

**ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA**  
**INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)**  
**PROVA SCRITTA DEL 21 GIUGNO 2000**  
**Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti**

**PRIMO ESERCIZIO [8 punti]**

Si calcoli al variare di  $k$  in  $\mathbb{Z}$  la cardinalità dei sottoinsiemi di  $\mathbb{Z}^2$ :

$$A_k := \{(x, y) \mid 3x - 2y = k\};$$

$$B_k := \{(x, y) \mid 6x - 4y = k\}.$$

**SECONDO ESERCIZIO [8 punti]**

Si consideri la matrice a coefficienti reali:

$$A_k := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove  $k$  è un parametro reale.

1. Si determini per quali valori di  $k$  la matrice  $A_k$  è simile a una matrice di Jordan reale;
2. si determini per quali valori di  $k$  la matrice  $A_k$  è simile a una matrice diagonale reale;
3. scelto un valore di  $k$  per cui  $A_k$  è simile a una matrice di Jordan reale ma non a una matrice diagonale reale, si determini una matrice di Jordan  $J$  e una matrice  $M \in \text{GL}(4, \mathbb{R})$  tali che  $J = M^{-1}AM$ .

**TERZO ESERCIZIO [7 punti]**

Si considerino i sottoinsiemi di  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ :

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2^r \\ 2^s & 0 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Si determini se, rispetto al prodotto righe per colonne,  $H$ ,  $K$  e  $H \cup K$  sono gruppi, specificando, in caso affermativo se sono abeliani.

**QUARTO ESERCIZIO [7 punti]**

Si discuta e risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in  $\mathbb{Z}_{13}$ :

$$\begin{cases} [2]_{13}x + [5]_{13}y + [6]_{13}z & = [2]_{13} \\ [6]_{13}x & + w = [6]_{13} \\ [5]_{13}x + [8]_{13}y + [7]_{13}z + [12]_{13}w & = [5]_{13} \end{cases}$$

**ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA**  
**INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)**  
**RISOLUZIONE DEL TEMA D'ESAME DEL 21 GIUGNO 2000**

**PRIMO ESERCIZIO**

La cardinalità di  $\mathbb{Z}^2$  è  $\aleph_0$ : dunque gli insiemi considerati hanno cardinalità al più numerabile. Osserviamo che  $A_k$  contiene gli infiniti elementi del tipo  $(k + 2t, k + 3t)$  al variare di  $t$  in  $\mathbb{Z}$  (si può anzi facilmente mostrare che  $A_k$  è formato esattamente da questi elementi). Pertanto, per ogni intero  $k$ , l'insieme  $A_k$  è infinito, ed essendo un sottoinsieme infinito di un insieme numerabile, è esso stesso numerabile.

Per quanto riguarda  $B_k$ , osserviamo che se  $k$  è dispari l'uguaglianza  $6x - 4y = k$  non può essere verificata per nessuna coppia  $(x, y)$  di interi relativi. Dunque per  $k$  dispari si ha  $B_k = \emptyset$ , cioè  $|B_k| = 0$ . Per  $k$  pari, invece, notiamo che  $B_k = A_{k/2}$ , e, quindi, si ha  $|B_k| \in \aleph_0$ .

**SECONDO ESERCIZIO**

1. Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice sia Jordanizzabile è che il suo polinomio caratteristico sia totalmente riducibile. Il polinomio caratteristico di  $A_k$  è  $\lambda^2(\lambda^2 - k)$  che è totalmente riducibile come polinomio a coefficienti reali se e solo se  $k \geq 0$ . Dunque  $A_k$  è simile a una matrice di Jordan reale se e solo se  $k \geq 0$ .
2. Una matrice è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico è totalmente riducibile e ciascun suo autovalore ha molteplicità algebrica e geometrica coincidenti. Sappiamo già che il polinomio caratteristico di  $A_k$  è totalmente riducibile se e solo se  $k \geq 0$ .

Per  $k > 0$  gli autovalori di  $A_k$  sono 0, di molteplicità algebrica 2, e  $\sqrt{k}$  e  $-\sqrt{k}$  ciascuno con molteplicità algebrica 1. Gli autovalori di molteplicità algebrica 1 hanno necessariamente molteplicità geometrica 1: calcoliamo allora la molteplicità geometrica di 0:

$$\text{mg}_{A_k}(0) = 4 - \text{rk}(A_k - 0 \cdot I) = 2.$$

Dunque per  $k > 0$  la matrice  $A_k$  è diagonalizzabile.

Consideriamo ora il caso  $k = 0$ : la matrice  $A_0$  ha come unico autovalore 0 con molteplicità algebrica 4. La matrice  $A_0$  non è allora diagonalizzabile perché, altrimenti, sarebbe simile alla matrice nulla, ma la matrice nulla è simile solo a se stessa. Alternativamente possiamo calcolare la molteplicità geometrica di 0 come autovalore di  $A_0$ :

$$\text{mg}_{A_0}(0) = 4 - \text{rk}(A_0 - 0 \cdot I) = 2,$$

e dedurre che  $A_0$  non è diagonalizzabile.

In conclusione la matrice  $A_k$  è simile a una matrice diagonale reale se e solo se  $k > 0$ .

3. Dalla discussione dei punti precedenti segue che  $A_k$  è simile a una matrice di Jordan reale ma non a una matrice diagonale reale solo per  $k = 0$ . Consideriamo allora la matrice:

$$A_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che  $A_0$  ha come unico autovalore 0 con molteplicità algebrica 4. Sia  $\theta$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^4$  la cui matrice rispetto alla base canonica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$  di  $\mathbb{R}^4$  sia  $A_0$ , e sia  $\theta_0 = \theta - 0I = \theta$ . Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite le potenze successive di  $\theta_0$  (dobbiamo proseguire fino a che troviamo una potenza  $\theta_0^i$  tale che  $\dim \ker \theta_0^i = \text{ma}(0) = 4$ , ovvero  $\dim \text{Im } \theta_0^i = 0$ ):

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow & \mathbf{e}_4 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_4 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$

Si nota facilmente che  $\dim \text{Im } \theta_0 = 2$ ,  $\dim \text{Im } \theta_0^2 = 1$  e  $\dim \text{Im } \theta_0^3 = 0$ , e, dunque  $\dim \ker \theta_0 = 2$ ,  $\dim \ker \theta_0^2 = 3$  e  $\dim \ker \theta_0^3 = 4$ . Poiché  $\text{mg}(0) = \dim \ker \theta_0 = 2$  avremo 2 blocchi di Jordan relativi all'autovalore 0. Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e le seguenti catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 2 & < & 3 & < & 4 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \theta_0 & \subset & \ker \theta_0^2 & \subset & \ker \theta_0^3 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{v}_1 & \leftarrow & \mathbf{v}_2 & \leftarrow & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{v}_4 & & & & \end{array}$$

Occorre allora scegliere  $\mathbf{v}_3$  in  $\ker \theta_0^3 - \ker \theta_0^2$ : ad esempio scegliamo  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3$ . Determiniamo così  $\mathbf{v}_2 = \theta_0(\mathbf{v}_3) = \mathbf{e}_4$  e  $\mathbf{v}_1 = \theta_0(\mathbf{v}_2) = \mathbf{e}_1$ . Dobbiamo inoltre scegliere  $\mathbf{v}_4$  in  $\ker \theta_0$  tale che  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_4$  formino una base per  $\ker \theta_0$ : ad esempio scegliamo  $\mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4$ . Consideriamo ora la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  e  $\mathbf{v}_4$  rispetto alla base canonica. Risulta allora  $M^{-1}AM = J$ , dove

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### TERZO ESERCIZIO

Gli insiemi  $H$ ,  $K$  e  $H \cup K$  sono sottoinsiemi del gruppo  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ : pertanto, per determinare se sono gruppi rispetto all'operazione assegnata è sufficiente verificare se sono non vuoti, chiusi rispetto al prodotto e se contengono l'inverso di ciascun proprio elemento.

1. Consideriamo allora  $H$ : date due matrici

$$\begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 2^{m'} & 0 \\ 0 & 2^{n'} \end{pmatrix}$$

il loro prodotto è

$$\begin{pmatrix} 2^{m+m'} & 0 \\ 0 & 2^{n+n'} \end{pmatrix}$$

che è una matrice di  $H$  che è, dunque, chiuso rispetto al prodotto. L'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

è la matrice

$$\begin{pmatrix} 2^{-m} & 0 \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix}$$

che è ancora una matrice di  $H$ . Pertanto  $H$  è un sottogruppo di  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ . Osserviamo inoltre che

$$\begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{m'} & 0 \\ 0 & 2^{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{m+m'} & 0 \\ 0 & 2^{n+n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{m'} & 0 \\ 0 & 2^{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

e, quindi,  $H$  è un gruppo abeliano.

2. Siano ora date due generiche matrici di  $K$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2^r \\ 2^s & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 2^{r'} \\ 2^{s'} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il loro prodotto

$$\begin{pmatrix} 2^{r+s'} & 0 \\ 0 & 2^{s+r'} \end{pmatrix}$$

non è una matrice di  $K$ , che, quindi, non è chiuso rispetto al prodotto e non è, pertanto, un gruppo.

3. Consideriamo ora  $H \cup K$ . Per stabilire se questo insieme è chiuso rispetto al prodotto occorre analizzare diversi casi: sappiamo già che il prodotto di due matrici entrambe in  $H$  o entrambe in  $K$  appartiene a  $H$  (e, quindi, a  $H \cup K$ ). Consideriamo allora una matrice

$$M := \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

di  $H$  e una matrice

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 2^r \\ 2^s & 0 \end{pmatrix}$$

di  $K$  e calcoliamo i prodotti  $MN$  e  $NM$ :

$$MN = \begin{pmatrix} 0 & 2^{m+r} \\ 2^{n+s} & 0 \end{pmatrix},$$
$$NM = \begin{pmatrix} 0 & 2^{r+n} \\ 2^{s+m} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque  $MN$  e  $NM$  appartengono a  $K$ , e, quindi, a  $H \cup K$ . In conclusione  $H \cup K$  è chiuso rispetto al prodotto. Poiché  $MN \neq NM$  se  $m \neq n$ , notiamo altresì che il prodotto di  $H \cup K$  non è commutativo.

Sappiamo inoltre che l'inversa di una matrice di  $H$  appartiene a  $H$  (e, quindi, a  $H \cup K$ ), mentre l'inversa della matrice generica

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 2^r \\ 2^s & 0 \end{pmatrix}$$

di  $K$  è

$$\begin{pmatrix} 0 & 2^{-s} \\ 2^{-r} & 0 \end{pmatrix}$$

che è una matrice di  $K$ , quindi, di  $H \cup K$ . Pertanto  $H \cup K$  contiene l'inversa di ciascuna sua matrice. In conclusione  $H \cup K$  è un gruppo non abeliano (abbiamo già osservato che il prodotto non è commutativo).

#### QUARTO ESERCIZIO

La matrice del sistema è:

$$A = \begin{pmatrix} [2]_{13} & [5]_{13} & [6]_{13} & [0]_{13} \\ [6]_{13} & [0]_{13} & [0]_{13} & [1]_{13} \\ [5]_{13} & [8]_{13} & [7]_{13} & [12]_{13} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamone il rango: il minore formato dall'intersezione delle prime 2 righe con le prime 2 colonne

$$\begin{pmatrix} [2]_{13} & [5]_{13} \\ [6]_{13} & [0]_{13} \end{pmatrix}$$

ha determinante  $[9]_{13}$  che è non nullo. Consideriamo allora i due minori di ordine 3 contenenti il minore di ordine 2 appena determinato e che si possono estrarre dalla matrice  $A$ :

$$\begin{pmatrix} [2]_{13} & [5]_{13} & [6]_{13} \\ [6]_{13} & [0]_{13} & [0]_{13} \\ [5]_{13} & [8]_{13} & [7]_{13} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} [2]_{13} & [5]_{13} & [0]_{13} \\ [6]_{13} & [0]_{13} & [1]_{13} \\ [5]_{13} & [8]_{13} & [12]_{13} \end{pmatrix}.$$

Entrambe questi due minori hanno determinante nullo. Pertanto il rango di  $A$  è 2. Consideriamo ora la matrice completa del sistema:

$$A^* = \begin{pmatrix} [2]_{13} & [5]_{13} & [6]_{13} & [0]_{13} & [2]_{13} \\ [6]_{13} & [0]_{13} & [0]_{13} & [1]_{13} & [6]_{13} \\ [5]_{13} & [8]_{13} & [7]_{13} & [12]_{13} & [5]_{13} \end{pmatrix}.$$

Si può osservare che l'ultima colonna è uguale alla prima e, pertanto, il rango di  $A^*$  è uguale al rango di  $A$ . Alternativamente, per determinare il rango di  $A^*$  è sufficiente calcolare il determinante dei minori di ordine 3 contenenti il minore di ordine 2 con determinante non nullo precedentemente determinato. Due di questi minori sono anche minori di  $A$  e perciò il loro determinante è già stato calcolato. È pertanto sufficiente calcolare il determinante del minore:

$$\begin{pmatrix} [2]_{13} & [5]_{13} & [2]_{13} \\ [6]_{13} & [0]_{13} & [6]_{13} \\ [5]_{13} & [8]_{13} & [5]_{13} \end{pmatrix}.$$

Poiché questo determinante è nullo possiamo concludere che il rango di  $A^*$  è 2. Dal momento che  $\text{rk } A = \text{rk } A^* = 2$ , dal teorema di Rouché-Capelli segue che il sistema è risolubile e le soluzioni dipendono da (numero di incognite)-(rango della matrice) =  $4 - 2 = 2$  parametri. Il sistema è equivalente al sistema formato dalle equazioni individuate da un minore di  $A$  con determinante non nullo di ordine massimo (ad esempio quello già determinato formato dall'intersezione delle prime 2 righe con le prime 2 colonne). Dunque il sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} [2]_{13} x + [5]_{13} y + [6]_{13} z & = [2]_{13} \\ [6]_{13} x & + w = [6]_{13} \end{cases}$$

Scegliendo  $x$  e  $z$  come parametri possiamo ora ricavare  $y$  dalla prima equazione e  $w$  dalla seconda:

$$\begin{cases} y = [3]_{13} + [10]_{13} x + [4]_{13} z \\ w = [6]_{13} + [7]_{13} x \end{cases}$$

dove abbiamo utilizzato la relazione  $[5]_{13}^{-1} = [8]_{11}$ .