

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
PROVA SCRITTA DEL 22 FEBBRAIO 2000
Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti

N. B.: è necessario descrivere esplicitamente i procedimenti seguiti. Le risposte non sufficientemente motivate, anche se esatte, verranno considerate come non date. Si tenga in particolare considerazione questa avvertenza nello svolgimento del quarto esercizio.

PRIMO ESERCIZIO [7 punti]

Determinare la cardinalità dei seguenti sottoinsiemi di \mathbf{Z}^2 :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1 - x^2\}, \\ A_2 &= \{(x, y) \mid 0 \leq y \text{ e } 1 - x^2 < y \leq 2 - 2x^2\}, \\ A_3 &= \{(x, y) \mid 0 \leq y \text{ e } 2 - 2x^2 < y\}. \end{aligned}$$

SECONDO ESERCIZIO [7 punti]

Sia f l'endomorfismo del gruppo $(M(2, \mathbf{Z}_2), +)$ definito da $f(A) = A + {}^t A$.

1. Determinare $\ker f$, $\text{Im } f$ e i rispettivi ordini.
2. Indicato con g l'isomorfismo tra $M(2, \mathbf{Z}_2) / \ker f$ e $\text{Im } f$ indotto da f determinare

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & g \left(\begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [1]_2 \end{pmatrix} + \ker f \right), \\ \text{(b)} \quad & g \left(\begin{pmatrix} [1]_2 & [0]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{pmatrix} + \ker f \right), \\ \text{(c)} \quad & g \left(\begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [0]_2 \end{pmatrix} + \ker f \right). \end{aligned}$$

TERZO ESERCIZIO [8 punti]

Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Si determini la forma canonica di Jordan J di A e si trovi una matrice invertibile M tale che $J = M^{-1}AM$.
2. Si calcoli, se possibile, \sqrt{A} , $\log A$ e $\cos A$.

QUARTO ESERCIZIO [8 punti]

Si consideri la matrice a coefficienti in \mathbf{Z}_p dove p è un numero primo:

$$A = \begin{pmatrix} [1]_p & [2]_p & [4]_p & [3]_p & [3]_p \\ [2]_p & [0]_p & [1]_p & [3]_p & [2]_p \\ [3]_p & [4]_p & [1]_p & [0]_p & [1]_p \end{pmatrix}.$$

1. Si determini il rango di A nel caso in cui $p = 2$.
2. Si determini il rango di A nel caso in cui $p = 3$.
3. Si determini il rango di A in dipendenza dal numero primo p .

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
RISOLUZIONE DEL TEMA D'ESAME DEL 22 FEBBRAIO 2000

PRIMO ESERCIZIO

1. Determiniamo la cardinalità di A_1 . La condizione $1 - x^2 \geq 0$ implica che $-1 \leq x \leq 1$. Determiniamo allora gli elementi del tipo (x, y) in A_1 per $x = -1, 0, 1$. Per $x = -1$ o $x = 1$ si ha che $0 \leq y \leq 0$ ovvero $y = 0$. Dunque abbiamo gli elementi $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. Per $x = 0$ si ha $0 \leq y \leq 1$, ovvero abbiamo i due elementi $(0, 0)$ e $(0, 1)$. Pertanto $|A_1| = 4$.
2. Determiniamo la cardinalità di A_2 . La condizione $2 - 2x^2 \geq y$ unita alla condizione $y \geq 0$ implica che $2 - 2x^2 \geq 0$ ovvero $-1 \leq x \leq 1$. Determiniamo allora gli elementi del tipo (x, y) in A_2 per $x = -1, 0, 1$. Per $x = -1$ o $x = 1$ si ha che $0 \leq y \leq 0$ e $0 < y \leq 0$. Dunque non ci sono elementi in A_2 la cui prima componente è -1 o 1 . Per $x = 0$ si ha, invece, $0 \leq y, 1 < y \leq 2$, il che implica $y = 2$. Pertanto A_2 è formato dal solo elemento $(0, 2)$ e, dunque, ha cardinalità 1.
3. Determiniamo la cardinalità di A_3 . Osserviamo che A_3 contiene gli infiniti elementi del tipo $(0, y)$ con $y > 2$. Poiché \mathbf{Z}^2 ha la cardinalità numerabile, ogni suo insieme infinito ha la cardinalità del numerabile. Pertanto $|A_3| = \aleph_0$.

Nella risoluzione di questo esercizio poteva essere utile considerare gli insiemi come sottoinsiemi del piano cartesiano formati da punti a coordinate intere contenuti in determinate regioni di piano. Tramite questa interpretazione A_1 allora è formato dai punti a coordinate intere al di sopra dell'asse delle x e al di sotto della parabola di equazione $y = 1 - x^2$, è formato dai punti a coordinate intere compresi tra le parabole di equazione $y = 1 - x^2$ e $y = 2 - 2x^2$, mentre A_3 è formato dai punti a coordinate intere al di sopra dell'asse delle x e della parabola delle e la parabola di equazione $y = 2 - 2x^2$.

SECONDO ESERCIZIO

1. Consideriamo una generica matrice di $M(2, \mathbf{Z}_2)$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

e calcoliamo $f(A)$:

$$f(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0]_2 & b+c \\ b+c & [0]_2 \end{pmatrix},$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\text{car } \mathbf{Z}_2 = 2$, e, dunque $a + a = b + b = [0]_2$. Vediamo allora che $A \in \ker f$ se e solo se $b + c = [0]_2$, ovvero se e solo se $b = c$. Dunque:

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbf{Z}_2 \right\}.$$

Poiché i parametri a , b e d variano in \mathbf{Z}_2 vediamo inoltre che $\ker f$ ha $2^3 = 8$ elementi. Per quanto riguarda $\operatorname{Im} f$ dal calcolo dell'immagine della matrice generica vediamo che tutte le matrici di $\operatorname{Im} f$ sono del tipo

$$M_b = \begin{pmatrix} [0]_2 & b \\ b & [0]_2 \end{pmatrix}$$

e, viceversa, la generica matrice M_b di questo tipo si ottiene, ad esempio, come immagine della matrice

$$\begin{pmatrix} [0]_2 & b \\ [0]_2 & [0]_2 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} [0]_2 & b \\ b & [0]_2 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbf{Z}_2 \right\}.$$

Poiché il parametro b varia in \mathbf{Z}_2 vediamo inoltre che $\operatorname{Im} f$ ha 2 elementi.

2. L'isomorfismo g è definito dalla relazione:

$$g(A + \ker f) = f(A).$$

Pertanto si ha:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad g \left(\begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [1]_2 \end{pmatrix} + \ker f \right) &= f \left(\begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [1]_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} [0]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [0]_2 \end{pmatrix}, \\ \text{(b)} \quad g \left(\begin{pmatrix} [1]_2 & [0]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{pmatrix} + \ker f \right) &= f \left(\begin{pmatrix} [1]_2 & [0]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} [0]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [0]_2 \end{pmatrix}, \\ \text{(c)} \quad g \left(\begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [0]_2 \end{pmatrix} + \ker f \right) &= f \left(\begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [0]_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} [0]_2 & [0]_2 \\ [0]_2 & [0]_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

TERZO ESERCIZIO

1. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A :

$$f_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 2 & 1 \\ -1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & -2 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3.$$

Dunque A ha come unico autovalore 0 di molteplicità algebrica 3. Indichiamo con η_0 l'endomorfismo di \mathbf{R}^3 che rispetto alla base canonica si rappresenta con la matrice $A - 0 \cdot I = A$ e calcoliamo le immagini dei vettori della base canonica tramite le potenze successive di η_0 , fino ad arrivare a un intero i tale che $\dim \ker \eta_0^i = \operatorname{ma}(0) = 3$, ovvero $\dim \operatorname{Im} \eta_0^i = 0$:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e}_1 & \longrightarrow & -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 & \longrightarrow & 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_3 & \longrightarrow & \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 & \longrightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$

Notiamo che si ha $\dim \operatorname{Im} \eta_0 = 1$, ovvero $\dim \ker \eta_0 = 2$. Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e le seguenti catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 2 & < & 3 \\ \{0\} & \subset & \ker \eta_0 & \subset & \ker \eta_0^2 \\ 0 & \leftarrow & \mathbf{v}_1 & \leftarrow & \mathbf{v}_2 \\ 0 & \leftarrow & \mathbf{v}_3 & & \end{array}$$

Occorre allora scegliere \mathbf{v}_2 in $\ker \eta_0^2 - \ker \eta_0$: ad esempio $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1$. Determiniamo così $\mathbf{v}_1 = \eta_0(\mathbf{v}_2) = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Dobbiamo ora determinare \mathbf{v}_3 in modo tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di $\ker \eta_0$. Poniamo ad esempio $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$. Consideriamo ora la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 rispetto alla base canonica. Risulta allora $M^{-1}AM = J$, dove

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice A ha come autovalore 0 di indice 2 (si ricorda che l'indice di un autovalore λ riferito a una matrice A è il minimo intero positivo i tale che $\operatorname{rk}(A - \lambda I)^i = \operatorname{rk}(A - \lambda I)^{i+1}$). Allora, affinché una funzione sia definita in A occorre e basta che la funzione e la sua derivata prima siano definite in 0. Ora se consideriamo la funzione f che manda x in \sqrt{x} , vediamo che tale funzione è definita in 0 ma la sua derivata prima non è definita in 0 (infatti $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$). Pertanto \sqrt{A} non è definita. Per quanto riguarda $\log A$, sappiamo che la funzione logaritmo non è definita in 0, e, dunque, $\log A$ non è definita. Infine \cos è definita in 0, e la sua derivata, $-\sin$, è anch'essa definita in 0. Pertanto $\cos A$ è definita. Possiamo calcolare $\cos A$ in due modi diversi:

- Calcoliamo $\cos J$: questa si ottiene nel modo seguente

$$\cos J = \begin{pmatrix} \cos 0 & \cos' 0 & 0 \\ 0 & \cos 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Ora $\cos A = M \cos J M^{-1} = I$.

- Alternativamente determiniamo il polinomio minimo di A : poiché A ha come unico autovalore 0 di indice 2, il polinomio minimo di A è x^2 . Esiste un polinomio $p(x)$ di grado minore di quello del polinomio minimo che coincide con \cos sullo spettro di A , ovvero $p(0) = \cos 0$, $p'(0) = \cos' 0$. Se $p(x) = a + bx$ (e, dunque, $p'(x) = b$) ciò significa che $a = 1$, $b = 0$. Ma allora $\cos A = p(A) = 1I + 0A = I$.

QUARTO ESERCIZIO

1. Riscriviamo più semplicemente la matrice nel caso in cui $p = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} [1]_2 & [0]_2 & [0]_2 & [1]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [0]_2 & [1]_2 & [1]_2 & [0]_2 \\ [1]_2 & [0]_2 & [1]_2 & [0]_2 & [1]_2 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che la seconda colonna è nulla e la quinta colonna è uguale alla seconda. Poiché il rango di una matrice è uguale alla dimensione dello spazio vettoriale generato dalle sue colonne, il rango di A è allora uguale al rango della matrice

$$B = \begin{pmatrix} [1]_2 & [0]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [1]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 & [0]_2 \end{pmatrix}$$

che si ottiene da A sopprimendo la seconda e la quinta colonna. Ora se calcoliamo il determinante di B otteniamo $[0]_2$: dunque B ha rango minore di 3. D'altra parte il minore formato dall'intersezione delle prime 2 righe con le prime 2 colonne di B ha, chiaramente, determinante non nullo. Pertanto B ha rango 2, e, dunque, anche il rango di A è 2.

2. Riscriviamo più semplicemente la matrice nel caso in cui $p = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} [1]_3 & [2]_3 & [1]_3 & [0]_3 & [0]_3 \\ [2]_3 & [0]_3 & [1]_3 & [0]_3 & [2]_3 \\ [0]_3 & [1]_3 & [1]_3 & [0]_3 & [1]_3 \end{pmatrix}.$$

La quarta colonna è nulla. Dunque il rango di A è uguale al rango della matrice

$$B = \begin{pmatrix} [1]_3 & [2]_3 & [1]_3 & [0]_3 \\ [2]_3 & [0]_3 & [1]_3 & [2]_3 \\ [0]_3 & [1]_3 & [1]_3 & [1]_3 \end{pmatrix}$$

che si ottiene da B sopprimendo la quarta colonna. Osserviamo che il minore formato dall'intersezione delle prime 2 righe con le prime 2 colonne di B ha determinante $[2]_3$ (ovvero non nullo). Pertanto B ha rango almeno 2 e per determinare il rango di B è sufficiente calcolare i determinanti dei minori di ordine 3 che si possono estrarre da B e che contengono il minore di ordine 2 con determinante non nullo che abbiamo appena determinato. Questi minori sono:

$$\begin{pmatrix} [1]_3 & [2]_3 & [0]_3 \\ [2]_3 & [0]_3 & [2]_3 \\ [0]_3 & [1]_3 & [1]_3 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} [1]_3 & [2]_3 & [1]_3 \\ [2]_3 & [0]_3 & [1]_3 \\ [0]_3 & [1]_3 & [1]_3 \end{pmatrix}.$$

Poiché entrambi hanno determinante nullo, ne consegue che B ha rango 2 (e, dunque, anche A ha rango 2).

3. Avendo già considerato i casi $p = 2, 3$, supponiamo che $p \geq 5$. Consideriamo il minore formato dall'intersezione delle prime 2 righe con le prime 2 colonne di A . Tale minore ha determinante $-[4]_p$; pertanto, poiché $p \neq 2$, questo minore ha determinante non nullo. Il rango di A è allora almeno 2, e per determinare il rango di A è sufficiente calcolare i determinanti dei minori di ordine 3 che si

possono estrarre da A e che contengono il minore di ordine 2 con determinante non nullo che abbiamo appena determinato. Questi minori sono:

$$\begin{pmatrix} [1]_p & [2]_p & [4]_p \\ [2]_p & [0]_p & [1]_p \\ [3]_p & [4]_p & [1]_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1]_p & [2]_p & [3]_p \\ [2]_p & [0]_p & [3]_p \\ [3]_p & [4]_p & [0]_p \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} [1]_p & [2]_p & [3]_p \\ [2]_p & [0]_p & [2]_p \\ [3]_p & [4]_p & [1]_p \end{pmatrix}.$$

Il primo minore ha determinante $[30]_p$: i primi che dividono 30 sono 2, 3 e 5. Pertanto poiché $p \neq 2, 3$ questo minore ha determinante non nullo se $p \neq 5$ e A ha rango 3. Dunque conosciamo il rango di A per tutti i valori $p \neq 5$. Per il caso $p = 5$ calcoliamo i determinanti degli altri 2 minori: questi sono, rispettivamente, $[0]_5$ e $[4]_5$: dunque c'è almeno un minore di ordine 3 con determinante non nullo e, pertanto, A ha rango 3. In conclusione A ha rango 2 se $p = 2$ o $p = 3$, ha rango 3 altrimenti.