longrightarrow B$  una funzione biunivoca e sia  $f^{-1} : B \longrightarrow A$  la sua inversa. Dimostrare che si ha:  $f \circ f^{-1} = id_B$  e  $f^{-1} \circ f = id_A$ .

**Esercizio 148** Sia  $f : A \longrightarrow B$  una funzione biunivoca. Dimostrare che esiste ed è unica la funzione  $g : B \longrightarrow A$  tale che  $f \circ g = id_B$  e  $g \circ f = id_A$ . Tale funzione  $g$  è quindi la funzione  $f^{-1}$ .

**Teorema 149** Sia  $f : A \longrightarrow B$  una funzione. Dimostrare la seguente affermazione:

$$\exists g : B \longrightarrow A \mid f \circ g = id_B, g \circ f = id_A \iff f \text{ è biunivoca.}$$

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio.  $\square$

**Teorema 150** Date le seguenti funzioni:  $f : A \longrightarrow B$  e  $g : B \longrightarrow C$ , si ha:

- 1)  $f$  iniettiva  $\wedge g$  iniettiva  $\implies g \circ f$  iniettiva
- 2)  $f$  surgettiva  $\wedge g$  surgettiva  $\implies g \circ f$  surgettiva.

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.  $\square$

**Esercizio 151** Siano date le funzioni  $f : A \longrightarrow B$  e  $g : B \longrightarrow C$ .

Dimostrare le seguenti affermazioni:

- 1)  $g \circ f$  iniettiva  $\implies f$  iniettiva;
- 2)  $g \circ f$  surgettiva  $\implies g$  surgettiva.

**Esercizio 152** Determinare  $f : A \longrightarrow B$  e  $g : B \longrightarrow C$  tali che  $g \circ f$  sia iniettiva e  $g$  non sia iniettiva.

**Esercizio 153** Determinare  $f : A \longrightarrow B$  e  $g : B \longrightarrow C$  tali che  $g \circ f$  sia suriettiva e  $f$  non sia suriettiva.

**Esercizio 154** Dimostrare la seguente affermazione:

$$f : A \longrightarrow B \text{ surgettiva} \iff \exists g : B \longrightarrow A \mid f \circ g = id_B.$$

Dimostrare inoltre che, se  $f$  è surgettiva e non iniettiva, allora esiste più di una funzione  $g$  verificante le condizioni date.

**Esercizio 155** Dimostrare la seguente affermazione:

$$f : A \longrightarrow B \text{ iniettiva} \iff \exists g : B \longrightarrow A \mid g \circ f = id_A.$$

Dimostrare inoltre che, se  $f$  è iniettiva e non surgettiva, allora esiste più di una funzione  $g$  verificante le condizioni date.

## 1.9 Diagrammi commutativi

**Definizione 156** Siano date le seguenti funzioni tra insiemi:

$$f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C, h : A \longrightarrow D, k : D \longrightarrow C.$$

Se  $g \circ f = k \circ h$ , diciamo che il seguente diagramma è **commutativo**.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ D & \xrightarrow{k} & C \end{array}$$

Se si parte infatti da un qualsiasi elemento  $a$  dell'insieme  $A$  posto nel vertice alto sinistro del diagramma e si arriva nell'insieme  $C$  percorrendo le due strade possibili (una volta passando per  $B$  e arrivando quindi a  $(g \circ f)(a)$  e una seconda volta passando per  $D$  e arrivando quindi a  $(k \circ h)(a)$ ), si ottiene lo stesso elemento.

**Esempio 157** Sappiamo che, data una qualsiasi matrice invertibile  $A$ , si ha  $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$ . Esprimiamo ciò utilizzando il simbolismo appena introdotto.

Indichiamo con  $GL(R, n)$  l'insieme delle matrici invertibili di ordine  $n$  a coefficienti reali. Le lettere GL sono le iniziali di gruppo lineare. Spiegheremo nel terzo capitolo perché usiamo la parola “gruppo”.

Sia  $\det : GL(R, n) \longrightarrow R^*$  la funzione che associa ad ogni matrice il suo determinante.

Sia  $f : R^* \longrightarrow R^*$  la funzione che associa ad ogni numero reale non nullo il suo inverso; sia  $f' : GL(R, n) \longrightarrow GL(R, n)$  la funzione che associa ad ogni matrice invertibile la sua inversa. Allora il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} GL(R, n) & \xrightarrow{f'} & GL(R, n) \\ \downarrow \det & & \downarrow \det \\ R^* & \xrightarrow{f} & R^* \end{array}$$

**Esempio 158** Date  $A \in M(R, n, n)$  e  $B \in M(R, n, n)$  sappiamo che si ha:

$${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$$

Questa formula può essere espressa dicendo che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 M(R, n, n) \times M(R, n, n) & \xrightarrow{m} & M(R, n, n) & \xrightarrow{tr} & M(R, n, n) \\
 \downarrow tr \times tr & & & & \uparrow m \\
 M(R, n, n) \times M(R, n, n) & & \xrightarrow{s} & & M(R, n, n) \times M(R, n, n)
 \end{array}$$

dove:

$tr : M(R, n, n) \longrightarrow M(R, n, n)$  è definita da:  $tr(A) = {}^t(A)$ ;

$m : M(R, n, n) \times M(R, n, n) \longrightarrow M(R, n, n)$  è definita da  $m[(A, B)] = A \cdot B$ ;

$tr \times tr : M(R, n, n) \times M(R, n, n) \longrightarrow M(R, n, n) \times M(R, n, n)$  è definita da  $(tr \times tr)[(A, B)] = ({}^tA, {}^tB)$ ;

$s : M(R, n, n) \times M(R, n, n) \longrightarrow M(R, n, n) \times M(R, n, n)$  è definita da  $s[(A, B)] = (B, A)$ .

**Esempio 159** Sia  $det : M(R, n, n) \longrightarrow R$  la funzione che associa ad ogni matrice il suo determinante e sia  $tr : M(R, n, n) \longrightarrow M(R, n, n)$  la funzione che associa ad ogni matrice  $A$  la sua trasposta  ${}^tA$ . Nel corso di Geometria 1 si è visto che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 M(R, n, n) & \xrightarrow{tr} & M(R, n, n) \\
 det \searrow & & \swarrow det \\
 & R &
 \end{array}$$

**Esercizio 160** Esprimere in forma di diagramma commutativo il seguente teorema:

$$\text{rango}(A) = \text{rango}({}^tA)$$

## 1.10 Passaggio al quoziente

**Esempio 161** Supponiamo che io abbia svolto un'indagine tra gli studenti. Ad ognuno di essi ho chiesto il tipo di scuola di provenienza, l'anno di immatricolazione all'università e i voti riportati nei singoli esami del primo anno.

Supponiamo che io voglia sapere quali siano gli studenti che frequentano il corso di geometria ed algebra che provengono dal liceo classico o dal liceo scientifico. Non ho alcuna difficoltà nel far ciò. Prendo i risultati della mia indagine tra gli studenti e, per ogni studente, vado a vedere il tipo di scuola di provenienza e controllo se esso è liceo classico o liceo scientifico.

Supponiamo ora che io abbia suddiviso gli studenti per tipo di scuola di provenienza e che poi abbia distrutto i dati originali dell'indagine. Sono sempre in grado di sapere quali siano gli studenti che hanno frequentato il liceo classico o scientifico? Certamente sì. Mi basta prendere l'insieme degli studenti che hanno frequentato il liceo classico e l'insieme degli studenti che hanno frequentato il liceo scientifico.

Analizziamo ora un caso differente. Supponiamo che io abbia suddiviso gli studenti per anno di immatricolazione e che poi abbia distrutto i dati originali

dell'indagine. Sono sempre in grado di sapere quali siano gli studenti che hanno frequentato il liceo classico o scientifico? Ovviamente no. Per ogni studente ora conosco solo l'anno di immatricolazione. Non sono più in grado di determinare il tipo di scuola di provenienza.

Formalizziamo tutto ciò. Indichiamo con  $A$  l'insieme degli studenti. Indichiamo con  $B$  l'insieme  $\{0, 1\}$ . Ad ogni studente assegniamo il simbolo 1 se esso ha frequentato il liceo classico o scientifico e il simbolo 0 in caso contrario.

Abbiamo quindi definito una funzione  $f : A \longrightarrow B$ . L'insieme  $L$  degli studenti che hanno frequentato il liceo classico o scientifico è dato da  $f^{-1}(1)$ .

Analizziamo ora il primo caso: quello in cui abbiamo suddiviso gli studenti per tipo di scuola di provenienza. Abbiamo cioè introdotto in  $A$  la relazione di equivalenza  $\sim$  data da: dati  $a \in A$ ,  $a' \in A$  si ha  $a \sim a' \iff$  gli studenti  $a$  e  $a'$  hanno frequentato lo stesso tipo di scuola.

L'aver suddiviso gli studenti per tipo di scuola di provenienza corrisponde ad aver considerato l'insieme quoziente  $A/\sim$ . Ogni elemento di  $A/\sim$  è formato da tutti e soli gli studenti che hanno frequentato uno stesso tipo di scuola. Posso quindi chiamare ogni elemento di  $A/\sim$  con il tipo di scuola frequentato da tutti i suoi elementi.

Ho poi la funzione quoziente  $\pi : A \longrightarrow A/\sim$  che associa ad ogni elemento  $a \in A$ , cioè ad ogni studente, l'insieme  $[a] \in A/\sim$  formato da tutti gli studenti che hanno frequentato lo stesso tipo di scuola frequentato da  $a$ .

Mi sono posto la domanda se sono in grado di determinare gli studenti che hanno frequentato il liceo classico o scientifico dalla sola conoscenza di  $A/\sim$  e di  $\pi : A \longrightarrow A/\sim$ . Notiamo che, se siamo in grado di costruire una funzione  $g : A/\sim \longrightarrow B$  tale che si abbia  $f = g \circ \pi$ , abbiamo:  $L = f^{-1}(1) = (g \circ \pi)^{-1}(1)$ . Ecco che la determinazione della funzione  $g$  ci permette di risolvere il nostro problema. E' molto semplice definire la funzione  $g$ . Definisco infatti la funzione  $g : A/\sim \longrightarrow B$  associando ad ogni elemento di  $x \in A/\sim$  il simbolo 1, se il tipo di scuola frequentato da un qualsiasi studente appartenente a  $x$  è il liceo classico o scientifico, e il simbolo 0 in caso contrario. Ho risolto il mio problema.

Studiamo ora il secondo caso; quello in cui ho suddiviso gli studenti per anno di immatricolazione. Ho quindi introdotto in  $A$  la seguente relazione di equivalenza  $\approx$ : dati  $a \in A$  e  $a' \in A$ , pongo  $a \approx a' \iff$   $a$  e  $a'$  si sono immatricolati nello stesso anno. L'aver suddiviso gli studenti per anno di immatricolazione corrisponde ad aver considerato l'insieme quoziente  $A/\approx$ . Indichiamo con  $\pi' : A \longrightarrow A/\approx$  la funzione quoziente. Ci chiediamo se esiste una funzione  $g' : A/\approx \longrightarrow B$  tale che  $f = g' \circ \pi'$ . La risposta è in generale negativa. Vi possono essere infatti studenti che si sono iscritti nello stesso anno che non hanno frequentato lo stesso tipo di scuola.

**Nota 162** L'esempio appena visto ci ha mostrato che può essere importante risolvere il seguente problema.

Sia data una funzione tra insiemi  $f : A \longrightarrow B$  e sia data una relazione di equivalenza  $\sim$  in  $A$ . Consideriamo l'insieme quoziente  $A/\sim$ . Esiste una funzione  $g : A/\sim \longrightarrow B$  tale che  $f = g \circ \pi$  dove  $\pi : A \longrightarrow A/\sim$  è la funzione quoziente? Ci chiediamo, in altre parole, se esiste una funzione  $g$  che renda commutativo il

seguinte diagramma:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \pi \searrow & & \nearrow g \\ & A/\sim & \end{array}$$

**Definizione 163** Nel caso in cui la funzione  $g$  esista, si dice che la funzione  $f$  **passa al quoziente** relativamente alla relazione  $\sim$ . La funzione  $g$  viene detta **funzione quozientata** e viene spesso indicata con il simbolo  $f/\sim$ .

**Definizione 164** Data una funzione  $f : A \longrightarrow B$  e una relazione di equivalenza  $\sim$  su  $A$ , diciamo che la funzione  $f$  è **compatibile** con la relazione di equivalenza  $\sim$  se si ha:

$$a \sim a' \implies f(a) = f(a')$$

**Teorema 165** Data una funzione tra insiemi  $f : A \longrightarrow B$  e data una relazione di equivalenza  $\sim$  in  $A$ , esiste una funzione  $g : A/\sim \longrightarrow B$  tale che  $f = g \circ \pi$  (dove  $\pi : A \longrightarrow A/\sim$  è la funzione quoziente) se e solo se la funzione  $f$  è compatibile con la relazione di equivalenza  $\sim$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che la funzione  $f$  sia compatibile con  $\sim$ . Dimostriamo che esiste la funzione  $g$ .

Definiamo la funzione  $g$  nel modo seguente:

$$g([a]) = f(a)$$

Notiamo che, per definire la funzione  $g$ , abbiamo scelto un elemento della classe  $[a]$ . Ci poniamo allora la domanda: la definizione della funzione  $g$  dipende dalla scelta dell'elemento in  $[a]$ ? Una funzione si dice **ben posta** se la sua definizione non dipende dalle scelte fatte nel dare la definizione. Dimostriamo che nel nostro caso la definizione di  $g$  è ben posta. Sia  $a' \in [a]$ ; quindi  $a' \sim a$ . Ma allora  $f(a') = f(a)$  e quindi  $g([a']) = g([a])$ .

Abbiamo dimostrato che la definizione di  $g$  è ben posta. Abbiamo quindi effettivamente una funzione  $g : A/\sim \longrightarrow B$ . Si verifica poi facilmente che la funzione  $g$  ora definita rende commutativo il diagramma.

Viceversa, supponiamo che la funzione  $g$  esista e dimostriamo che la funzione  $f$  è compatibile con  $\sim$ . Dobbiamo dimostrare che si ha:

$$a \sim a' \implies f(a) = f(a')$$

Sia  $a \sim a'$ . Allora si ha  $[a] = [a']$ . Quindi

$$f(a') = (g \circ \pi)(a') = g([a']) = g([a]) = (g \circ \pi)(a) = f(a)$$

Abbiamo quindi dimostrato il teorema.  $\square$

**Esercizio 166** Sia data la funzione  $f : M(R, n, n) \longrightarrow N \cup \{0\}$  che associa ad ogni matrice il suo rango. Si consideri in  $M(R, n, n)$  la relazione di equivalenza  $\sim$  data da:

$$A \sim A' \iff \det(A) = \det(A')$$

Verificare se la funzione  $f$  passa al quoziente.

**Esercizio 167** Sia  $f : M(R, n, n) \longrightarrow R$  la funzione che associa ad ogni matrice il suo determinante. Sia  $\sim$  la relazione di equivalenza in  $M(R, n, n)$  data dalla **similitudine**. Essa è data da:

$$A \sim A' \iff \exists M \in GL(R, n) \mid A' = M^{-1}AM$$

Verificare che la funzione  $f$  passa al quoziente.

**Esercizio 168** Sia  $r : R \longrightarrow Z$  la funzione che associa ad ogni numero il suo arrotondamento. Introduciamo in  $R$  una relazione di equivalenza definendo equivalenti due numeri se essi hanno la stessa parte intera. La funzione  $r$  passa al quoziente relativamente alla relazione di equivalenza data?

**Teorema 169** Sia data una relazione di equivalenza  $\sim$  in un insieme  $A$  e una funzione tra insiemi  $f : A \longrightarrow B$  compatibile con  $\sim$ . Sia  $g : A/\sim \longrightarrow B$  la funzione quozientata. Si ha:

$$f(A) = g(A/\sim)$$

Quindi la funzione  $g$  è surgettiva se e solo se la funzione  $f$  è surgettiva.

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.  $\square$

**Esercizio 170** Sia  $f : A \longrightarrow B$  una funzione compatibile con una relazione di equivalenza  $\sim$  in  $A$ . Sia  $g : A/\sim \longrightarrow B$  la funzione quozientata. Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

$$f \text{ iniettiva} \implies g \text{ iniettiva}$$

$$g \text{ iniettiva} \implies f \text{ iniettiva}$$

**Esercizio 171** Si consideri la relazione di equivalenza in  $M(R, n, n)$  data da  $A \sim B \iff \det(A) = \det(B)$  (esempio 108). Verificare che esiste una funzione biunivoca tra  $M(R, n, n)/\sim$  e  $R$ .

**Esercizio 172** Si consideri in  $R^2 - \{(0, 0)\}$ , dato dalle coppie di numeri reali non entrambi nulli, la seguente relazione:

$$(a, b) \sim (a', b') \iff a' = ha, \quad b' = hb \quad \text{con } h \in R^*.$$

Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza e che esiste una funzione biunivoca tra il suo insieme quoziente e l'insieme quoziente dell'esempio 91.

**Esercizio 173** Dimostrare che esiste una funzione biunivoca tra l'insieme quoziente dell'esempio 99 e l'insieme  $Q$  dei numeri razionali.

**Esercizio 174** Si consideri il sottoinsieme di  $R^3$  dato dalle terne  $(a, b, c)$  tali che  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Si consideri in esso la seguente relazione di equivalenza:

$$(a, b, c) \sim (a', b', c') \iff a' = ha, \quad b' = hb, \quad c' = hc \text{ con } h \in R^*$$

Dimostrare che esiste un funzione biunivoca tra l'insieme quoziente e l'insieme delle rette di un piano.

## 1.11 Decomposizione di funzioni

Sia data una funzione tra insiemi  $f : A \longrightarrow B$ . Vogliamo sostituire la funzione  $f$  con una composizione di funzioni in modo tale che ognuna di tali funzioni sia o iniettiva, o surgettiva o biunivoca. Più precisamente vogliamo costruire un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow \pi & & \uparrow i \\ A/\sim & \xrightarrow{g} & B' \end{array}$$

dove:

la funzione  $\pi : A \longrightarrow A/\sim$  è la funzione quoziente e quindi è surgettiva;

la funzione  $g : A/\sim \longrightarrow B'$  è biunivoca;

$B' \subset B$ ; la funzione  $i : B' \longrightarrow B$  è l'inclusione e quindi è iniettiva.

Consideriamo, a tal fine, la seguente relazione in  $A$ :

$$a \sim a' \iff f(a) = f(a')$$

Si verifica facilmente (esercizio) che tale relazione è di equivalenza. Dal teorema 165 segue che la funzione  $f$  passa al quoziente.

Sia  $g : A/\sim \longrightarrow B$  la funzione quozientata. Si ha cioè:

$$g([a]) = f(a)$$

Si ha inoltre:

$$f = g \circ \pi$$

Dimostriamo che la funzione  $g$  è iniettiva. Sia  $g([a]) = g([a'])$ . Ciò implica  $f(a) = f(a')$ . Dalla definizione di  $\sim$  segue  $a \sim a'$  e quindi  $[a] = [a']$ .

La funzione  $g : A/\sim \longrightarrow B$  non è necessariamente surgettiva poiché la funzione  $f$  non è necessariamente surgettiva (vedere 169).

Sia allora  $B' = f(A) = g(A/\sim)$ . La funzione  $g : A/\sim \longrightarrow B'$  ora è ovviamente surgettiva e quindi è biunivoca.

Sia  $i : B' \longrightarrow B$  la funzione inclusione. Si verifica facilmente che si ha:

$$f = i \circ g \circ \pi$$

Abbiamo quindi dimostrato il seguente:

**Teorema 175** [Teorema di decomposizione] Data una funzione tra insiemi  $f : A \longrightarrow B$ , sia  $B' = f(A)$ .

1) la relazione  $\sim$  in  $A$  definita da:

$$a \sim a' \iff f(a) = f(a')$$

è una relazione di equivalenza.

2) La funzione  $f$  passa al quoziente relativamente a tale relazione.

3) La funzione  $g : A/\sim \longrightarrow B'$  definita da:

$$g([a]) = f(a)$$

è una corrispondenza biunivoca.

4) Si ha:

$$f = i \circ g \circ \pi$$

dove:

$\pi : A \longrightarrow A/\sim$  è la funzione quoziente  $\pi(a) = [a]$  e quindi è surgettiva;

$i : B' \longrightarrow B$  è la funzione inclusione  $i(b') = b'$  e quindi è iniettiva.

DIMOSTRAZIONE. Vedere sopra.  $\square$

**Esercizio 176** Sia  $A$  l'insieme degli studenti che hanno risposto alla nostra indagine. Sia  $f : A \longrightarrow N \cup \{0\}$  la legge che associa ad ogni studente il numero di esami del primo anno superati. Decomporre la funzione  $f$  così come indicato nel teorema 175.

**Esercizio 177** Sia  $f : Z \longrightarrow Z$  la funzione definita da  $f(a) = a^2 \quad \forall a \in Z$ . Decomporre la funzione  $f$  così come indicato nel teorema 175.

**Esercizio 178** Sia  $f : R^2 \longrightarrow R^2$  la funzione definita da  $f[(a, b)] = (a, 0) \quad \forall (a, b) \in R^2$ . Decomporre la funzione  $f$  così come indicato nel teorema 175.

Dato inoltre un piano con un sistema di riferimento cartesiano, si pensi  $R^2$  come l'insieme dei punti del piano. Dare un'interpretazione geometrica della funzione  $f$  e della sua decomposizione.

**Esercizio 179** Sia  $f : N \longrightarrow N$  la funzione definita da  $f(a) = 2a \quad \forall a \in N$ . Decomporre la funzione  $f$  così come indicato nel teorema 175.

**Esercizio 180** Sia  $f : R \longrightarrow R$  la funzione definita da  $f(a) = \sin(a) \quad \forall a \in R$ . Decomporre la funzione  $f$  così come indicato nel teorema 175.



**Esercizio 181** Sia  $U$  un insieme avente cardinalità 100.

Sia  $f : P(U) \longrightarrow N \cup \{0\}$  la funzione che associa ad ogni sottoinsieme di  $U$  la sua cardinalità. Decomporre la funzione  $f$  così come indicato nel teorema 175.

**Esercizio 182** Si consideri la funzione  $f : R \longrightarrow R$  la funzione che associa ad ogni numero reale la sua parte intera. Decomporre la funzione  $f$  così come indicato nel teorema 175.

**Esercizio 183** Si consideri la funzione  $r : R \longrightarrow R$  la funzione che associa ad ogni numero reale il suo arrotondamento. Decomporre la funzione  $r$  così come indicato nel teorema 175.

## 1.12 Bibliografia

1) **I.Cattaneo Gasparini** *Strutture algebriche, operatori lineari*, Masson editoriale Veschi.

Libro, di circa 250 pagine, contenente buona parte degli argomenti trattati nel corso. In particolare il primo capitolo è dedicato agli argomenti da noi esaminati in questo capitolo.

2) **I.Cattaneo Gasparini, G.Selmi** *Esercizi di algebra lineare con applicazioni alle funzioni di matrici e ai sistemi differenziali*, Masson editoriale Veschi.

La prima metà del primo capitolo contiene esercizi risolti sugli insiemi e sulle funzioni tra insiemi.

3) **P.Maroscia** *Problemi di geometria*, Masson editoriale Veschi.

Libro di circa 350 pagine di esercizi, per la maggior parte svolti, che coprono quasi tutti gli argomenti svolti nel corso. Il primo capitolo è dedicato agli argomenti da noi trattati in questo capitolo.

4) **B.Scimemi** *Algebretta* decibel editrice.

È un libro piccolo (quindi economico) di circa 50 pagine suddiviso in 15 capitoli. I primi due capitoli sono dedicati agli insiemi e alle funzioni tra insiemi.

5) **B.Scimemi** *Gruppi*, decibel editrice.

Anche questo è un libro piccolo ed economico di circa 50 pagine.

È composto da 12 paragrafi. I primi tre sono dedicati alle relazioni, alle relazioni d'ordine e alle congruenze.

6) **M.Fontana, S.Gabelli** *Insiemi, numeri e polinomi*, CISU.

È un libro di circa 330 pagine la maggior parte delle quali è dedicato ad esercizi tutti risolti. È suddiviso in 12 capitoli. Il capitolo 1 è dedicato agli insiemi. I capitoli 5 e 6 alle relazioni e agli insiemi quozienti. I capitoli 8,9 alle funzioni tra insiemi. Il capitolo 11 alle relazioni d'ordine.

7) **R. Procesi Ciampi, R.Rota** *Algebra moderna. Esercizi*, Masson editoriale Veschi.

Libro di circa 200 pagine di esercizi risolti.

Il primo capitolo è dedicato agli insiemi e alle funzioni tra insiemi. Il secondo alle relazioni di equivalenza e agli insiemi quozienti. Il terzo agli insiemi numerici. L'ottavo alle relazioni d'ordine.