

**ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
PROVA SCRITTA DEL 18 GENNAIO 1998
Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti**

PRIMO ESERCIZIO [8 punti]

Si consideri il sottoinsieme di \mathbf{N}^2 :

$$A = \{(n, m) \mid n \leq m\}.$$

1. Dimostrare che A ha la stessa cardinalità di \mathbf{N} .
2. Dopo aver determinato una corrispondenza biunivoca $f : \mathbf{N} \rightarrow A$, determinare $f(100)$.

N. B.: l'insieme \mathbf{N} non comprende il numero 0.

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

Dato il gruppoide (\mathbf{Z}_n, \cdot) , indichiamo con $(\text{Inv } \mathbf{Z}_n, \cdot)$ il gruppo formato dai suoi elementi dotati di inverso. Determinare $(\text{Inv } \mathbf{Z}_n, \cdot)$ per $n = 11$ e $n = 18$ stabilendo quali di essi sono gruppi ciclici.

TERZO ESERCIZIO [7 punti]

1. Determinare tutte (a meno di scambi di blocchi) le possibili forme canoniche di Jordan di matrici di $M(8, \mathbf{R})$ aventi $\lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)^3$ come polinomio minimo. Per ognuna di esse determinare il polinomio caratteristico.
2. Determinare un endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^8[x]$ (polinomi di grado minore di 8 a coefficienti reali) avente $\lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)^3$ come polinomio minimo e avente come autospazi relativi agli autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$ rispettivamente il sottospazio vettoriale E_1 generato dai vettori 1 e x , il sottospazio vettoriale E_2 generato dal vettore x^2 e il sottospazio vettoriale E_3 generato dai vettori x^3 e x^4 .

QUARTO ESERCIZIO [7 punti]

Il quarto esercizio riguarda argomenti non facenti parte del programma dell'anno accademico 1999-2000.

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
RISOLUZIONE DEL TEMA D'ESAME DEL 18 GENNAIO 1998

PRIMO ESERCIZIO

1. L'insieme A è un sottoinsieme di \mathbf{N}^2 , che ha la stessa cardinalità di \mathbf{N} . Dunque $|A| \leq |\mathbf{N}|$. D'altra parte l'applicazione da \mathbf{N} in A che associa ad un numero naturale m la coppia $(1, m)$ è iniettiva. Pertanto $|\mathbf{N}| \leq |A|$. In conclusione A ha la stessa cardinalità di \mathbf{N} .
2. Osserviamo che, per ogni intero naturale m fissato, esistono esattamente m elementi in A del tipo (n, m) . È possibile allora enumerare gli elementi di A nel modo seguente:

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (1, 4), \dots\}.$$

Definiamo in maniera più rigorosa una corrispondenza biunivoca f tra \mathbf{N} e A : notiamo che esistono esattamente $1 + 2 + \dots + (m - 1) = \frac{(m-1)m}{2}$ elementi di A la cui seconda componente è minore di m . Dunque, gli elementi di A la cui seconda componente è esattamente m compaiono nell'enumerazione dopo i primi $\frac{(m-1)m}{2}$ elementi ma non dopo i primi $1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$ elementi di A . Inoltre gli elementi aventi la medesima seconda componente sono elencati secondo la prima componente crescente.

Per ogni intero i , se m è il massimo intero positivo per cui risulta $\frac{(m-1)m}{2} < i$ poniamo

$$f(i) = \left(i - \frac{(m-1)m}{2}, m \right).$$

È facile vedere che f è una corrispondenza biunivoca.

Applichiamo ora questa formula per calcolare $f(100)$. Si ha $\frac{13 \cdot 14}{2} < 100 \leq \frac{14 \cdot 15}{2}$. Dunque:

$$f(100) = \left(100 - \frac{(14-1)14}{2}, 14 \right) = (9, 14).$$

SECONDO ESERCIZIO

È ben noto che un elemento $[q]_n$ di \mathbf{Z}_n è invertibile rispetto al prodotto se e solo se q è primo con n . In particolare se n è un numero primo, allora tutti gli elementi non nulli di \mathbf{Z}_n sono invertibili. Dunque:

$$\begin{aligned} \text{Inv } \mathbf{Z}_{11} &= \{[m]_{11} \mid 1 \leq m \leq 10\}, \\ \text{Inv } \mathbf{Z}_{18} &= \{[1]_{18}, [5]_{18}, [7]_{18}, [11]_{18}, [13]_{18}, [17]_{18}\}. \end{aligned}$$

Si tratta ora di verificare se questi due gruppi sono ciclici. Osserviamo che $\text{Inv } \mathbf{Z}_{11}$ è formato da 10 elementi. Poiché il periodo di un elemento di un gruppo

finito divide l'ordine del gruppo stesso, gli elementi di $\text{Inv } \mathbf{Z}_{11}$ possono aver periodo 1, 2, 5 o 10. Per calcolare il periodo di un elemento è quindi sufficiente calcolare la sua prima, seconda, e quinta potenza (ed eventualmente dedurre per esclusione che il periodo è 10). Ovviamente $\text{Inv } \mathbf{Z}_{11}$ è ciclico se e solo se esiste almeno un elemento di periodo 10.

Ora $[2]_{11}^2 = [4]_{11} \neq [1]_{11}$ e $[2]_{11}^5 = 3[2]_{11} = [10]_{11} \neq [1]_{11}$. Il periodo moltiplicativo di $[2]_{11}$ non è, quindi, né 2 né 5, e non è, tantomeno, 1 (l'unico elemento di periodo 1 di un gruppo è l'elemento neutro). Il periodo moltiplicativo di $[2]_{11}$ è, pertanto, 10. Ma allora $\text{Inv } \mathbf{Z}_{11}$ è un gruppo ciclico generato da $[2]_{11}$. Poiché abbiamo trovato un generatore di $\text{Inv } \mathbf{Z}_{11}$, non è, ovviamente, necessario calcolare i periodi degli altri elementi di $\text{Inv } \mathbf{Z}_{11}$.

Applichiamo un argomento analogo a $\text{Inv } \mathbf{Z}_{18}$. Poiché $\text{Inv } \mathbf{Z}_{18}$ ha 6 elementi, i suoi elementi possono avere periodo 1, 2, 3 o 6.

Ora $[5]_{18}^2 = [25]_{18} = [7]_{18} \neq [1]_{18}$ e $[5]_{18}^3 = [125]_{18} = [17]_{18} \neq [1]_{18}$. Il periodo di $[5]_{18}$ non è pertanto né 1, né 2, né 3 e, dunque, è necessariamente 6. Dunque $\text{Inv } \mathbf{Z}_{18}$ è un gruppo ciclico generato da $[5]_{18}$.

TERZO ESERCIZIO

1. Il polinomio minimo di una matrice Jordanizzabile A è del tipo

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sono gli autovalori distinti di A e gli esponenti m_1, m_2, \dots, m_r sono i rispettivi indici (ricordiamo che l'indice di un autovalore di una matrice è la dimensione del più grande blocco di Jordan relativo a quell'autovalore che compare nella Jordanizzata della matrice). Dunque una matrice di Jordan di $M(8, \mathbf{R})$ che ha come polinomio minimo $\lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)^3$ è formata da blocchi di Jordan relativi agli autovalori 0, 1 e -1 . Inoltre il più grande blocco di Jordan relativo all'autovalore 0 ha dimensione 2, il più grande blocco di Jordan relativo all'autovalore 1 ha dimensione 1, il più grande blocco di Jordan relativo all'autovalore -1 ha dimensione 3. Oltre a questi tre blocchi una matrice siffatta può contenere un ulteriore blocco di Jordan di dimensione 2 (che può essere relativo all'autovalore 0 oppure all'autovalore -1) oppure 2 ulteriori blocchi di Jordan di dimensione 1 che possono essere relativi a due autovalori qualunque (distinti o no). Abbiamo dunque le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $\lambda^4(\lambda - 1)(\lambda + 1)^3$;

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $\lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)^5$ e

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

dove λ_1 e λ_2 possono assumere un qualsiasi valore tra 0, 1 e -1 (per evitare di elencare due matrici simili tra loro supponiamo $\lambda_1 \leq \lambda_2$) e il cui polinomio caratteristico è $\lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)^3(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$. Dunque abbiamo in tutto 8 matrici.

2. L'endomorfismo cercato è necessariamente Jordanizzabile perché il suo polinomio minimo è totalmente riducibile. Ricordiamo altresì che la dimensione dell'autospazio relativo ad un certo autovalore λ di una matrice Jordanizzabile A fornisce il numero di blocchi di Jordan relativi a λ presenti nella Jordanizzata di A . In particolare questo ci permette di affermare che, rispetto ad una base di Jordan, l'endomorfismo cercato f si deve rappresentare con una matrice avente 2 blocchi di Jordan relativi a 0, 1 blocco di Jordan relativo a 1 e 2 blocchi di Jordan relativi a -1 . L'analisi svolta al punto 1 implica che i blocchi di Jordan relativi a 0 devono avere dimensioni rispettive 2 e 1, il blocco di Jordan relativo a 1 deve avere dimensione 1, i blocchi di Jordan relativi a -1 devono avere dimensioni rispettive 3 e 1. Deve esistere pertanto una base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_8$ formata di autovettori generalizzati di f soddisfacenti le seguenti relazioni:

$$f(\mathbf{v}_1) = 0, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1,$$

$$f\mathbf{v}_3 = 0,$$

$$f(\mathbf{v}_4) = \mathbf{v}_4,$$

$$f(\mathbf{v}_5) = -\mathbf{v}_5, f(\mathbf{v}_6) = -\mathbf{v}_6 + \mathbf{v}_5, f(\mathbf{v}_7) = -\mathbf{v}_7 + \mathbf{v}_6,$$

$$f(\mathbf{v}_8) = -\mathbf{v}_8.$$

Poiché $1, x, x^3, x^4$ sono autovettori di f possiamo scegliere come base di $\mathbf{R}^8[x]$ formata di autovettori generalizzati di f la base canonica, e porre, ad esempio:

$$f(1) = 0, f(x^5) = 1,$$

$$f(x) = 0,$$

$$f(x^2) = x^2,$$

$$f(x^3) = -x^3, f(x^6) = -x^6 + x^3, f(x^7) = -x^7 + x^6,$$

$$f(x^4) = -x^4.$$