

**ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA**  
**INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)**  
**PROVA SCRITTA DEL 1° GIUGNO 1998**  
**Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti**

**PRIMO ESERCIZIO [8 punti]**

Sia  $A$  il sottoinsieme dell'anello  $(M(2, \mathbf{R}), +, \cdot)$  (dove  $+$  indica la somma di matrici e  $\cdot$  indica il prodotto di matrici riga per colonna) formato dalle matrici del tipo  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  con  $a, b \in \mathbf{R}$ :

1. Mostrare che  $A$  è un sottoanello di  $M(2, 2, \mathbf{R})$ .
2. Mostrare che la funzione  $f : \mathbf{C} \rightarrow A$  così definita  $f(a + ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  è un isomorfismo di anelli.
3. Dimostrare che  $A$  è un campo (Suggerimento: utilizzare il punto 2)

**SECONDO ESERCIZIO [7 punti]**

Si determini al variare del parametro  $m$  in  $\mathbf{Z}$ , la cardinalità dell'insieme

$$A_m = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}, y = mx, xy \leq 1\}.$$

**TERZO ESERCIZIO [8 punti]**

Siano date le matrici  $A$  e  $B$  di  $M(4, \mathbf{R})$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Stabilire se le matrici  $A$  e  $B$  sono simili: in caso affermativo determinare una matrice  $M \in \text{GL}(4, \mathbf{R})$  tale che  $A = M^{-1}BM$
2. Calcolare  $A^{100}$  e  $B^{100}$ .

**QUARTO ESERCIZIO [7 punti]**

Il quarto esercizio riguarda argomenti non facenti parte del programma dell'anno accademico 1999-2000.

**ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA**  
**INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)**  
**RISOLUZIONE DEL TEMA D'ESAME DEL 1° GIUGNO 1998**

**PRIMO ESERCIZIO**

1. Per verificare che  $A$  è un sottoanello di  $(M(2, \mathbf{R}), +, \cdot)$  occorre e basta verificare che  $A \neq \emptyset$ , e che per ogni  $M$  e  $N \in A$  le matrici  $M + N$ ,  $-M$  e  $MN$  appartengono ancora ad  $A$ . L'insieme  $A$  è evidentemente non vuoto, perché possiamo assegnare ai parametri  $a$  e  $b$  dei valori reali arbitrari e ottenere una matrice di  $A$ . Siano ora

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

due matrici qualunque di  $A$ . Dunque:

$$\begin{aligned} M + N &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}, \\ -M &= \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -(-b) & -a \end{pmatrix}, \\ MN &= \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sono evidentemente matrici di  $A$ .

2. Per verificare che  $f$  è un isomorfismo occorre e basta verificare che  $f$  conserva le operazioni e che  $f$  è sia iniettivo sia suriettivo.

(a) Se  $a + ib$  e  $c + id$  sono due numeri complessi allora,

$$f(a + ib + c + id) = f(a + c + i(b + d)) = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} f(a + ib) + f(c + id) &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e, pertanto  $f$  conserva la somma. Inoltre

$$f((a + ib)(c + id)) = f(ac - bd + i(ad + bc)) = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & ac-bd \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} f(a + ib) \cdot f(c + id) &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & ac-bd \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dunque  $f$  è un omomorfismo.

- (b)  $f$  è iniettivo. Se  $f(a+ib) = 0$ , allora  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , e, pertanto,  $a = b = 0$ , cioè  $a + ib = 0$ .
- (c)  $f$  è suriettivo. Se  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  è una matrice di  $A$ , allora  $A = f(a + ib)$ .
3. Per verificare che  $A$  è un campo è sufficiente notare che abbiamo verificato che  $A$  è isomorfo a  $\mathbf{C}$ . Poiché quest'ultimo è un campo anche  $A$  lo è.

## SECONDO ESERCIZIO

Si noti anzitutto che il sistema

$$\begin{cases} y &= mx \\ xy &\leq 1 \end{cases}$$

è ovviamente equivalente al seguente

$$\begin{cases} y &= mx \\ mx^2 &\leq 1 \end{cases}$$

Dunque, se indichiamo con  $B_m$  il sottoinsieme  $\{x \mid mx^2 \leq 1\}$  di  $\mathbf{Z}$ , l'applicazione  $\alpha : B_m \rightarrow A_m$  definita da  $\alpha(x) = (x, mx)$  è biunivoca e, quindi,  $|A_m| = |B_m|$ . Per  $m \leq 0$ , la disequazione  $mx^2 \leq 1$  è soddisfatta per tutti i valori  $x \in \mathbf{Z}$ . Dunque  $|A_m| = \aleph_0$ .

Per  $m = 1$  la disequazione diventa  $x^2 \leq 1$  che ha come soluzioni i valori 0, 1 e -1. Dunque  $|A_1| = 3$ .

Per  $m > 1$  la disequazione  $mx^2 \leq 1$  ha come unica soluzione  $x = 0$  (se  $x \neq 0$ , allora  $x^2 \geq 1$  e  $mx^2 > 1$ ). Dunque  $|A_m| = 1$ .

*L'esercizio poteva essere risolto anche geometricamente, considerando  $A_m$  come l'insieme dei punti a coordinate intere del piano giacenti sulla retta di equazione  $y = mx$  e compresi tra i due rami dell'iperbole di equazione  $xy = 1$ .*

## TERZO ESERCIZIO

1. Due matrici quadrate reali sono simili se e solo se, a meno di scambi di blocchi, hanno la stessa forma canonica di Jordan (eventualmente a coefficienti complessi).

Osserviamo che  $A$  è una matrice triangolare (superiore): i suoi autovalori sono gli elementi lungo la diagonale contati con le opportune molteplicità. Dunque gli autovalori di  $A$  sono  $\lambda_1 = 0$  di molteplicità algebrica 2 e  $\lambda_2 = 1$  di molteplicità algebrica 2.

Determiniamo ora la forma canonica di Jordan di  $A$ . Sappiamo che la molteplicità geometrica di un autovalore di una matrice è uguale al numero di blocchi di Jordan relativi all'autovalore presenti nella forma canonica della matrice. Ora:

$$\text{mg}_A(0) = 4 - \text{car } A = 4 - \text{car} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

e

$$\text{mg}_A(1) = 4 - \text{car}(A - I) = 4 - \text{car} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Dunque la forma canonica di Jordan di  $A$  è composta un blocco di Jordan relativo all'autovalore 0 avente dimensione 2 (cioè uguale alla molteplicità algebrica di 0) e da due blocchi di Jordan relativi all'autovalore 1 aventi ciascuno dimensione 1 (cioè dimensione complessiva uguale alla molteplicità algebrica di 1). Dunque, a meno di scambi di blocchi, la forma di Jordan di  $A$  è la seguente

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se consideriamo ora la matrice  $B$ , vediamo che essa è una matrice triangolare inferiore. Analogamente a quanto visto per  $A$  si ha che  $B$  ha i due autovalori  $\lambda_1 = 0$  di molteplicità algebrica 2 e  $\lambda_2 = 1$  di molteplicità algebrica 2. Inoltre si trova facilmente che  $\text{mg}_B(0) = 1$  e  $\text{mg}_B(1) = 2$ . Pertanto la forma canonica di Jordan di  $B$  è, a meno di scambi di blocchi, la stessa di  $A$ . Dunque  $A$  e  $B$  sono simili.

Determiniamo ora una matrice invertibile  $R$  tale che  $R^{-1}AR = J$ . Per far ciò consideriamo l'endomorfismo  $\eta$  di  $\mathbf{R}^4$  la cui matrice rispetto alla base canonica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$  di  $\mathbf{R}^4$  sia  $A$ . Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite  $\eta$  e  $\eta^2$  (dobbiamo calcolare le potenze di  $\eta$  fino al grado uguale all'indice dell'autovalore 0):

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow & 2\mathbf{e}_1 & \rightarrow & 2\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow & \mathbf{e}_2 & \rightarrow & 2\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_4 & \rightarrow & \mathbf{e}_4 & \rightarrow & \mathbf{e}_4 \end{array}$$

Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e la seguente catena di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 1 & < & 2 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \eta & \subset & \ker \eta^2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{v}_1 & \leftarrow & \mathbf{v}_2 \end{array}$$

Occorre allora scegliere  $\mathbf{v}_2$  in  $\ker \eta^2 - \ker \eta$ : ad esempio scegliamo  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ . Determiniamo così  $\mathbf{v}_1 = \eta(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ . Sia ora  $\eta_1 = \eta - I$ . Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite  $\eta_1$  (dobbiamo calcolare le potenze di  $\eta_1$  fino al grado uguale all'indice dell'autovalore 1):

$$\begin{array}{ll} \mathbf{e}_1 & \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 & \rightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

Allora vediamo subito che  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_4$  formano una base di  $\ker \eta_1$ . Poniamo allora  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_4$ . Consideriamo ora la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_3$  e  $\mathbf{v}_4$  rispetto alla base canonica. Risulta allora  $R^{-1}AR = J$ .

Analogamente determiniamo una matrice invertibile  $S$  tale che  $S^{-1}BS = J$ . Consideriamo allora l'endomorfismo  $\theta$  di  $\mathbf{R}^4$  la cui matrice rispetto alla base canonica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$  di  $\mathbf{R}^4$  sia  $B$ . Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite  $\theta$  e  $\theta^2$  (dobbiamo calcolare le potenze di  $\theta$  fino al grado uguale all'indice dell'autovalore 0):

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow & \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 & \rightarrow & \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow & \mathbf{e}_4 & \rightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_4 & \rightarrow & \mathbf{0} & & \end{array}$$

Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e la seguente catena di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 1 & < & 2 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \theta & \subset & \ker \theta^2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{u}_1 & \leftarrow & \mathbf{u}_2 \end{array}$$

Occorre allora scegliere  $\mathbf{u}_2$  in  $\ker \theta^2 - \ker \theta$ : ad esempio scegliamo  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_3$ . Determiniamo così  $\mathbf{u}_1 = \theta(\mathbf{u}_2) = \mathbf{e}_4$ . Sia ora  $\theta_1 = \theta - I$ . Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite  $\theta_1$  (dobbiamo calcolare le potenze di  $\theta_1$  fino al grado uguale all'indice dell'autovalore 1):

$$\begin{array}{ll} \mathbf{e}_1 & \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow -\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_4 & \rightarrow -\mathbf{e}_4 \end{array}$$

Allora vediamo subito che  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$  formano una base di  $\ker \theta_1$ . Poniamo allora  $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{u}_4 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$ . Consideriamo ora la matrice:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{u}_3$  e  $\mathbf{u}_4$  rispetto alla base canonica. Risulta allora  $S^{-1}BS = J$ .

Ma allora se  $S^{-1}BS = R^{-1}AR$ , si ha che

$$B = SR^{-1}ARS^{-1} = (RS^{-1})^{-1}A(RS^{-1})$$

Dunque una matrice  $M$  come quella cercata è, ad esempio,  $RS^{-1}$ .

2. Osserviamo innanzitutto che il polinomio minimo tanto di  $A$  quanto di  $B$  è  $x^2(x-1)$  e, pertanto, esiste un polinomio  $p(x)$  di grado minore di 3 che coincide con il polinomio  $f(x) = x^{100}$  sullo spettro di  $A$  e  $B$ , ovvero tale che  $p(0) = f(0)$ ,  $p'(0) = f'(0)$  e  $p(1) = f(1)$ . Allora  $p(A) = A^{100}$  e  $p(B) = B^{100}$ . Se  $p(x) = a + bx + cx^2$ , si ha che  $p'(x) = b + 2cx$ . Inoltre  $f'(x) = 100x^{99}$ . Imponendo le condizioni  $p(0) = f(0)$ ,  $p'(0) = f'(0)$  e  $p(1) = f(1)$  troviamo il sistema:

$$\begin{aligned}a &= 0 \\b &= 0 \\a + b + c &= 1,\end{aligned}$$

che, risolto, dà  $a = b = 0$  e  $c = 1$ . Ma allora  $p(x) = x^2$ , ovvero

$$A^{100} = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$B^{100} = B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$