

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
PROVA SCRITTA DEL 12 GENNAIO 1999
Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti

PRIMO ESERCIZIO [8 punti]

1. Calcolare la cardinalità di ognuno dei seguenti sottoinsiemi di \mathbf{N}^2 (in \mathbf{N} non è compreso lo zero):

$$A = \{(m, n) \mid m^2 + n^2 < 9\},$$

$$B = \{(m, n) \mid m^2 + n^2 = 9\},$$

$$A = \{(m, n) \mid m^2 + n^2 > 9\}.$$

2. Nel caso in cui uno di tali insiemi sia numerabile, determinarne una corrispondenza biunivoca con \mathbf{N} .

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

1. Dimostrare che l'insieme:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R} - \{0\}, b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R} - \{0\} \right\}$$

con l'operazione \cdot di moltiplicazione righe per colonne è un gruppo.

2. Verificare quali dei seguenti sottoinsiemi di G sono sottogruppi di (G, \cdot) :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbf{R} \right\},$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R} - \{0\}, b \in \mathbf{R} \right\},$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R} - \{0\}, b \in \mathbf{R} \right\}.$$

TERZO ESERCIZIO [7 punti]

Si consideri lo spazio vettoriale $M(2, \mathbf{R})$.

1. Verificare che la funzione f che associa ad ogni matrice la sua trasposta è un endomorfismo di $M(2, \mathbf{R})$.
2. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $M(2, \mathbf{R})$.
3. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base:

$$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

QUARTO ESERCIZIO [7 punti]

Si consideri la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Determinare una matrice $M \in \text{GL}(3, \mathbf{R})$ e una matrice di Jordan A' tali che si abbia $A' = M^{-1}AM$.
2. Determinare, qualora esistano, le matrici \sqrt{A} e $\ln A$.

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
RISOLUZIONE DEL TEMA D'ESAME DEL 12 GENNAIO 1999

PRIMO ESERCIZIO

- Osserviamo che \mathbf{N}^2 è l'unione disgiunta di A , B e C . Se (m, n) è un elemento di \mathbf{N}^2 tale che $m \geq 3$ o $n \geq 3$, allora $m^2 + n^2 \geq 9 + 1$ e, pertanto, $(m, n) \in C$: dunque C è un insieme infinito (contiene ad esempio gli infiniti elementi del tipo $(3, n)$ con $n \in \mathbf{N}$). Se, invece, (m, n) è una coppia tale che $m \leq 2$, $n \leq 2$ allora $m^2 + n^2 \leq 4 + 4 = 8$, e, dunque, $(m, n) \in A$. Riassumendo si ha $A = \{(m, n) \mid m \leq 2, n \leq 2\}$, $B = \emptyset$, $C = \{(m, n) \mid m \geq 3 \text{ o } n \geq 3\}$. Dunque $|A| = 4$, $|B| = 0$, $|C| = \aleph_0$ (infatti C è un sottoinsieme infinito di \mathbf{N}^2 che ha cardinalità \aleph_0).
- Sia f la corrispondenza biunivoca tra \mathbf{N}^2 e \mathbf{N} definita da

$$f(m, n) = \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + m$$

(tale corrispondenza si può facilmente ottenere con il procedimento diagonale di Cantor). Possiamo facilmente ottenere da questa enumerazione di \mathbf{N}^2 un'enumerazione di C semplicemente "saltando" gli elementi di A . Ciò può essere meglio inteso considerando lo schema seguente:

1	2	3	4	5	6	7	8	...
(1, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(1, 3)	(2, 2)	(3, 1)	(1, 4)	(2, 3)	...
×	×	×	1	×	2	3	4	...

Dunque $g : C \rightarrow \mathbf{N}$ è

$$g(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{se } (m, n) = (1, 3) \\ \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + m - 4 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

SECONDO ESERCIZIO

- Per dimostrare che G è un gruppo occorre verificare le seguenti proprietà:
 - $G \neq \emptyset$: banale.
 - G è chiuso rispetto al prodotto: se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}$ sono due matrici di G allora $AB = \begin{pmatrix} ad & ae+bf \\ 0 & cf \end{pmatrix}$. Poiché a, c, d e f sono non nulli, allora ad e cf sono non nulli e $AB \in G$.
 - Il prodotto è associativo: questo è banale, perché il prodotto tra matrici è sempre associativo.
 - Esiste un elemento neutro per il prodotto: la matrice identica appartiene a G .

- (e) Esiste un inverso in G per ogni elemento $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ di G : basta considerare la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$.

Si noti che un sottoinsieme di $M(2, \mathbf{R})$ può essere un gruppo rispetto al prodotto senza contenere la matrice identica. Si consideri ad esempio il sottoinsieme W di $M(2, \mathbf{R})$ formato dalle matrici del tipo $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $a \neq 0$: si verifica facilmente che W è un gruppo rispetto al prodotto riga per colonna, il cui elemento neutro è la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Verifichiamo ora se H è un sottogruppo di G : per far ciò occorre verificare le tre proprietà.

- (a) $H \neq \emptyset$: infatti H contiene matrice identica.
- (b) H è chiuso rispetto al prodotto: se $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ allora si ha $AB = \begin{pmatrix} 1 & e+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$.
- (c) L'inversa di ogni matrice di H appartiene ancora a H : se $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ allora $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$.

Dunque H è un sottogruppo di G .

Ripetiamo lo stesso procedimento per K :

- (a) $K \neq \emptyset$: ad esempio $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in K$.
- (b) K è chiuso rispetto al prodotto: se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & -d \end{pmatrix}$ allora si ha $AB = \begin{pmatrix} ad & ae - bd \\ 0 & ad \end{pmatrix} \notin K$.

Dunque K non è un sottogruppo di G .

Consideriamo infine L .

- (a) $L \neq \emptyset$: infatti L contiene la matrice identica.
- (b) L è chiuso rispetto al prodotto: se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}$ allora si ha $AB = \begin{pmatrix} ad & ae + \frac{b}{d} \\ 0 & \frac{1}{ad} \end{pmatrix} \in L$.
- (c) L'inversa di ogni matrice di L appartiene ancora a L : se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ allora $A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in L$.

Dunque L è un sottogruppo di G .

TERZO ESERCIZIO

1. L'applicazione f è ovviamente un endomorfismo di spazio vettoriale: infatti $f(A+B) = {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = f(A) + f(B)$ per ogni $A, B \in M(2, \mathbf{R})$ e $f(kA) = {}^t(kA) = k{}^tA = kf(A)$ per ogni $A \in M(2, \mathbf{R})$, $k \in \mathbf{R}$.
2. Ricordiamo che la base canonica di $M(2, \mathbf{R})$ è quella formata dalle matrici

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ora $f(E_1) = E_1$, $f(E_2) = E_3$, $f(E_3) = E_2$ e $f(E_4) = E_4$: dunque la matrice di f rispetto alla base canonica è:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Per ottenere la matrice di f rispetto alla base $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ possiamo seguire due procedimenti:

La matrice di passaggio dalla base canonica alla base $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ è:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ è $R^{-1}MR$.

Alternativamente esprimiamo le immagini delle matrici A_1, A_2, A_3, A_4 come combinazioni lineari delle matrici medesime: si ottiene $f(A_1) = A_1$, $f(A_2) = A_2$, $f(A_3) = A_3$, $f(A_4) = 2A_1 - A_4$. Dunque la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

QUARTO ESERCIZIO

1. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda = -\lambda(\lambda - 2)^2.$$

Dunque il polinomio caratteristico di A è totalmente riducibile e, pertanto, A è Jordanizzabile. Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ di molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = 2$ di molteplicità algebrica 2. La molteplicità algebrica di un autovalore di una matrice Jordanizzabile è uguale alla somma delle dimensioni di tutti i blocchi di Jordan relativi a tale autovalore che compaiono nella forma canonica di Jordan della matrice. Pertanto una matrice di Jordan simile alla matrice A conterrà un blocco di Jordan di dimensione 1 relativo all'autovalore 0 e blocchi di Jordan di dimensione complessiva 2 relativi all'autovalore 2. Determiniamo ora un autovettore \mathbf{v}_1 di A relativo all'autovalore 0. Se $\mathbf{v}_1 = (x, y, z)$ deve essere $A^t \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ ovvero

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -2x + 6y + 6z = 0 \\ -x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

che, risolto, dà $x = -\frac{3}{5}z$, $y = -\frac{6}{5}z$. Possiamo ad esempio porre $\mathbf{v}_1 = (3, 6, -5)$.

Consideriamo ora l'altro autovalore $\lambda_2 = 2$: sia θ l'endomorfismo di \mathbf{R}^3 la cui matrice rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di \mathbf{R}^3 sia A , e sia $\theta_2 = \theta - 2I$. Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite le potenze successive di θ_2 (dobbiamo proseguire fino a che troviamo una potenza θ_2^i tale che $\dim \ker \theta_2^i = \text{ma}(2) = 2$, ovvero $\dim \text{Im } \theta_2^i = 1$):

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e}_1 & \rightarrow & -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 & \rightarrow & -6\mathbf{e}_1 - 12\mathbf{e}_2 + 10\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow & 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 & \rightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow & 3\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3 & \rightarrow & -6\mathbf{e}_1 - 12\mathbf{e}_2 + 10\mathbf{e}_3 \end{array}$$

Si nota facilmente che $\dim \text{Im } \theta_2 = 2$ e $\dim \text{Im } \theta_2^2 = 1$ e dunque $\dim \ker \theta_2 = 1$ e $\dim \ker \theta_2^2 = 2$. Poiché $\dim \ker \theta_2 = 1$ avremo un solo blocco di Jordan relativo all'autovalore 2, e tale blocco avrà dimensione 2. Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e le seguenti catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 1 & < & 2 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \theta_2 & \subset & \ker \theta_2^2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{v}_2 & \leftarrow & \mathbf{v}_3 \end{array}$$

Occorre allora scegliere \mathbf{v}_3 in $\ker \theta_2^2 - \ker \theta_2$: ad esempio scegliamo $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_2$. Determiniamo così $\mathbf{v}_2 = \theta_2(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$. Consideriamo ora la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 rispetto alla base canonica. Risulta allora $M^{-1}AM = J$, dove

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Osserviamo che l'autovalore 0 ha indice 1 e l'autovalore 2 ha indice 2 (ricordiamo che l'indice di un autovalore coincide con la massima dimensione dei blocchi di Jordan relativi a quell'autovalore presenti nella forma canonica). Ora, è possibile definire $\phi(A)$, dove ϕ è una funzione reale di variabile reale, se e solo se ϕ è definita sullo spettro di A , ovvero se sono definiti i valori $\phi(0)$, $\phi(2)$, $\phi'(2)$. Verifichiamo queste condizioni per le funzioni f dove $f(x) = \sqrt{x}$ e \ln . Si ha che $f(0) = \sqrt{0} = 0$, $f(2) = \sqrt{2}$, e la derivata prima di f valutata in x è $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, che in 2 è definita e assume il valore $\frac{1}{2\sqrt{2}}$: dunque f è definita sullo spettro di A . Per quanto riguarda \ln osserviamo che \ln non è definita in 0, e, pertanto, $\ln A$ non è definita.. Per calcolare $A^{\frac{1}{2}}$ possiamo seguire due strade:

- Calcoliamo $J^{\frac{1}{2}}$: questa si ottiene nel modo seguente

$$J^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} f(0) & 0 & 0 \\ 0 & f(2) & f'(2) \\ 0 & 0 & f(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ora $A^{\frac{1}{2}} = MJ^{\frac{1}{2}}M^{-1}$.

- Alternativamente osserviamo che il polinomio minimo di A (che è $x(x-2)^2$) ha grado 3 e, pertanto, esiste un polinomio $p(x)$ di grado minore di 3 che coincide con f sullo spettro di A , ovvero $p(0) = f(0)$, $p(2) = f(2)$, $p'(2) = f'(2)$. Se $p(x) = a + bx + cx^2$ (e, dunque, $p'(x) = b + 2cx$) ciò significa che:

$$\begin{cases} a & & & = & 0 \\ a & + & 2b & + & 4c & = & \sqrt{2} \\ & & b & + & 4c & = & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema troviamo $a = 0$, $b = \frac{3}{4}\sqrt{2}$, $c = -\frac{1}{8}\sqrt{2}$. Dunque $A^{\frac{1}{2}} = p(A)$ ovvero

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}A - \frac{1}{8}\sqrt{2}A^2$$

e, sviluppando i calcoli, troviamo:

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$