

**ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
PROVA SCRITTA DELL'11 GENNAIO 2000
Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti**

PRIMO ESERCIZIO [8 punti]

1. Determinare la cardinalità del sottoinsieme $A_1 = \{(x, y) \mid x \leq y\}$ di \mathbf{N}^2 .
2. Determinare la cardinalità del sottoinsieme $A_{-1} = \{(x, y) \mid x \leq y^{-1}\}$ di \mathbf{N}^2 .
3. Determinare, per ogni $n \in \mathbf{Z}$, la cardinalità del sottoinsieme $A_n = \{(x, y) \mid x \leq y^n\}$ di \mathbf{N}^2 .

N. B.: l'insieme \mathbf{N} non comprende il numero 0.

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

Si consideri un anello $(A, +, \cdot)$ e sia $Z(A)$ il sottoinsieme di A formato dagli elementi che commutano con tutti gli elementi di A vale a dire:

$$Z(A) = \{z \mid za = az \text{ per ogni } a \in A\}.$$

1. Dimostrare che $Z(A)$ è un sottoanello di A .
2. Si dimostri che $M \in Z(M(2, \mathbf{R}))$ se e solo se per ogni $i = 1, \dots, 4$ risulta $ME_i = E_iM$ dove:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Si determini $Z(M(2, \mathbf{R}))$.

TERZO ESERCIZIO [7 punti]

Si consideri la matrice a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Si determini la forma canonica di Jordan J di A e si trovi una matrice invertibile M tale che $J = M^{-1}AM$.
2. Si calcoli, se possibile, $\sin A$ e $\log A$.

QUARTO ESERCIZIO [7 punti]

Si consideri la matrice a coefficienti in \mathbf{Z}_2 :

$$A = \begin{pmatrix} [0]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{pmatrix}$$

1. Si stabilisca se esiste un omomorfismo di gruppi $f : (\mathbf{Z}_6, +) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbf{Z}_2)$ tale che $f([1]_6) = A$ e, in caso affermativo, se ne determini nucleo e immagine.
2. Si stabilisca per quali valori di n esiste un omomorfismo di gruppi $f : (\mathbf{Z}_n, +) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbf{Z}_2)$ tale che $f([1]_n) = A$.

N. B.: si ricorda che $\text{GL}(2, \mathbf{Z}_2)$ indica il gruppo rispetto al prodotto righe per colonne delle matrici invertibili di dimensione 2 a coefficienti in \mathbf{Z}_2 .

**ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
RISOLUZIONE DEL TEMA D'ESAME DELL'11 GENNAIO 2000**

PRIMO ESERCIZIO

1. La cardinalità di \mathbf{N}^2 è \aleph_0 : dunque $|A_1| \leq \aleph_0$. D'altra parte osserviamo che A_1 contiene gli infiniti elementi del tipo $(1, y)$ al variare di $y \in \mathbf{N}$. Pertanto A_1 è infinito. Poiché un sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è numerabile, deduciamo che $|A_1| = \aleph_0$.
2. Una coppia (x, y) appartiene ad A_{-1} se e solo se $xy \leq 1$. Ora se x e y sono numeri naturali sia x che y sono maggiori o uguali a 1: allora se anche uno solo fra x e y è maggiore di 1, anche il loro prodotto lo è. Pertanto A_{-1} è formato dall'unica coppia $(1, 1)$ e $|A_{-1}| = 1$.
3. Siano $m \leq n$ due elementi di \mathbf{Z} , e sia $(x, y) \in A_m$. Poiché $y \geq 1$ risulta $y^m \leq y^n$. Per definizione di A_m si ha $x \leq y^m$. Ma allora $x \leq y^n$, ovvero $(x, y) \in A_n$. Pertanto $A_m \subseteq A_n$ se $m \leq n$. In particolare $A_n \subseteq A_{-1}$ se $n \leq -1$ e $A_n \supseteq A_1$ se $n \geq 1$. Per $n \leq -1$ notiamo che, poiché $1 \leq 1^n$, si ha che $(1, 1) \in A_n$ ovvero $A_n = A_{-1}$ e, pertanto, $|A_n| = 1$. Per $n \geq 1$, poiché A_1 è infinito allora anche A_n è infinito e, pertanto, essendo un sottoinsieme infinito di un insieme numerabile si ha che A_n è numerabile. Rimane dunque da considerare A_0 : questo è formato dalle coppie (x, y) tali che $x \leq 1$, ovvero dalle coppie del tipo $(1, y)$ al variare di $y \in \mathbf{N}$. Pertanto $|A_0| = \aleph_0$. In conclusione:

$$|A_n| = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq -1 \\ \aleph_0 & \text{se } n \geq 0 \end{cases}.$$

SECONDO ESERCIZIO

1. Per verificare che un sottoinsieme S di un anello A è un sottoanello occorre verificare che S è non vuoto, che S è chiuso rispetto alla somma e al prodotto e che S contiene l'opposto di ogni suo elemento. Verifichiamo queste proprietà per $Z(A)$:
 - (a) L'elemento 0 appartiene a $Z(A)$: infatti $0a = a0 = 0$ per ogni $a \in A$. Dunque $Z(A) \neq \emptyset$.
 - (b) Siano z_1 e z_2 due elementi di $Z(A)$: allora

$$(z_1 + z_2)a = z_1a + z_2a = az_1 + az_2 = a(z_1 + z_2)$$

per ogni $a \in A$. Dunque $z_1 + z_2 \in Z(A)$ che è, pertanto, chiuso rispetto alla somma.

(c) Siano z_1 e z_2 due elementi di $Z(A)$: allora

$$(z_1 z_2) a = z_1 (z_2 a) = z_1 (a z_2) = (z_1 a) z_2 = (a z_1) z_2 = a (z_1 z_2)$$

per ogni $a \in A$. Dunque $z_1 z_2 \in Z(A)$ che è, pertanto, chiuso rispetto al prodotto.

(d) Sia z un elemento di $Z(A)$: allora

$$(-z) a = -(z a) = -(a z) = a (-z)$$

per ogni $a \in A$. Dunque $-z \in Z(A)$ che, pertanto, contiene l'opposto di ogni suo elemento.

2. Chiaramente se $M \in Z(M(2, \mathbf{R}))$ allora $ME_i = E_i M$ per ogni $i = 1, \dots, 4$. Viceversa sia $ME_i = E_i M$ per ogni $i = 1, \dots, 4$. Poiché $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è una base per $M(2, \mathbf{R})$ ogni matrice N di $M(2, \mathbf{R})$ si può esprimere come $\sum_{i=1}^4 a_i E_i$ per opportuni $a_i \in \mathbf{R}$. Ma allora:

$$MN = M \left(\sum_{i=1}^4 a_i E_i \right) = \sum_{i=1}^4 a_i ME_i = \sum_{i=1}^4 a_i E_i M = \left(\sum_{i=1}^4 a_i E_i \right) M = NM$$

per ogni $N \in M(2, \mathbf{R})$, ovvero $M \in Z(M(2, \mathbf{R}))$.

3. Si consideri una generica matrice

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

di $M(2, \mathbf{R})$. Determiniamo le condizioni da imporre ai coefficienti x, y, z e t affinché M appartenga a $Z(M(2, \mathbf{R}))$. Dal punto precedente sappiamo che M deve commutare con le matrici E_i per ogni $i = 1, \dots, 4$. Allora

$$ME_1 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$E_1 M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $ME_1 = E_1 M$ se e solo se $y = z = 0$. Imponiamo queste due condizioni e calcoliamo i prodotti:

$$ME_2 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$E_2 M = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Possiamo allora imporre l'ulteriore condizione $x = t$. Una volta imposta questa ulteriore condizione si verifica facilmente che $ME_3 = E_3 M$ e $ME_4 = E_4 M$. Dunque $Z(M(2, \mathbf{R}))$ è formato da tutte e sole le matrici del tipo

$$M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

al variare di $x \in \mathbf{R}$, ovvero $Z(M(2, \mathbf{R}))$ è formato da tutte e sole le matrici che si ottengono moltiplicando la matrice identica per uno scalare.

TERZO ESERCIZIO

1. Calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice A :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -\lambda & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 2\lambda^3 = \lambda^3(\lambda - 2).$$

Dunque, il polinomio caratteristico di A è totalmente riducibile, e, pertanto A è Jordanizzabile. Inoltre, A ha due autovalori: 2 con molteplicità algebrica 1 e 0 con molteplicità algebrica 3. Per quanto riguarda l'autovalore 2 possiamo determinare un autovettore $\mathbf{v}_1 = (x, y, z, t)$ relativo a tale autovalore risolvendo il sistema lineare

$$(A - 2I)^t \mathbf{v}_1 = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} -x & +z & -t & = 0 \\ x & -2y & +z & -t & = 0 \\ & -2y & -2z & +2t & = 0 \\ x & -2y & +z & -t & = 0 \end{cases}$$

che, risolto, dà $x = y = 0$, $z = t$. Possiamo dunque porre $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1, 1)$.

Consideriamo ora l'altro autovalore 0: sia θ l'endomorfismo di \mathbf{R}^4 la cui matrice rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ di \mathbf{R}^4 sia A , e sia $\theta_0 = \theta - 0I = \theta$. Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite le potenze successive di θ_0 (dobbiamo proseguire fino a che troviamo una potenza θ_0^i tale che $\dim \ker \theta_0^i = \text{ma}(0) = 3$, ovvero $\dim \text{Im } \theta_0^i = 1$):

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4 & \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow & -2\mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_4 & \rightarrow -4\mathbf{e}_3 - 4\mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4 & \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_4 & \rightarrow & -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 & \rightarrow 4\mathbf{e}_3 + 4\mathbf{e}_4 \end{array}$$

Si nota facilmente che $\dim \text{Im } \theta_0 = 2$ e $\dim \text{Im } \theta_0^2 = 1$ e dunque $\dim \ker \theta_0 = 2$ e $\dim \ker \theta_0^2 = 3$. Poiché $\dim \ker \theta_0 = 2$ avremo 2 blocchi di Jordan relativo all'autovalore 0. Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e le seguenti catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 2 & < & 3 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \theta_0 & \subset & \ker \theta_0^2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{v}_2 & \leftarrow & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{v}_4 & & \end{array}$$

Occorre allora scegliere \mathbf{v}_3 in $\ker \theta_0^2 - \ker \theta_0$: ad esempio scegliamo $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1$. Determiniamo così $\mathbf{v}_2 = \theta_0(\mathbf{v}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$. Dobbiamo inoltre scegliere \mathbf{v}_4

in $\ker \theta_0$ tale che \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_4 formino una base per $\ker \theta_0$: ad esempio scegliamo $\mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$. Consideriamo ora la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 e \mathbf{v}_4 rispetto alla base canonica. Risulta allora $M^{-1}AM = J$, dove

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Osserviamo innanzitutto che l'indice dell'autovalore 2 è 1 mentre l'indice dell'autovalore 0 è 2 (l'indice di un autovalore di una matrice può essere determinato dalla forma canonica di Jordan della matrice e coincide con l'ordine del massimo blocco di Jordan relativo all'autovalore stesso). Dunque una funzione f reale di variabile reale è definita in A se e solo se sono definiti $f(2)$, $f(0)$ e $f'(0)$. Pertanto $\log A$ non è definita (dal momento che $\log 0$ non è definita), mentre $\sin A$ è chiaramente definita dal momento che \sin è una funzione definita su tutto \mathbf{R} e derivabile infinite volte su tutto \mathbf{R} . Per calcolare $\sin A$ possiamo seguire due strade.

- Calcoliamo $\sin J$. Questa si ottiene semplicemente

$$\sin J = \begin{pmatrix} \sin 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin 0 & \sin' 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

poiché $\sin' = \cos$. Ora $\sin A = M(\sin J)M^{-1}$.

- In alternativa osserviamo che il polinomio minimo di A è $\lambda^2(\lambda - 2)$ (l'esponente di ciascun fattore $\lambda - \lambda_i$ è l'indice dell'autovalore λ_i). Dunque il polinomio interpolatore $p(x)$ di Lagrange-Sylvester di \sin rispetto a A ha grado minore del grado del polinomio minimo di A , cioè di 3. Se allora $p(x) = a + bx + cx^2$ è il polinomio interpolatore di Lagrange-Sylvester di \sin rispetto a A devono essere soddisfatte le condizioni: $p(2) = \sin 2$, $p(0) = \sin 0$ e $p'(0) = \sin' 0$, ovvero, poiché $p'(x) = b + 2cx$ e $\sin' = \cos$:

$$\begin{array}{rclcl} a & + & 2b & + & 4c & = & \sin 2 \\ a & & & & & = & 0 \\ & & b & & & = & 1 \end{array}$$

che risolto dà: $a = 0$, $b = 1$ e $c = (\sin 2 - 2)/4$. Pertanto $p(x) = x +$

$((\sin 2 - 2)/4)x^2$ e $\sin A = p(A) = A + ((\sin 2 - 2)/4)A^2$ ovvero:

$$\begin{aligned}\sin A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin 2 - 2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\sin 2 & 0 & \sin 2 \\ 1 & -\sin 2 & 1 & -1 + \sin 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

QUARTO ESERCIZIO

Se C è un gruppo ciclico finito di ordine n e di generatore c e H è un gruppo qualunque, allora assegnato arbitrariamente h in H esiste un omomorfismo da C in H che porta c in h se e solo se l'elemento h ha periodo finito e che divide n . Determiniamo allora il periodo di A calcolandone le potenze successive:

$$\begin{aligned}A^2 &= \begin{pmatrix} [0]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [0]_2 \end{pmatrix} \neq I, \\ A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [0]_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [0]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1]_2 & [0]_2 \\ [0]_2 & [1]_2 \end{pmatrix} = I.\end{aligned}$$

Pertanto A ha periodo 3.

- Poiché $(\mathbf{Z}_6, +)$ è un gruppo ciclico di ordine 6 generato da $[1]_6$ e il periodo di A divide 6 esiste un omomorfismo f come quello cercato. Poiché $f([m]_6) = A^m$ si ha che $\text{Im } f$ è il gruppo ciclico generato da A ovvero $\text{Im } f = \{I, A, A^2\}$, mentre $\ker f$ è formato da quelle classi $[m]_6$ tali che $A^m = I$. Poiché A ha periodo 3 si ha che $\ker f$ è formato da quelle classi $[m]_6$ tali che m è multiplo di 3 ovvero $\ker f = \{[0]_6, [3]_6\}$.
- Esiste un omomorfismo $f : (\mathbf{Z}_n, +) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbf{Z}_2)$ tale che $f([1]_n) = A$ se e solo se il periodo di A , che è 3, divide l'ordine di $(\mathbf{Z}_n, +)$ che è n , ovvero se e solo se n è multiplo di 3.