

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
PROVA SCRITTA DEL 16 GIUGNO 1998
Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti

PRIMO ESERCIZIO [8 punti]

Sia (M, \cdot) un monoide commutativo. Si definisca in M una relazione \sim nel modo seguente

$g \sim h$ se e solo se esiste un elemento invertibile u di M tale che $g = u \cdot h$.

1. Mostrare che la relazione così definita è una relazione di equivalenza.
2. Mostrare che la classe di equivalenza di 1 è formata da tutti e soli gli elementi invertibili di M .
3. Dimostrare che la relazione data è compatibile con il prodotto di M .
4. Nel caso in cui $(M, \cdot) = (\mathbf{Z}, \cdot)$ determinare gli elementi di \mathbf{Z}/\sim .
5. Dimostrare che $(\mathbf{Z}/\sim, \cdot)$ è isomorfo a $(\mathbf{N} \cup \{0\}, \cdot)$.

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

Si considerino i punti dello spazio A , B e C di coordinate rispettive $(1, 2, 3)$, $(2, 5, 1)$, $(1/3, 2/5, 5/2)$. Sia r la retta congiungente A e B e s la retta congiungente A e C . Si determinino le cardinalità degli insiemi R e S dei punti a coordinate intere rispettivamente di r e di s . Per ciascuno di questi due insiemi determinare, nel caso in cui sia di cardinalità \aleph_0 , una corrispondenza biunivoca con \mathbf{N} .

TERZO ESERCIZIO [7 punti]

Si discuta e risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in \mathbf{Z}_{13} :

$$\begin{cases} x + [2]_{13}y + [4]_{13}z = [1]_{13} \\ [2]_{13}x + z = [4]_{13} \\ [3]_{13}x + y = [12]_{13} \end{cases}$$

QUARTO ESERCIZIO [7 punti]

Sia data la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -3 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Si determini la forma canonica di Jordan J di A e si trovi una matrice invertibile M tale che $J = M^{-1}AM$.
2. Si calcoli e^{3A} .
3. Si determini una funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, diversa da e^x tale che $f(A) = e^{3A}$.

**ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
RISOLUZIONE DEL TEMA D'ESAME DEL 16 GIUGNO 1998**

PRIMO ESERCIZIO

1. Dobbiamo mostrare che \sim è riflessiva, simmetrica e transitiva:

- (a) Se $g \in M$ allora $g = 1 \cdot g$. Dunque $g \sim g$ e \sim è riflessiva;
- (b) se $g \sim h$ allora $g = u \cdot h$ per qualche elemento invertibile u di M . Moltiplicando la relazione $g = u \cdot h$ per l'inverso u^{-1} di u troviamo $u^{-1} \cdot g = h$ e, poiché u^{-1} è invertibile abbiamo che $h \sim g$, cioè \sim è simmetrica;
- (c) se $g \sim h$ e $h \sim k$ allora esistono u e v invertibili tali che $g = u \cdot h$, $h = v \cdot k$. Ma allora $g = u \cdot (v \cdot k) = (u \cdot v) \cdot k$ e, poiché $u \cdot v$ è invertibile (di inverso $v^{-1} \cdot u^{-1}$), abbiamo che $g \sim k$, cioè \sim è transitiva.

2. Sia g un elemento di M . Allora $g \sim 1$ se e solo se esiste un elemento invertibile u di M tale che $g = u \cdot 1$, cioè $g = u$. Dunque $g \sim 1$ se e solo se g è invertibile.

3. Siano $g \sim g'$ e $h \sim h'$: allora esistono u e v invertibili tali che $g = u \cdot g'$, $h = v \cdot h'$. Ora $g \cdot h = u \cdot g' \cdot v \cdot h' = u \cdot v \cdot g' \cdot h'$. Poiché $u \cdot v$ è invertibile abbiamo che $g \cdot h \sim g' \cdot h'$, cioè \sim è compatibile con il prodotto.

Si noti che la commutatività del monoide è stata usata solo nella dimostrazione della proprietà 3: le proprietà 1 e 2 valgono infatti anche per monoidi qualunque.

4. Gli elementi invertibili di (\mathbf{Z}, \cdot) sono 1 e -1 . Dunque $n \sim m$ se e solo se $n = m$ oppure $n = -m$. Pertanto ogni elemento di \mathbf{Z}/\sim può essere rappresentato tramite un numero positivo o nullo n . Per $n > 0$ si ha $[n]_- = \{n, -n\}$ mentre $[0]_- = \{0\}$.

5. Sia $f : \mathbf{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbf{Z}/\sim$ la funzione che associa a n l'elemento $[n]_-$. Per quanto detto al punto 4 tale funzione è biunivoca. Inoltre f è ovviamente un omomorfismo: $f(nm) = [nm]_- = [n]_-[m]_- = f(n)f(m)$, dal momento che \sim è compatibile con il prodotto di (\mathbf{Z}, \cdot) .

SECONDO ESERCIZIO

Scriviamo le equazioni parametriche di r e s :

$$r : \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= 2 + 3t \\ z &= 3 - 2t \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x &= 1 - \frac{2}{3}t \\ y &= 2 - \frac{8}{3}t \\ z &= 3 - \frac{1}{2}t \end{cases}$$

Otteniamo punti a coefficienti interi di r per valori del parametro t tali per cui t , $3t$ e $-2t$ sono numeri interi, ovvero per valori interi del parametro t . Otteniamo

punti a coefficienti interi di s per valori del parametro t tali per cui $\frac{2}{3}t$, $\frac{8}{5}t$ e $\frac{1}{2}t$ sono numeri interi, ovvero per valori del parametro t che siano multipli interi di 3, 5 e 2, cioè multipli interi di 30. In particolare tanto per r quanto per s troviamo un'infinità numerabile di valori del parametro t corrispondenti a punti a coordinate intere. Dunque $|R| = |S| = \aleph_0$.

Sia ora $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$ una corrispondenza biunivoca, ad esempio:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1-n}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Dalla discussione precedente sappiamo che l'applicazione $g : \mathbf{Z} \rightarrow R$ definita da $g(t) = (1+t, 2+3t, 3-2t)$ è una biunivoca, e, dunque, $g \circ f$ è una corrispondenza biunivoca da \mathbf{N} in R . Analogamente l'applicazione $h : \mathbf{Z} \rightarrow S$ definita da $h(t) = (1 - \frac{2}{3}30t, 2 - \frac{8}{5}30t, 3 - \frac{1}{2}30t)$ è biunivoca, e, dunque, $h \circ f$ è una corrispondenza biunivoca da \mathbf{N} in S .

TERZO ESERCIZIO

$$\begin{cases} x + [2]_{13}y + [4]_{13}z = [1]_{13} \\ [2]_{13}x + z = [4]_{13} \\ [3]_{13}x + y = [12]_{13} \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è:

$$A = \begin{pmatrix} [1]_{13} & [2]_{13} & [4]_{13} \\ [2]_{13} & [0]_{13} & [1]_{13} \\ [3]_{13} & [1]_{13} & [0]_{13} \end{pmatrix}$$

mentre la matrice completa del sistema è:

$$A' = \begin{pmatrix} [1]_{13} & [2]_{13} & [4]_{13} & [1]_{13} \\ [2]_{13} & [0]_{13} & [1]_{13} & [4]_{13} \\ [3]_{13} & [1]_{13} & [0]_{13} & [12]_{13} \end{pmatrix}.$$

Per il teorema di Rouché-Capelli sappiamo che il sistema è risolubile se e solo se $\text{rk } A = \text{rk } A'$ (possiamo applicare tutti gli usuali risultati di algebra lineare poiché $(\mathbf{Z}_{13}, +, \cdot)$ è un campo). Calcoliamo allora il rango di A : si vede facilmente che il minore B di ordine 2 formato dall'incrocio della seconda e terza riga con la seconda e terza colonna ha determinante non nullo: dunque $\text{rk } A \geq 2$. Calcolando il determinante di A si trova $\det A = [13]_{13} = [0]_{13}$. Dunque $\text{rk } A = 2$. Per calcolare $\text{rk } A'$ è sufficiente calcolare il determinante del minore di A' che si ottiene cancellando la prima colonna (infatti è sufficiente calcolare i determinanti dei minori di ordine 3 contenenti B : oltre alla matrice che si ottiene cancellando la prima colonna di A' c'è solo A che sappiamo già avere determinante nullo). Ora:

$$\det \begin{pmatrix} [2]_{13} & [4]_{13} & [1]_{13} \\ [0]_{13} & [1]_{13} & [4]_{13} \\ [1]_{13} & [0]_{13} & [12]_{13} \end{pmatrix} = [39]_{13} = [0]_{13}.$$

Dunque $\text{rk } A = \text{rk } A' = 2$. Il sistema è risolubile e le sue soluzioni dipendono da 1 ($1 = 3 - 2$ dove 3 è il numero delle incognite e 2 è il rango del sistema)

parametro variabile in \mathbf{Z}_{13} e sono quindi esattamente 13. Inoltre il sistema è equivalente a quello formato da due sue equazioni linearmente indipendenti: ad esempio la seconda e la terza, corrispondenti al minore B . Dunque possiamo ridurci al sistema:

$$\begin{cases} [2]_{13} x & + & z & = & [4]_{13} \\ [3]_{13} x & + & y & = & [12]_{13} \end{cases}$$

e, portando a secondo membro in entrambe le equazioni l'incognita x , troviamo le soluzioni

$$\begin{cases} y & = & [12]_{13} & - & [3]_{13} x & [3]_{13} x \\ z & = & [4]_{13} & - & [2]_{13} x \end{cases}$$

dipendenti dal parametro x variabile in \mathbf{Z}_{13} .

QUARTO ESERCIZIO

1. Calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice A :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ -2 & -3 - \lambda & -3 \\ 2 & 5 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda(\lambda - 2)^2$$

Dunque gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ di molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = 2$ di molteplicità algebrica 2. Ricordiamo che la molteplicità algebrica di un autovalore fornisce la somma delle dimensioni di tutti i blocchi di Jordan relativi a quell'autovalore. Avremo pertanto un blocco di Jordan di dimensione 1 relativo all'autovalore 0. Determiniamo un autovettore \mathbf{v}_1 di A relativo all'autovalore 0. Se $\mathbf{v}_1 = {}^t(x, y, z)$ deve essere $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ ovvero

$$\begin{cases} 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ -2x & - & 3y & - & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & + & 5z & = & 0 \end{cases}$$

che, risolto, dà $x = 0$, $y = -z$. Possiamo dunque scegliere come vettore \mathbf{v}_1 il vettore ${}^t(0, 1, -1)$.

Consideriamo ora l'altro autovalore $\lambda_2 = 2$: sia η l'endomorfismo di \mathbf{R}^3 la cui matrice rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di \mathbf{R}^3 sia A , e sia $\eta = \eta_2 - 2I$. Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite le potenze successive di η_2 (dobbiamo proseguire fino a che troviamo una potenza η_2^i tale che $\dim \ker \eta_2^i = \max(2) = 2$, ovvero $\dim \operatorname{Im} \eta_2^i = 1$):

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e}_1 & \rightarrow & -2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 & \rightarrow & 4\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3 & \rightarrow & 8\mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 & \rightarrow & 4\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3 \end{array}$$

Si nota facilmente che $\dim \operatorname{Im} \eta_2 = 2$ e $\dim \operatorname{Im} \eta_2^2 = 1$ e, dunque, $\dim \ker \eta_2 = 1$ e $\dim \ker \eta_2^2 = 2$. Poiché $\dim \ker \eta_2 = 1$ avremo un solo blocco di Jordan relativo all'autovalore 2, e tale blocco avrà dimensione 2. Consideriamo allora la seguente

successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e le seguenti catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 1 & < & 2 \\ \{0\} & \subset & \ker \eta_2 & \subset & \ker \eta_2^2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{v}_2 & \leftarrow & \mathbf{v}_3 \end{array}$$

Occorre allora scegliere \mathbf{v}_3 in $\ker \eta_2^2 - \ker \eta_2$: ad esempio scegliamo $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$. Determiniamo così $\mathbf{v}_2 = \eta_2(\mathbf{v}_3) = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$. Consideriamo ora la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 rispetto alla base canonica. Risulta allora $M^{-1}AM = J$, dove

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Al punto 1 abbiamo determinato gli autovalori di A e la sua forma canonica di Jordan: in particolare da questa possiamo osservare che l'autovalore 0 ha indice 1 e l'autovalore 2 ha indice 2 (ricordiamo che l'indice di un autovalore coincide con la massima dimensione dei blocchi di Jordan relativi a quell'autovalore presenti nella forma canonica). Ora, è possibile definire e^{3A} , se e solo se e^{3x} è definita sullo spettro di A , ovvero se sono definiti i valori $e^{3 \cdot 0}$, $e^{3 \cdot 2}$, $De^{3x}(2) = e^{3 \cdot 2}$. Tali condizioni sono ovviamente soddisfatte. Dunque e^{3x} è definita sullo spettro di A . Per calcolare e^{3A} possiamo seguire due strade:

- Calcoliamo e^{3J} : questa si ottiene nel modo seguente

$$e^{3J} = \begin{pmatrix} e^{3 \cdot 0} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3 \cdot 2} & e^{3 \cdot 2} \\ 0 & 0 & e^{3 \cdot 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^6 & e^6 \\ 0 & 0 & e^6 \end{pmatrix}$$

Ora $e^{3A} = Me^{3J}M^{-1}$.

- Alternativamente osserviamo che il grado del polinomio minimo di A (che è $x(x-2)^2$) è 3 e, pertanto, esiste un polinomio $p(x)$ di grado minore di 3 che coincide con e^{3x} sullo spettro di A , ovvero $p(0) = e^{3 \cdot 0}$, $p(2) = e^{3 \cdot 2}$, $p'(2) = e^{3 \cdot 2}$. Se $p(x) = a + bx + cx^2$ (e, dunque, $p'(x) = b + 2cx$) ciò significa che:

$$\begin{cases} a & & & = & 1 \\ a & + & 2b & + & 4c & = & e^6 \\ & & b & + & 4c & = & e^6 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema troviamo $a = 1$, $b = -1$, $c = \frac{1}{4}(e^6 + 1)$. Dunque $e^{3A} = p(A)$ ovvero

$$e^{3A} = I - A + \frac{1}{4}(e^6 + 1)A^2$$

e, sviluppando i calcoli, troviamo:

$$e^{3A} = \begin{pmatrix} e^6 & e^6 & e^6 \\ 1 - e^6 & 2 - 2e^6 & 1 - 2e^6 \\ -1 + e^6 & -2 + 3e^6 & -1 + 3e^6 \end{pmatrix}$$

3. Da quanto visto al punto **2** una funzione come quella cercata è, ad esempio, il polinomio $p(x)$, ovvero $p(x) = 1 - x + \frac{1}{4}(e^6 + 1)x^2$.