

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
PROVA SCRITTA DEL 21 GIUGNO 2000
Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti

PRIMO ESERCIZIO [8 punti]

Si calcoli al variare di k in \mathbb{Z} la cardinalità dei sottoinsiemi di \mathbb{Z}^2 :

$$A_k := \{(x, y) \mid 3x - 2y = k\};$$

$$B_k := \{(x, y) \mid 6x - 4y = k\}.$$

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

Si consideri la matrice a coefficienti reali:

$$A_k := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

1. Si determini per quali valori di k la matrice A_k è simile a una matrice di Jordan reale;
2. si determini per quali valori di k la matrice A_k è simile a una matrice diagonale reale;
3. scelto un valore di k per cui A_k è simile a una matrice di Jordan reale ma non a una matrice diagonale reale, si determini una matrice di Jordan J e una matrice $M \in \text{GL}(4, \mathbb{R})$ tali che $J = M^{-1}AM$.

TERZO ESERCIZIO [7 punti]

Si considerino i sottoinsiemi di $\text{GL}(2, \mathbb{R})$:

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2^r \\ 2^s & 0 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Si determini se, rispetto al prodotto righe per colonne, H , K e $H \cup K$ sono gruppi, specificando, in caso affermativo se sono abeliani.

QUARTO ESERCIZIO [7 punti]

Si discuta e risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in \mathbb{Z}_{13} :

$$\begin{cases} [2]_{13}x + [5]_{13}y + [6]_{13}z & = [2]_{13} \\ [6]_{13}x & + w = [6]_{13} \\ [5]_{13}x + [8]_{13}y + [7]_{13}z + [12]_{13}w & = [5]_{13} \end{cases}$$

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
RISOLUZIONE DEL TEMA D'ESAME DEL 21 GIUGNO 2000

PRIMO ESERCIZIO

La cardinalità di \mathbb{Z}^2 è \aleph_0 : dunque gli insiemi considerati hanno cardinalità al più numerabile. Osserviamo che A_k contiene gli infiniti elementi del tipo $(k + 2t, k + 3t)$ al variare di t in \mathbb{Z} (si può anzi facilmente mostrare che A_k è formato esattamente da questi elementi). Pertanto, per ogni intero k , l'insieme A_k è infinito, ed essendo un sottoinsieme infinito di un insieme numerabile, è esso stesso numerabile.

Per quanto riguarda B_k , osserviamo che se k è dispari l'uguaglianza $6x - 4y = k$ non può essere verificata per nessuna coppia (x, y) di interi relativi. Dunque per k dispari si ha $B_k = \emptyset$, cioè $|B_k| = 0$. Per k pari, invece, notiamo che $B_k = A_{k/2}$, e, quindi, si ha $|B_k| \in \aleph_0$.

SECONDO ESERCIZIO

1. Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice sia Jordanizzabile è che il suo polinomio caratteristico sia totalmente riducibile. Il polinomio caratteristico di A_k è $\lambda^2 (\lambda^2 - k)$ che è totalmente riducibile come polinomio a coefficienti reali se e solo se $k \geq 0$. Dunque A_k è simile a una matrice di Jordan reale se e solo se $k \geq 0$.
2. Una matrice è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico è totalmente riducibile e ciascun suo autovalore ha molteplicità algebrica e geometrica coincidenti. Sappiamo già che il polinomio caratteristico di A_k è totalmente riducibile se e solo se $k \geq 0$.

Per $k > 0$ gli autovalori di A_k sono 0, di molteplicità algebrica 2, e \sqrt{k} e $-\sqrt{k}$ ciascuno con molteplicità algebrica 1. Gli autovalori di molteplicità algebrica 1 hanno necessariamente molteplicità geometrica 1: calcoliamo allora la molteplicità geometrica di 0:

$$\text{mg}_{A_k}(0) = 4 - \text{rk}(A_k - 0 \cdot I) = 2.$$

Dunque per $k > 0$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

Consideriamo ora il caso $k = 0$: la matrice A_0 ha come unico autovalore 0 con molteplicità algebrica 4. La matrice A_0 non è allora diagonalizzabile perché, altrimenti, sarebbe simile alla matrice nulla, ma la matrice nulla è simile solo a se stessa. Alternativamente possiamo calcolare la molteplicità geometrica di 0 come autovalore di A_0 :

$$\text{mg}_{A_0}(0) = 4 - \text{rk}(A_0 - 0 \cdot I) = 2,$$

e dedurre che A_0 non è diagonalizzabile.

In conclusione la matrice A_k è simile a una matrice diagonale reale se e solo se $k > 0$.

3. Dalla discussione dei punti precedenti segue che A_k è simile a una matrice di Jordan reale ma non a una matrice diagonale reale solo per $k = 0$. Consideriamo allora la matrice:

$$A_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che A_0 ha come unico autovalore 0 con molteplicità algebrica 4. Sia θ l'endomorfismo di \mathbb{R}^4 la cui matrice rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ di \mathbb{R}^4 sia A_0 , e sia $\theta_0 = \theta - 0I = \theta$. Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite le potenze successive di θ_0 (dobbiamo proseguire fino a che troviamo una potenza θ_0^i tale che $\dim \ker \theta_0^i = \text{ma}(0) = 4$, ovvero $\dim \text{Im } \theta_0^i = 0$):

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow & \mathbf{e}_4 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_4 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$

Si nota facilmente che $\dim \text{Im } \theta_0 = 2$, $\dim \text{Im } \theta_0^2 = 1$ e $\dim \text{Im } \theta_0^3 = 0$, e, dunque $\dim \ker \theta_0 = 2$, $\dim \ker \theta_0^2 = 3$ e $\dim \ker \theta_0^3 = 4$. Poiché $\text{mg}(0) = \dim \ker \theta_0 = 2$ avremo 2 blocchi di Jordan relativi all'autovalore 0. Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e le seguenti catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 2 & < & 3 & < & 4 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \theta_0 & \subset & \ker \theta_0^2 & \subset & \ker \theta_0^3 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{v}_1 & \leftarrow & \mathbf{v}_2 & \leftarrow & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{v}_4 & & & & \end{array}$$

Occorre allora scegliere \mathbf{v}_3 in $\ker \theta_0^3 - \ker \theta_0^2$: ad esempio scegliamo $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3$. Determiniamo così $\mathbf{v}_2 = \theta_0(\mathbf{v}_3) = \mathbf{e}_4$ e $\mathbf{v}_1 = \theta_0(\mathbf{v}_2) = \mathbf{e}_1$. Dobbiamo inoltre scegliere \mathbf{v}_4 in $\ker \theta_0$ tale che \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_4 formino una base per $\ker \theta_0$: ad esempio scegliamo $\mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4$. Consideriamo ora la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 e \mathbf{v}_4 rispetto alla base canonica. Risulta allora $M^{-1}AM = J$, dove

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

TERZO ESERCIZIO

Gli insiemi H , K e $H \cup K$ sono sottoinsiemi del gruppo $\text{GL}(2, \mathbb{R})$: pertanto, per determinare se sono gruppi rispetto all'operazione assegnata è sufficiente verificare se sono non vuoti, chiusi rispetto al prodotto e se contengono l'inverso di ciascun proprio elemento.

1. Consideriamo allora H : date due matrici

$$\begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 2^{m'} & 0 \\ 0 & 2^{n'} \end{pmatrix}$$

il loro prodotto è

$$\begin{pmatrix} 2^{m+m'} & 0 \\ 0 & 2^{n+n'} \end{pmatrix}$$

che è una matrice di H che è, dunque, chiuso rispetto al prodotto. L'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

è la matrice

$$\begin{pmatrix} 2^{-m} & 0 \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix}$$

che è ancora una matrice di H . Pertanto H è un sottogruppo di $\text{GL}(2, \mathbb{R})$. Osserviamo inoltre che

$$\begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{m'} & 0 \\ 0 & 2^{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{m+m'} & 0 \\ 0 & 2^{n+n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{m'} & 0 \\ 0 & 2^{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

e, quindi, H è un gruppo abeliano.

2. Siano ora date due generiche matrici di K :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2^r \\ 2^s & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 2^{r'} \\ 2^{s'} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il loro prodotto

$$\begin{pmatrix} 2^{r+s'} & 0 \\ 0 & 2^{s+r'} \end{pmatrix}$$

non è una matrice di K , che, quindi, non è chiuso rispetto al prodotto e non è, pertanto, un gruppo.

3. Consideriamo ora $H \cup K$. Per stabilire se questo insieme è chiuso rispetto al prodotto occorre analizzare diversi casi: sappiamo già che il prodotto di due matrici entrambe in H o entrambe in K appartiene a H (e, quindi, a $H \cup K$). Consideriamo allora una matrice

$$M := \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

di H e una matrice

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 2^r \\ 2^s & 0 \end{pmatrix}$$

di K e calcoliamo i prodotti MN e NM :

$$MN = \begin{pmatrix} 0 & 2^{m+r} \\ 2^{n+s} & 0 \end{pmatrix},$$

$$NM = \begin{pmatrix} 0 & 2^{r+n} \\ 2^{s+m} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque MN e NM appartengono a K , e, quindi, a $H \cup K$. In conclusione $H \cup K$ è chiuso rispetto al prodotto. Poiché $MN \neq NM$ se $m \neq n$, notiamo altresì che il prodotto di $H \cup K$ non è commutativo.

Sappiamo inoltre che l'inversa di una matrice di H appartiene a H (e, quindi, a $H \cup K$), mentre l'inversa della matrice generica

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 2^r \\ 2^s & 0 \end{pmatrix}$$

di K è

$$\begin{pmatrix} 0 & 2^{-s} \\ 2^{-r} & 0 \end{pmatrix}$$

che è una matrice di K , quindi, di $H \cup K$. Pertanto $H \cup K$ contiene l'inversa di ciascuna sua matrice. In conclusione $H \cup K$ è un gruppo non abeliano (abbiamo già osservato che il prodotto non è commutativo).

QUARTO ESERCIZIO

La matrice del sistema è:

$$A = \begin{pmatrix} [2]_{13} & [5]_{13} & [6]_{13} & [0]_{13} \\ [6]_{13} & [0]_{13} & [0]_{13} & [1]_{13} \\ [5]_{13} & [8]_{13} & [7]_{13} & [12]_{13} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamone il rango: il minore formato dall'intersezione delle prime 2 righe con le prime 2 colonne

$$\begin{pmatrix} [2]_{13} & [5]_{13} \\ [6]_{13} & [0]_{13} \end{pmatrix}$$

ha determinante $[9]_{13}$ che è non nullo. Consideriamo allora i due minori di ordine 3 contenenti il minore di ordine 2 appena determinato e che si possono estrarre dalla matrice A :

$$\begin{pmatrix} [2]_{13} & [5]_{13} & [6]_{13} \\ [6]_{13} & [0]_{13} & [0]_{13} \\ [5]_{13} & [8]_{13} & [7]_{13} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} [2]_{13} & [5]_{13} & [0]_{13} \\ [6]_{13} & [0]_{13} & [1]_{13} \\ [5]_{13} & [8]_{13} & [12]_{13} \end{pmatrix}.$$

Entrambe questi due minori hanno determinante nullo. Pertanto il rango di A è 2. Consideriamo ora la matrice completa del sistema:

$$A^* = \begin{pmatrix} [2]_{13} & [5]_{13} & [6]_{13} & [0]_{13} & [2]_{13} \\ [6]_{13} & [0]_{13} & [0]_{13} & [1]_{13} & [6]_{13} \\ [5]_{13} & [8]_{13} & [7]_{13} & [12]_{13} & [5]_{13} \end{pmatrix}.$$

Si può osservare che l'ultima colonna è uguale alla prima e, pertanto, il rango di A^* è uguale al rango di A . Alternativamente, per determinare il rango di A^* è sufficiente calcolare il determinante dei minori di ordine 3 contenenti il minore di ordine 2 con determinante non nullo precedentemente determinato. Due di questi minori sono anche minori di A e perciò il loro determinante è già stato calcolato. È pertanto sufficiente calcolare il determinante del minore:

$$\begin{pmatrix} [2]_{13} & [5]_{13} & [2]_{13} \\ [6]_{13} & [0]_{13} & [6]_{13} \\ [5]_{13} & [8]_{13} & [5]_{13} \end{pmatrix}.$$

Poiché questo determinante è nullo possiamo concludere che il rango di A^* è 2. Dal momento che $\text{rk } A = \text{rk } A^* = 2$, dal teorema di Rouché-Capelli segue che il sistema è risolubile e le soluzioni dipendono da (numero di incognite)-(rango della matrice) = $4 - 2 = 2$ parametri. Il sistema è equivalente al sistema formato dalle equazioni individuate da un minore di A con determinante non nullo di ordine massimo (ad esempio quello già determinato formato dall'intersezione delle prime 2 righe con le prime 2 colonne). Dunque il sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} [2]_{13} x + [5]_{13} y + [6]_{13} z & = [2]_{13} \\ [6]_{13} x & + w = [6]_{13} \end{cases}$$

Scegliendo x e z come parametri possiamo ora ricavare y dalla prima equazione e w dalla seconda:

$$\begin{cases} y & = [3]_{13} + [10]_{13} x + [4]_{13} z \\ w & = [6]_{13} + [7]_{13} x \end{cases}$$

dove abbiamo utilizzato la relazione $[5]_{13}^{-1} = [8]_{11}$.