

## Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica*

Cap.6. L'equazione generalizzata di Bernoulli e la sua applicazione al calcolo dei condotti.

***Paolo Di Marco***

*Versione 01.01 – 04.12.01.*

*La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.*

*L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.*

## Nota preliminare

*Questo capitolo è stato concepito anche per un suo utilizzo in modo svincolato da quelli precedenti e seguenti: per tale ragione, i lettori che fanno uso di tutte le dispense troveranno ripetuti, nei paragrafi marcati con \*, alcuni concetti già esposti in precedenza.*

## Introduzione

Nel presente capitolo viene affrontato lo studio del moto di un fluido all'interno di un condotto (nella maggior parte dei casi una tubazione) allo scopo di derivare i criteri di base per il dimensionamento del condotto stesso e degli organi necessari al moto (ovvero, pompe o ventilatori).

Non è difficile rendersi conto che una tubazione in cui scorre un fluido costituisce quello che in termodinamica è stato definito *sistema aperto*: come tale, il suo studio potrebbe essere affrontato benissimo mediante le equazioni generali di bilancio della termodinamica. Lo scopo di queste note è dunque di riformulare l'equazione di bilancio dell'energia in una forma di uso più pratico e più comune nella tecnica per il calcolo dei condotti stessi. Il tutto anche al fine di potere fare uso delle tabelle contenute nei manuali.

In particolare, restringeremo l'oggetto del nostro studio ai sistemi in *condizioni stazionarie* (ovvero, a regime).

L'esposizione è corredata da numerosi esempi, che i lettori sono invitati a non tralasciare, in quanto essi risultano spesso più istruttivi del testo stesso.

## Nozioni preliminari

### **Proprietà dei fluidi: densità\*, peso specifico\*, viscosità**

Per i nostri scopi, un *fluido* può essere definito come *un materiale che non è in grado di reagire a sforzi di taglio statici*. Questo vuol dire che, in condizioni di quiete, attraverso una qualunque superficie ideale tracciata all'interno del fluido non possono trasmettersi forze *parallele* alla superficie stessa. Come conseguenza, un fluido non può avere una forma propria, ma si adatta a quella del suo contenitore. Al contrario, attraverso la stessa superficie possono trasmettersi forze *perpendicolari* alla superficie stessa: la loro risultante per unità di superficie rappresenta, come è noto, la *pressione*.

La *densità* di un fluido ( $\rho$ , pronuncia rho), come è noto, rappresenta la massa della unità di volume e le sue unità SI sono  $\text{kg/m}^3$ . Viene spesso usata anche la *densità relativa* (adimensionale) che è il rapporto tra la densità del materiale e quella dell'acqua a pressione atmosferica e  $4^\circ\text{C}$  ( $1000 \text{ kg/m}^3$ ). Il *peso specifico* ( $\gamma$ , pronuncia gamma) rappresenta invece il peso della unità di volume e si misura in  $\text{N/m}^3$ . La relazione tra  $\rho$  e  $\gamma$  è ovviamente la stessa che intercorre tra massa e peso

$$\gamma = \rho g \tag{1}$$

dove  $g$  rappresenta l'accelerazione di gravità ( $9.8066 \text{ m/s}^2$  al livello del mare). La densità di alcuni liquidi è riportata in Tab.A-1

Si ricorda che la densità di un fluido dipende dalla temperatura e dalla pressione: per un liquido, la dipendenza dalla pressione è molto debole e si può in genere trascurare.

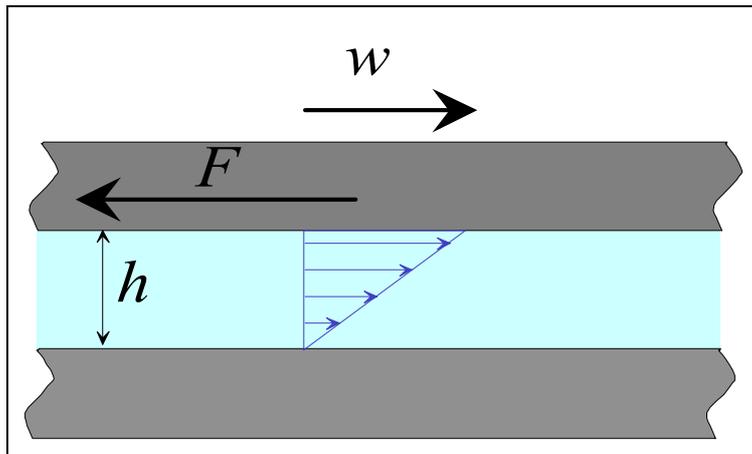
Un fluido la cui densità è costante in ogni condizione si dice *incomprimibile*. Nessun fluido reale è perfettamente incomprimibile, tuttavia tale modello si adatta molto bene ad un liquido (se le variazioni di temperatura non sono molto elevate) ed anche ad un aeriforme (se le variazioni di temperatura e pressione sono molto piccole rispetto al valore medio).

Il modello di fluido incomprimibile non è inoltre soddisfacente quando il fluido si muove a velocità prossime a quelle della propagazione del suono in esso: questo non si verifica in genere nelle applicazioni che considereremo (la velocità del suono è circa 300 m/s in aria e 1500 m/s in acqua).

In condizioni *dinamiche*, un fluido è in grado di trasmettere anche sforzi di taglio: supponiamo di considerare uno strato sottile di fluido (meato) di altezza  $h$ , delimitato da due pareti piane, di cui la superiore si muove con velocità  $w$  (vedi Fig.1). Il moto relativo tra il fluido e la parete nel punto di contatto è nullo, e di conseguenza nel meato si stabilisce un campo di velocità triangolare come indicato nella Fig.1: i piani di fluido scorrono l'uno sull'altro come farebbero dei fogli di carta. Questo genera una forza resistente sulla superficie superiore in moto. Sperimentalmente, si vede che tale forza (per unità di area),  $F/A$ , è data da

$$\frac{F}{A} = \tau = -\mu \frac{w}{h} \quad (2)$$

dove  $\mu$  (mi) è una proprietà del fluido detta *viscosità dinamica*.



**Figura 1:** Azioni esercitate da un fluido tra due superfici in moto relativo.

L'Eq. (1) può essere riscritta in forma più generale per uno strato di altezza infinitesima:

$$\tau = -\mu \frac{dw}{dy} \quad (3)$$

dove  $\tau$  rappresenta lo *sforzo di taglio viscoso* [ $N/m^2$ ], ovvero la forza che agisce per unità di area su una superficie interna al fluido in direzione parallela a tale superficie, e  $dw/dy$  è la derivata della velocità del fluido in direzione perpendicolare alla superficie considerata.

L'entità dello sforzo di taglio è tanto maggiore quanto maggiori sono la viscosità e i gradienti di velocità.

La *viscosità* è dunque la proprietà fisica che caratterizza la capacità di un fluido di trasmettere sforzi di taglio *dinamici*. Le sue unità di misura nel sistema SI sono ricavabili invertendo la relazione precedente

$$\mu = - \frac{\tau}{dw/dy} \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{s} = \text{Pa} \cdot \text{s} \right] \quad (4)$$

Questa espressione della viscosità è valida solo per una particolare classe di fluidi, detti *fluidi newtoniani*. Il modello di fluido newtoniano (detto così da Isaac Newton, che per primo ipotizzò una relazione del tipo suddetto) si adatta molto bene alla maggior parte dei fluidi sia liquidi che aeriformi, tranne quelli molto viscosi, quali grasso, dentifricio e paste in generale.

La viscosità è sempre positiva: dato il segno, lo sforzo viscoso si oppone sempre al moto e rappresenta pertanto una *forza dissipativa*. Un fluido è quindi tanto più viscoso quanto più si "oppone al moto": l'olio è più viscoso dell'acqua, che a sua volta è più viscosa della benzina.

I valori della viscosità di alcuni fluidi sono riportati in Tab.A-2: da notare come la viscosità di un fluido vari fortemente con la temperatura.

Per concludere si ricorda che talvolta si fa riferimento alla *viscosità cinematica* del fluido, indicata generalmente con la lettera  $\nu$  (ni) e definita come il rapporto tra viscosità dinamica e densità:

$$\nu = - \frac{\mu}{\rho} \quad (5)$$

Le sue unità SI sono  $\text{m}^2/\text{s}$ .

#### ***Portata e velocità del fluido\****

Si definisce *portata massica* di fluido in un condotto la massa di fluido che attraversa una sezione del condotto nell'unità di tempo. Essa si indica in genere con  $G$  e si misura in  $\text{kg/s}$ . Si definisce anche la *portata in volume* di fluido ( $G_v$ , misurata in  $\text{m}^3/\text{s}$ ) come il volume di fluido che attraversa una determinata sezione nella unità di tempo. Queste due quantità sono ovviamente legate dalla stessa relazione che lega massa e volume, ovvero, se la densità è costante nella sezione

$$G = \rho G_v \quad (6)$$

Il semplice termine *portata* si riferisce in genere alla portata massica (e nel seguito verrà usato con tale significato). Tuttavia, a volte viene anche usato con riferimento alla portata in volume. In caso di ambiguità, è bene controllare le unità di misura che sono specificate.

La velocità di una particella fluida può essere definita, in accordo con la meccanica, come la derivata della sua posizione rispetto al tempo e verrà indicata con  $\vec{w}$  (il modulo del vettore sarà indicato con  $w$ ). In genere, la velocità all'interno di un fluido in moto non è costante in ogni punto: ci si può rendere conto di questo semplicemente osservando la superficie di un fiume da un ponte. In particolare, la velocità è in genere massima nella zona centrale del condotto ed è *nulla* nelle zone di contatto con le superfici solide.

In altre parole, un fluido non scorre su una superficie come fa un solido su un altro solido: la velocità relativa nella zona di contatto è sempre nulla. Lo scorrimento si verifica tra gli strati di fluido immediatamente adiacenti alla superficie, dove i gradienti di velocità sono in genere elevati.

Si può definire una *velocità media* (detta più precisamente *velocità media di portata*, indicata con  $\bar{w}$ ) del fluido come la velocità del fluido, ipotizzata costante nella sezione, che produrrebbe la stessa portata in volume. Il fluido che attraversa una sezione del condotto in 1 s, in tali condizioni, è quello contenuto in un cilindro di altezza  $\bar{w}$  e sezione pari a quella del condotto,  $A$ . La velocità media  $\bar{w}$  è quindi data da:

$$G_v = \bar{w} A \quad (7)$$

e di conseguenza la relazione che lega la portata massica alla velocità media è

$$G = \rho \bar{w} A \quad (8)$$

Seppure in modo molto indicativo, si può dire che nella pratica ingegneristica la velocità media dei liquidi nei condotti ha valori di 2-5 m/s, mentre per gli aeriformi i valori più comuni sono intorno a 10-30 m/s.

### **ESEMPIO 1 - Calcolo del diametro di una tubazione\***

Una tubazione trasporta una portata  $G = 80000$  t/h di acqua marina ( $\rho = 1030$  kg/m<sup>3</sup>) per il raffreddamento del condensatore di una centrale termoelettrica. Supponendo una velocità media nel condotto di 4 m/s, calcolare il diametro della tubazione (supposta circolare).

La portata deve essere convertita in unità SI (kg/s)

$$G = 80000 \frac{\text{t}}{\text{h}} = 80000 \frac{1000\text{kg}}{3600\text{s}} = 22200 \text{ kg/s}$$

La sezione del condotto si ricava dall'Eq. (7)

$$A = \frac{G}{\rho \bar{w}} = \frac{22200}{1030 \cdot 4} = 5.4 \text{ m}^2$$

e quindi il suo diametro vale

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 2.6 \text{ m}$$

Da notare che i dati sono realistici. Le opere di presa dell'acqua di raffreddamento delle centrali termoelettriche hanno dimensioni simili.

□

### **Moto laminare e turbolento - Numero di Reynolds**

Se osserviamo il getto che fuoriesce da un rubinetto (di quelli senza dispositivo rompigetto) si nota che, finché la portata è bassa, il getto è liscio e lucido; all'aumentare della portata compaiono sulla superficie delle irregolarità di sempre maggiore entità. Lo stesso fenomeno si ripete in ogni fluido in moto: quando la portata, e quindi la velocità, superano un valore critico, le irregolarità del moto non sono più smorzate dalle forze viscosse. Si dice che il moto ha avuto una transizione dal regime *laminare* a quello *turbolento*. Nel moto turbolento la velocità di ogni particella si può suddividere in una componente media, indipendente dal

tempo, e una componente fluttuante, di ampiezza generalmente minore, che oscilla nel tempo con uno spettro di frequenze relativamente elevate. Questa seconda componente non è presente nel moto laminare, che pertanto viene spesso definito come moto "ordinato".

Si noti che il moto turbolento è *intrinsecamente non stazionario*: esso può essere considerato solo *mediamente stazionario*, trascurando gli effetti della componente fluttuante di velocità. Si faccia inoltre attenzione a non confondere la *velocità media locale* qui definita con la *velocità media di portata* di cui si è scritto in precedenza.

Il moto turbolento dei fluidi rimane uno dei problemi aperti della fisica: per quanto possa sembrare sorprendente, dopo più di un secolo di studio esso sfugge ancora ad una completa caratterizzazione. Anche le cause e le modalità della transizione laminare-turbolenta rimangono ancora da chiarire completamente.

Un criterio per determinare se il moto in un condotto è laminare o turbolento venne formulato sperimentalmente dal fisico inglese Osborne Reynolds (1842-1912). Secondo tale criterio, il moto *in un condotto* è laminare quando il seguente gruppo adimensionale, detto *numero di Reynolds*

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D_H}{\mu} \quad (9)$$

è inferiore al valore di 2000. Per  $Re > 10000$  il moto è completamente turbolento; per i valori intermedi ( $2000 < Re < 10000$ ) si ha una regione di transizione. In  $Re$  compare la grandezza  $D_H$ , detta *diametro idraulico* del condotto, definito come

$$D_H = \frac{4 A}{P} \quad (10)$$

dove  $A$  è la sezione del condotto e  $P$  rappresenta il perimetro bagnato dal fluido. Si può verificare facilmente che, se la sezione è circolare,  $D_H$  è pari al diametro del condotto stesso.

Il valore critico del numero di Reynolds, qui fissato al suo valore "storico" di 2000 può in realtà variare notevolmente con la configurazione geometrica e perfino con le azioni esterne (es. vibrazioni del sistema). Al lettore interessato si consiglia la lettura dell'Appendice F di *Heat Transfer*, di A. Bejan, Wiley 1992

Nella tecnica, il moto di un fluido è quasi sempre turbolento: raramente si ha a che fare con moti di tipo laminare, tranne che in oleodinamica.

### **ESEMPIO 2 - Moto in un condotto rettangolare**

In un condotto rettangolare di sezione 20 X 40 mm scorre acqua a 20 °C alla velocità media di 0.5 m/s. Determinare se il moto è laminare o turbolento. Ripetere il calcolo, a parità di ogni altra condizione, nel caso che il fluido sia aria a pressione atmosferica ( $\rho = 1.26 \text{ kg/m}^3$ ).

Il diametro idraulico del condotto è dato da

$$D_H = \frac{4 A}{P} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 40}{2 \cdot (20 + 40)} = 26.67 \text{ mm}$$

e per l'acqua, adottando i valori dati nelle tabelle allegate,  $Re$  vale

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D_H}{\mu} = \frac{1000 \cdot 0.5 \cdot 26.67 \cdot 10^{-3}}{0.001} = 13300$$

quindi il moto è decisamente turbolento, essendo  $Re > 10000$ .

Per l'aria si ha

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D_H}{\mu} = \frac{1.26 \cdot 0.5 \cdot 26.67 \cdot 10^{-3}}{1.82 \cdot 10^{-5}} = 923$$

e quindi il moto è laminare.

□

**ESEMPIO 3 - Sforzo tra due cilindri coassiali rotanti.**

Due cilindri coassiali di lunghezza 0.3 m, hanno diametri rispettivamente di 50 e 52 mm. Il cilindro interno ruota ad una velocità di 40 giri al minuto (rpm). Il meato (intercapedine) tra i due cilindri è riempito di un olio di viscosità dinamica pari a 900 mPa s. Assumendo che il profilo di velocità nel meato tra i due cilindri sia lineare e trascurando le forze agenti sulle basi dei cilindri, calcolare la coppia necessaria a mantenere il cilindro interno in rotazione.

La velocità del fluido in corrispondenza del cilindro esterno è nulla. In corrispondenza del cilindro interno, essa è pari alla velocità periferica del cilindro stesso, ovvero

$$w = \omega r = \frac{2 \pi n}{60} r = \frac{2 \pi \cdot 40}{60} \cdot 0.025 = 0.11 \text{ m/s}$$

la derivata della velocità rispetto al raggio è costante (dato che il profilo di velocità è lineare) e vale

$$\frac{dw}{dr} = \frac{w}{t}$$

dove  $t=1 \text{ mm}$  è lo spessore del meato. Di conseguenza lo sforzo di taglio alla parete interna vale

$$|\tau| = \mu \frac{dw}{dr} = \mu \frac{w}{t}$$

La risultante di tale sforzo su un elementino di superficie  $dS$  vale  $\tau dS$ , e il suo momento rispetto all'asse del cilindro vale  $M = \tau R dS$ . Il momento risultante si otterrà integrando l'espressione precedente su tutta la superficie laterale  $S$  del cilindro

$$M = \iint_S \tau R dS$$

Ma niente paura! Considerato che  $\tau$  ed  $R$  sono costanti, si ha

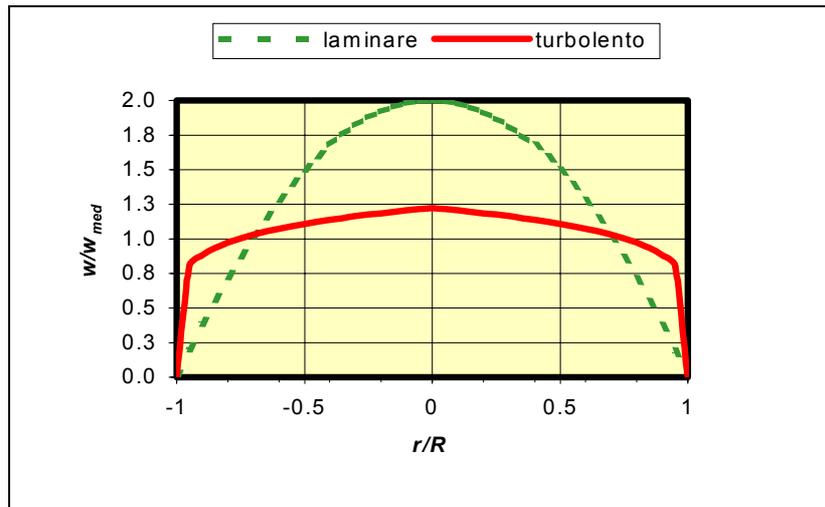
$$M = \tau R \iint_S dS$$

dove l'integrale rappresenta semplicemente la superficie laterale del cilindro ( $2\pi R L$ ). Quindi

$$M = \tau R 2\pi R L = 2\pi \mu \frac{w}{t} R^2 L = 2\pi \cdot 10^{-3} \frac{0.11}{0.001} \cdot 0.025^2 \cdot 0.3 = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}$$

Un dispositivo simile viene usato per misurare la viscosità dei fluidi. La stessa formula ci dà la coppia di attrito che si sviluppa nel perno di un cuscinetto a sostentamento oleodinamico.

□



**Figura 2:** Profili di velocità (normalizzati al valore medio) per moto laminare e turbolento.

Il profilo di velocità all'interno di un condotto circolare differisce notevolmente nel caso di moto laminare e turbolento (ci si riferisce qui al valor medio locale, non prendendo in considerazione le fluttuazioni turbolente). Come risulta dalla Fig.2, nel caso di moto laminare il profilo di velocità è parabolico, mentre nel caso turbolento è notevolmente appiattito nella parte centrale del condotto e i gradienti di velocità si localizzano in prossimità della parete. Da notare che entrambi i diagrammi rappresentano i valori di velocità normalizzati rispetto alla velocità media  $\bar{w}$  e la velocità assoluta in caso di moto turbolento è notevolmente superiore a quella in moto laminare. Nel caso di moto laminare, il valore medio di velocità è la metà del valore massimo al centro del condotto, mentre nel caso di moto turbolento tale rapporto varia tra 0.8 e 0.9 (cresce al crescere di  $Re$ ) per cui la velocità media e quella massima sono grossomodo coincidenti.

#### **ESEMPIO 4 - Calcolo della portata da una misura di velocità**

Un misuratore di velocità posto al centro di un camino di sezione circolare di 15 cm di diametro indica un valore di 0.05 m/s. Ipotizzando che il moto sia laminare, calcolare la portata volumetrica dei fumi nel camino.

La velocità misurata al centro del condotto rappresenta il valore massimo della stessa. Se il moto è laminare, si ha che

$$\bar{w} = 0.5 w_{\max}$$

per cui la portata volumetrica vale

$$G_v = \bar{w} A = 0.5 w_{\max} \frac{\pi D^2}{4} = 4.42 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

ovviamente, tale risultato è valido solo se il moto è veramente laminare. Il lettore interessato può verificare che questo è vero se i fumi hanno una viscosità cinematica di  $3 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ .

□

### Bilancio di massa - Equazione di continuità

Dato che i condotti che consideriamo sono dei sistemi aperti a regime, l'equazione di bilancio di massa si formula come

$$G = \rho \bar{w} A = \text{costante} \quad (11)$$

e applicandola tra le sezioni  $a$  e  $b$  del condotto, si ha

$$\rho_a \bar{w}_a A_a = \rho_b \bar{w}_b A_b \quad (12)$$

dato che considereremo solo fluidi incomprimibili, per cui  $\rho = \text{cost}$ , si ha infine

$$\bar{w}_a A_a = \bar{w}_b A_b \quad (13)$$

E' importante notare una conseguenza della equazione precedente: da essa si vede che un fluido si muove più velocemente in corrispondenza di un restringimento di sezione.

Purtroppo la stessa cosa non vale per il traffico automobilistico!

Ci si può chiedere che relazione ci sia tra la (13) e la equazione di Hugoniot, introdotta nel cap.5. Dato che per un fluido incomprimibile la velocità del suono vale infinito, per esso il numero di Mach vale costantemente zero e la relazione di Hugoniot, con alcuni semplici passaggi matematici, si riduce alla forma della (13).

### L'equazione generalizzata di Bernoulli

L'equazione di bilancio per unità di massa di un sistema aperto si può scrivere in forma differenziale

$$dh + de_c + de_p = dq - dl' \quad (14)$$

ricordando che

$$\begin{cases} dh = Tds + vdp \\ dq = Tds - Tds_s \end{cases} \quad (15)$$

e sostituendo nella precedente, si ha, con semplici passaggi

$$v dp + de_c + de_p = - T ds_s - dl' \quad (16)$$

I termini di energia potenziale e cinetica valgono rispettivamente

$$\begin{cases} de_p = g dz \\ de_c = \alpha d \frac{\bar{w}^2}{2} \end{cases} \quad (17)$$

dove  $z$  rappresenta la quota del fluido (più precisamente, del suo baricentro) rispetto ad un riferimento arbitrario e il termine  $\alpha$  indica che, a causa della distribuzione (profilo) di velocità nel condotto, l'energia cinetica non è esprimibile semplicemente in funzione della velocità media del fluido. In moto laminare si ha  $\alpha = 2$  e in moto turbolento  $\alpha \approx 1.06$  (in quest'ultimo caso, si può assumere  $\alpha=1$ ).

Più dettagliatamente, l'energia cinetica è una proprietà estensiva del fluido: essa andrebbe valutata come somma (integrale) delle energie cinetiche di tutte le particelle fluide che attraversano una determinata sezione, una volta nota la distribuzione di velocità nella sezione stessa. Il risultato di tale calcolo è una valutazione accurata del coefficiente  $\alpha$  in ogni condizione. Tuttavia tale approccio va oltre gli scopi delle presenti note. Da notare comunque che l'energia cinetica effettiva è sempre maggiore di quella calcolata in base alla velocità media.

Tenuto infine conto che  $\nu = 1/\rho$ , si ha

$$\frac{dp}{\rho} + \alpha d \frac{\bar{w}^2}{2} + g dz = - dl' - Tds_s \quad (18)$$

a causa della tradizione invalsa nella tecnica, in questo contesto si formula l'equazione di bilancio riferendosi all'unità di peso anziché a quella di massa. Le unità di misura dei singoli termini divengono allora  $J/N = Nm/N = m$ , ovvero tutti i termini hanno le dimensioni di un'altezza. Per riferirsi all'unità di peso, è sufficiente dividere tutti i termini dell'equazione precedente per l'accelerazione di gravità  $g$ . Inoltre il termine dissipativo,  $Tds_s/g$  che rappresenta le perdite dovute alle irreversibilità, si indica con  $dh_A$ ; il termine  $dl'/g$  che rappresenta il lavoro meccanico utile scambiato dal sistema, si indica con  $-dh'$  (il cambiamento di segno riflette il fatto che in questo contesto si ha in genere a che fare con macchine operatrici, ed è quindi più conveniente considerare positivo il lavoro ceduto al sistema). Si ottiene infine

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} d\bar{w}^2 + dz = dh' - dh_A \quad (19)$$

L'equazione suddetta prende il nome di *equazione generalizzata di Bernoulli*<sup>1</sup>

Nel caso di *fluidi incomprimibili*, la equazione precedente può essere facilmente integrata fra due sezioni  $a$  e  $b$  del condotto, fornendo

$$\boxed{\frac{p_b - p_a}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} (\bar{w}_b^2 - \bar{w}_a^2) + (z_b - z_a) = h' - h_A} \quad (20)$$

Da notare che la Eq.19 discende direttamente dal primo principio della termodinamica, e vale quindi per *qualunque fluido*; la Eq.20, essendo invece stata integrata supponendo  $\rho = \text{costante}$ , vale solo per *fluidi incomprimibili*.

### Determinazione delle perdite di carico

Le perdite per attrito vengono convenzionalmente divise in due aliquote

$$h_A = h_{A,d} + h_{A,c} \quad (21)$$

dove  $h_{A,d}$  rappresenta le *perdite di carico distribuite*, ossia quelle causate dalla dissipazione dovuta agli effetti viscosi lungo le pareti dei condotti, mentre  $h_{A,c}$  rappresenta le *perdite di*

<sup>1</sup>Il fisico svizzero Daniel Bernoulli (1700-1782) formulò per primo l'equazione suddetta, senza tenere conto dei termini dissipativi e di apporto energetico,  $h_a$  e  $h'$ . Per tale motivo, la presente formulazione viene detta *generalizzata*.

carico concentrate, dovute alla dissipazione nelle discontinuità localizzate del condotto, quali curve, restringimenti, allargamenti, valvole, etc.

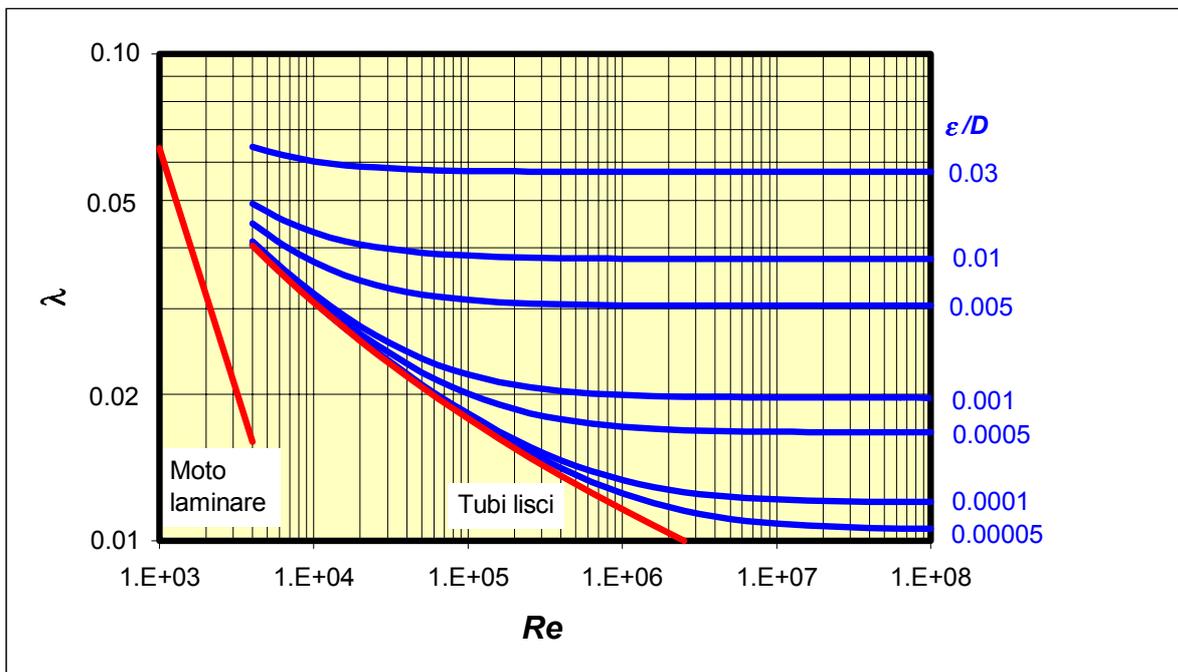
**Perdite di carico distribuite**

Le perdite di carico distribuite sono espresse da

$$h_{A,d} = \lambda(Re, \epsilon / D_H) \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} \quad (22)$$

dove  $L$  è la lunghezza del condotto e  $\lambda$  è un coefficiente detto *coefficiente di Darcy*. Come indicato, quest'ultimo dipende dal numero di Reynolds e dalla rugosità relativa del condotto ( $\epsilon/D_H$ , adimensionale) che rappresenta la rugosità media della superficie del condotto ( $\epsilon$ , pronuncia epsilon, definita come in meccanica) normalizzata rispetto al diametro idraulico del condotto stesso. La dipendenza di  $\lambda$  da  $Re$  ed  $\epsilon/D_H$  è espressa graficamente nel diagramma riportato in Fig.3, detto *diagramma di Moody*. Si noti come, per moto turbolento in tubi rugosi,  $\lambda$  diviene costante al di sopra di un determinato valore di  $Re$ .

Da notare che il diagramma di Moody rappresenta in pratica una situazione abbastanza favorevole: per variazioni di  $Re$  di cinque ordini di grandezza,  $\lambda$  varia poco meno di una decade. Nel caso che manchino informazioni precise sulla rugosità del condotto o su  $Re$ , o semplicemente per fare presto, conviene assumere per  $\lambda$  i "valori magici" 0.02 o 0.03.



**Figura3:** Diagramma di Moody

**ESEMPIO 5 - Calcolo delle perdite di carico distribuite**

In una tubazione di ghisa avente rugosità media di 260  $\mu\text{m}$ , diametro  $D = 80$  mm e lunghezza  $L = 50$  m, scorre una portata  $G = 20$  kg/s di acqua a 40 °C. Calcolare le perdite di carico distribuite e la caduta di pressione lungo la tubazione.

La soluzione è ottenibile anche con il foglio di calcolo *DARCY.XLS*

La velocità nel condotto vale

$$\bar{w} = \frac{G}{\rho A} = \frac{20}{1000 \frac{\pi \cdot 0.08^2}{4}} = 4 \text{ m/s}$$

Dalla Tab.A-2 si ricava che la viscosità dell'acqua a 40 °C è  $\mu = 680 \text{ } \mu\text{Pa s}$ , quindi il numero di Reynolds e la rugosità relativa valgono rispettivamente

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D_H}{\mu} = \frac{1000 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{68 \cdot 10^{-5}} = 470000$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.260}{80} = 0.0033$$

dal diagramma di Moody (oppure dalla correlazione di Haaland, esposta nel seguito) si ricava  $\lambda = 0.027$ , per cui

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L \bar{w}^2}{D_H 2g} = 0.027 \frac{50 \cdot 4^2}{2 \cdot 0.08 \cdot 9.81} = 13.7 \text{ m}$$

□

### ***ESEMPIO 6 - Dipendenza delle perdite di carico distribuite dalla velocità per moto laminare e turbolento***

Ricavare il legame che intercorre tra le perdite di carico distribuite e la velocità media del fluido in moto laminare ( $\lambda = 64/Re$ ) e in moto pienamente turbolento ( $\lambda = \text{cost}$ ).

In moto laminare si ha

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L \bar{w}^2}{D_H 2g} = \frac{64}{Re} \frac{L \bar{w}^2}{D_H 2g} = \frac{64\mu}{\rho \bar{w} D_H} \frac{L \bar{w}^2}{D_H 2g} = \frac{32 \mu L}{g \rho D_H^2} \bar{w}$$

mentre nel moto turbolento, più semplicemente

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L \bar{w}^2}{D_H 2g} = \frac{\lambda L}{2 g D_H} \bar{w}^2$$

Le perdite di carico distribuite sono dunque proporzionali alla velocità media del fluido se il moto è laminare, ed al suo quadrato se il moto è turbolento con  $\lambda = \text{cost}$  (quest'ultima è la situazione che si presenta più frequentemente nella pratica). Nelle situazioni intermedie, in cui  $\lambda$  dipende da  $\bar{w}$ , si avrà una dipendenza da  $\bar{w}$  più complessa. Notare anche che nel moto pienamente turbolento le perdite di carico sono indipendenti dalla viscosità (il valore di  $\lambda$  dipende solo dalla rugosità del condotto).

□

### ***ESEMPIO 7 - Dipendenza delle perdite di carico distribuite dal diametro del condotto***

Calcolare le perdite di carico distribuite in una tubazione da 3/4 pollice (diametro interno  $D = 20.9 \text{ mm}$ ) di lunghezza  $L = 10 \text{ m}$ , in cui scorre una portata  $G = 36 \text{ kg/min}$  di acqua. Si supponga per semplicità  $\lambda = 0.02$ . Ripetere il calcolo per la stessa portata in un tubo da 1/2 pollice ( $D = 15.7 \text{ mm}$ ).

La portata deve essere convertita in unità SI (kg/s)

$$G = 36 \frac{\text{kg}}{\text{min}} = 36 \frac{\text{kg}}{60 \text{ s}} = 0.6 \text{ kg/s}$$

Esprimiamo le perdite di carico distribuite in funzione della portata

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\bar{w}^2}{2g} = \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2g} \left( \frac{G}{\rho A} \right)^2 = \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2g} \left( \frac{G}{\rho} \frac{4}{\pi D^2} \right)^2 = \lambda \frac{8 L G^2}{\pi^2 g \rho^2 D^5}$$

Per il tubo da 3/4 pollice si ha quindi

$$h_{A,d} = 0.02 \frac{8 \cdot 10 \cdot 0.6^2}{\pi^2 \cdot 9.81 \cdot 1000^2 \cdot 0.0209^5} = 1.5 \text{ m}$$

mentre per la tubazione da 1/2 pollice

$$h_{A,d} = 0.02 \frac{8 \cdot 10 \cdot 0.6^2}{\pi^2 \cdot 9.81 \cdot 1000^2 \cdot 0.0157^5} = 6.2 \text{ m}$$

Quindi una piccola riduzione di diametro ha una grandissima influenza sulle perdite di carico. Del resto, la formula indica chiaramente che a parità di portata le perdite di carico sono inversamente proporzionali a  $D^5$  (il che vuol dire che, a parità di portata, dimezzando il diametro del condotto le perdite di carico aumentano di un fattore 32!). Nella realtà, bisogna considerare che anche  $\lambda$  varia leggermente, ma questo non altera sostanzialmente il risultato.

□

### **Espressioni per la valutazione del coefficiente di Darcy**

Le espressioni riportate nel seguito sono utili per calcolare  $\lambda$  con l'ausilio di un calcolatore.

*Moto laminare*

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (23)$$

*Moto turbolento, tubo liscio ( $4000 < Re < 10^5$ ): legge di Blasius*

$$\lambda = \frac{0.316}{Re^{0.25}} \quad (24)$$

*Moto turbolento, tubo rugoso,  $4000 < Re < 10^8$ , formulazione semplificata*

La seguente espressione di  $\lambda$ , dovuta ad Haaland, sebbene non rigorosa, approssima  $\lambda$  con un errore massimo del 1.5% nel campo di  $Re$  indicato per  $0 < \varepsilon/D < 0.05$ , e consente un calcolo esplicito (ovvero, senza fare uso di metodi iterativi)

$$\lambda = \left\{ -0.782 \ln \left[ \frac{6.9}{Re} + \left( \frac{\varepsilon}{3.7D} \right)^{1.11} \right] \right\}^{-2} \quad (25)$$

Da notare che la formula precedente, per  $\varepsilon=0$ , non fornisce valori esattamente uguali alla legge di Blasius. Gli scarti sono comunque piccoli.

Una relazione approssimata, consigliata da talune norme per il calcolo delle perdite di carico distribuite in un condotto, è quella di Hazen-Williams, che fornisce direttamente il valore di  $h_{A,d}$  per unità di lunghezza della tubazione in funzione della portata volumetrica e del diametro idraulico

$$\frac{h_{A,d}}{L} = 10.65 \frac{(G_v / C)^{1.85}}{D^{4.87}} \quad (26)$$

dove la costante moltiplicativa numerica 10.65 non è adimensionale (ha le dimensioni di  $s^{1.85}/m^{0.68}$  se si esprimono portata e diametro in unità SI) mentre la costante adimensionale  $C$  è ricavabile dalla Tab.1

Tubi estremamente lisci	140
Tubi nuovi, acciaio o ghisa	130
Tubi in legno o calcestruzzo	120
Tubi in acciaio rivettato, nuovi	110
Tubi vecchi in ghisa, mattoni	100
Tubi in acciaio rivettato, vecchi	95
Tubi in acciaio corrosivo	80
Tubi in acciaio fortemente corrosivo	60

**Tabella 1:** Coefficienti  $C$  (adimensionali) per la formula di Hazen-Williams.

Anche in questa formula, come nell'Esempio 7, si rileva che, a parità di portata, le perdite di carico sono inversamente proporzionali al diametro della tubazione elevato ad un esponente vicino a 5.

**ESEMPIO 8 - Calcolo delle perdite di carico distribuite con la formula di Hazen-Williams**

Ripetere il calcolo dell'Esempio 5 utilizzando la formula di Hazen-Williams.

La portata volumetrica vale

$$G_v = \frac{G}{\rho} = \frac{20}{1000} = 0.02 \text{ m}^3/\text{s}$$

Dalla Tab.1 (supponendo una tubazione in ghisa nuova) si ricava un valore di  $C = 130$ , quindi

$$h_{ad} = 10.65 \frac{(G_v / C)^{1.85}}{D_h^{4.87}} L = 10.65 \frac{(0.02 / 130)^{1.85}}{0.08^{4.87}} 50 = 10.2 \text{ m}$$

Mentre per  $C = 100$  (ghisa vecchia) si ha

$$h_{ad} = 10.65 \frac{(G_v / C)^{1.85}}{D_h^{4.87}} L = 10.65 \frac{(0.02 / 100)^{1.85}}{0.08^{4.87}} 50 = 16.8 \text{ m}$$

Quindi la formula approssima sufficientemente bene il valore delle perdite di carico (13.7 m) calcolate con la formula di Darcy nell'Esempio 5.

□

**Perdite di carico concentrate**

Le perdite di carico concentrate sono espresse da

$$h_{A,c} = \sum_i K_i \frac{\bar{w}_i^2}{2g} \quad (27)$$

Dove  $\bar{w}_i$  rappresenta la velocità con cui il fluido attraversa la discontinuità e  $K_i$  un coefficiente di perdita di carico concentrata, che è tabulato nei manuali. Alcuni valori notevoli di  $K_i$  sono riportati in Tab.4. Una raccolta vastissima di valori di  $K_i$  è riportata nel testo:

*Memento des pertes de charge: coefficients de pertes de charge singulieres et de pertes de charge par frottement*, di Idelcik I. E., Eyrolles, Paris, 1960. La sommatoria indica che si devono sommare i contributi di tutte le accidentalità presenti nel circuito.

In alcuni casi, ad esempio un restringimento di sezione, essendo la velocità del fluido diversa a monte ed a valle, l'equazione precedente è ambigua: in genere le tabelle precisano se si deve assumere il valore di velocità prima o dopo la discontinuità stessa.

**ESEMPIO 9 - Calcolo delle perdite di carico distribuite e concentrate**

Da un serbatoio in pressione fuoriesce una tubazione di scarico di diametro 25 mm e lunghezza di 5 m, con quattro gomiti a 90°, in cui scorre una portata  $G = 1.96$  kg/s di acqua a 20 °C. Assumendo un valore di  $\lambda = 0.02$ , determinare la pressione nel serbatoio, se lo sbocco della tubazione si trova a pressione atmosferica ed alla stessa quota del pelo libero del serbatoio.

Detti  $a$  e  $b$  rispettivamente il pelo libero del serbatoio e lo sbocco della tubazione, l'equazione di Bernoulli diviene

$$\frac{p_b - p_a}{\gamma} + \frac{1}{2g} \bar{w}_b^2 = - h_A$$

da cui si ha che la pressione *relativa* nel serbatoio deve valere

$$p_a - p_b = \frac{\rho}{2} \bar{w}_b^2 + \gamma (h_{AC} + h_{AD})$$

la velocità del fluido nella tubazione è data da

$$\bar{w} = \frac{G}{\rho A} = \frac{1.96}{1000 \frac{\pi 0.025^2}{4}} = 4 \text{ m/s}$$

le perdite distribuite sono date da

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = 0.02 \frac{5 \cdot 4^2}{2 \cdot 0.025 \cdot 9.81} = 3.26 \text{ m}$$

le perdite concentrate sono dovute all'imbocco dal serbatoio ( $K_1=1$ ) e ai gomiti ( $K_2= K_3= K_4= K_5= 0.5$ ) per cui

$$h_{A,c} = \sum_{i=1}^5 K_i \frac{\bar{w}_i^2}{2g} = \frac{\bar{w}^2}{2g} \sum_{i=1}^5 K_i = \frac{16}{2 \cdot 9.81} 3 = 2.45 \text{ m}$$

da cui si ha infine

$$p_a - p_b = \frac{1000}{2} 16 + 9.81 \cdot 1000 \cdot (2.45 + 3.26) = 0.64 \text{ bar}$$

□

*Metodo delle lunghezze equivalenti*

Questo metodo si basa sull'osservazione che ogni perdita concentrata può essere rimpiazzata da un tubo di appropriata lunghezza, che dia le stesse perdite di carico. Tale *lunghezza equivalente* è facilmente calcolabile

$$\lambda \frac{L_E}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = K_i \frac{\bar{w}^2}{2g} \quad (28)$$

$$L_E = \frac{K_i D_H}{\lambda}$$

Una difficoltà consiste nel fatto che il valore del coefficiente  $\lambda$  può essere inizialmente incognito: tuttavia si può spesso darne una stima ragionevole, e a meno che le perdite concentrate non costituiscano un'aliquota significativa delle perdite totali, tale stima non necessita di ulteriori correzioni.

Ovviamente, questo metodo non presenta nessun vantaggio nel caso si debbano determinare le perdite di carico. Al contrario, vi sono vantaggi nel caso si debba calcolare la portata o determinare il diametro del condotto.

### La prevalenza della pompa. Potenza resa e potenza assorbita

Il termine  $h'$ , che compare nella equazione di Bernoulli, è comunemente detto *prevalenza della pompa*. La prevalenza di una pompa (che si esprime in metri) può dunque essere definita rigorosamente come la *quantità di energia che la pompa aggiunge all'unità di peso del fluido*. Come vedremo nei successivi esempi, la prevalenza si presta anche ad altre interpretazioni meno generali.

#### **ESEMPIO 10 - Determinazione della prevalenza di una pompa**

Una pompa opera con un fluido di densità  $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$  e si misura una differenza di pressione tra ingresso ed uscita di 0.94 bar. Le tubazioni di aspirazione e di mandata hanno lo stesso diametro e sono situate alla stessa quota. Determinare la prevalenza della pompa.

Applicando l'equazione di Bernoulli tra l'ingresso e l'uscita della pompa si ha

$$\frac{P_b - P_a}{\gamma} = h'$$

da cui

$$h' = \frac{P_b - P_a}{\rho g} = \frac{94000}{800 \cdot 9.8066} = 12 \text{ m}$$

Notare che non si devono considerare perdite all'interno della pompa, dato che esse sono già conglobate nel termine  $h'$ .

Con questo metodo, misurando le pressioni in ingresso ed uscita per varie portate, si determina la curva caratteristica della pompa. Se necessario, si può anche correggere il risultato per tenere conto delle differenti velocità del fluido in ingresso ed in uscita, se le relative tubazioni hanno differente diametro.

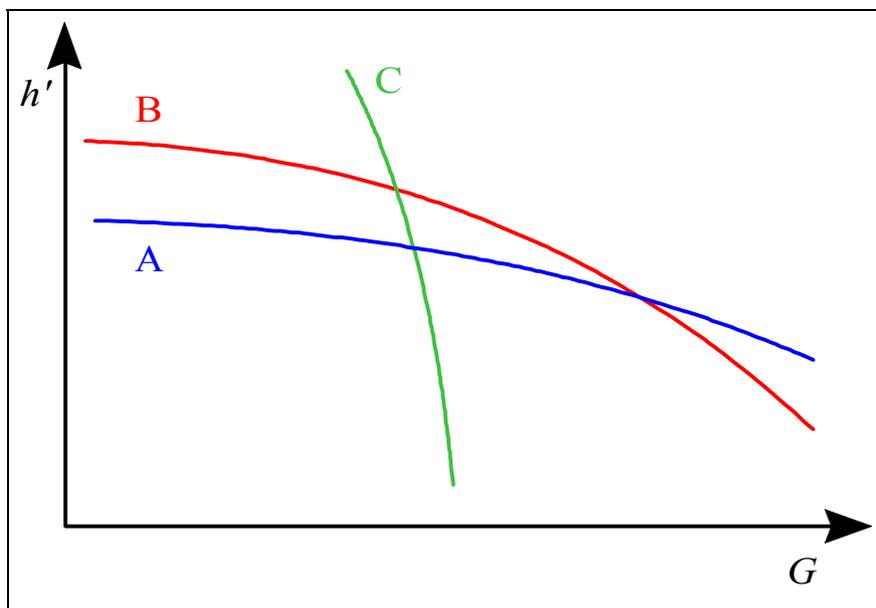
□

La prevalenza di una pompa varia al variare della portata, principalmente perché variano le perdite al suo interno. La curva che rappresenta tale variazione viene detta curva caratteristica della pompa e viene spesso fornita dal costruttore insieme alla pompa stessa. Essa è anche generalmente riportata per punti sulla targhetta applicata alla pompa, che riassume tutti i dati della pompa stessa.

Alcuni andamenti tipici della curva caratteristica sono riportati in Fig.4. E' evidente che una pompa dalla caratteristica piatta (curva A) sarà più adatta per circuiti in cui si vuol mantenere

costante la pressione in presenza di forti variazioni di portata. Una caratteristica del tipo C (molto ripida, al limite verticale) rappresenta invece una pompa che eroga una portata costante anche in presenza di notevoli variazioni delle perdite di carico, che sarà quindi adatta, ad esempio, come pompa dosatrice negli impianti chimici.

Una trattazione completa del funzionamento e delle tipologie di pompe esula dagli scopi di questo capitolo e verrà ripresa in seguito. Per ora basta accennare che l'andamento della caratteristica dipende dalle modalità costruttive della pompa: le pompe *centrifughe* (in cui una o più giranti che portano delle palette opportunamente sagomate mettono in movimento il fluido, dal centro verso la periferia) hanno in genere una caratteristica di tipo A o B, la cui pendenza può variare in funzione del numero delle giranti o della inclinazione delle palette. Una caratteristica di tipo C è invece tipica delle pompe *volumetriche* (pompe a pistoni, ad ingranaggi, etc.), che vengono dette così proprio perché trattano portate volumetriche di fluido praticamente indipendenti dal salto di pressione ai loro capi.



**Figura 4:** Tipiche curve caratteristiche di una pompa.

La potenza resa della pompa è definita come il lavoro per unità di tempo che essa fornisce al fluido. Per ottenerla, basterà quindi moltiplicare la prevalenza  $h'$  per la portata in peso di fluido ( $gG$ ), ovvero

$$W_R = g G h' = G \frac{\Delta p}{\rho} \quad (29)$$

La potenza assorbita dalla pompa è quella che essa preleva dalla sua sorgente di energia (es. la rete elettrica) e sarà maggiore della precedente a causa delle irreversibilità presenti nel corpo della pompa, dei trafiletti di fluido, dell'attrito dei cuscinetti etc. Essa è legata alla potenza resa dal rendimento ( $\eta$ , pronuncia eta) della pompa:

$$W_R = \eta W_A \quad (30)$$

Il rendimento di una pompa oscilla tra valori di 0.8-0.9 per pompe ben costruite fino a meno di 0.5 per pompe commerciali di bassa potenza.

**ESEMPIO 11 - Rendimento di una pompa**

La pompa di scarico di una lavatrice domestica tratta una portata di acqua di 0.25 kg/s con una prevalenza di 1.5 m, ed assorbe dalla rete una potenza  $W_A = 40$  W. Determinare il rendimento.

La potenza resa è data da

$$W_R = G g h' = 0.25 \cdot 9.81 \cdot 1.5 = 3.7 \text{ W}$$

ed il rendimento vale quindi

$$\eta = \frac{W_R}{W_A} = \frac{3.7}{40} = 0.09$$

Chiaramente, anche se i dati sono abbastanza realistici, si tratta di una situazione estrema. La necessità di mettere in commercio un oggetto robusto e di basso costo probabilmente non giustifica, dato il basso valore della potenza assorbita, ulteriori miglioramenti.



**Alcune applicazioni pratiche**

Dopo avere caratterizzato i termini  $h'$  e  $h_A$ , siamo in grado di applicare la equazione di Bernoulli al calcolo dei condotti. Nella pratica, si presentano diversi tipi di problemi:

1. Determinazione della caduta di pressione in una tubazione o della prevalenza necessaria per la pompa: questi problemi si possono risolvere applicando direttamente la equazione di Bernoulli, valutando le perdite di carico come precedentemente esposto.
2. Determinazione della portata in un circuito: data la dipendenza di alcuni fattori dalla velocità (che è inizialmente incognita) questi problemi richiedono una soluzione per tentativi.
3. Determinazione del diametro della tubazione, assegnate le massime perdite di carico ammissibili: anche questi problemi richiedono una soluzione iterativa.

**ESEMPIO 12 - Impianto di sollevamento**

Un impianto che solleva acqua da un serbatoio più basso ad uno più alto è rappresentato in Fig.5. La tubazione, in acciaio galvanizzato, ha un diametro di 50 mm e la portata di acqua (a 20 °C) è  $G = 3$  kg/s. Determinare la prevalenza necessaria per la pompa e la potenza resa al fluido.

Assumendo come sezioni  $a$  e  $b$  i peli liberi del fluido nei due serbatoi aperti, in cui la pressione è pari a quella atmosferica e la velocità si può considerare trascurabile, si ha

$$(z_b - z_a) = h' - h_A$$

ossia

$$h' = (z_b - z_a) + h_A$$

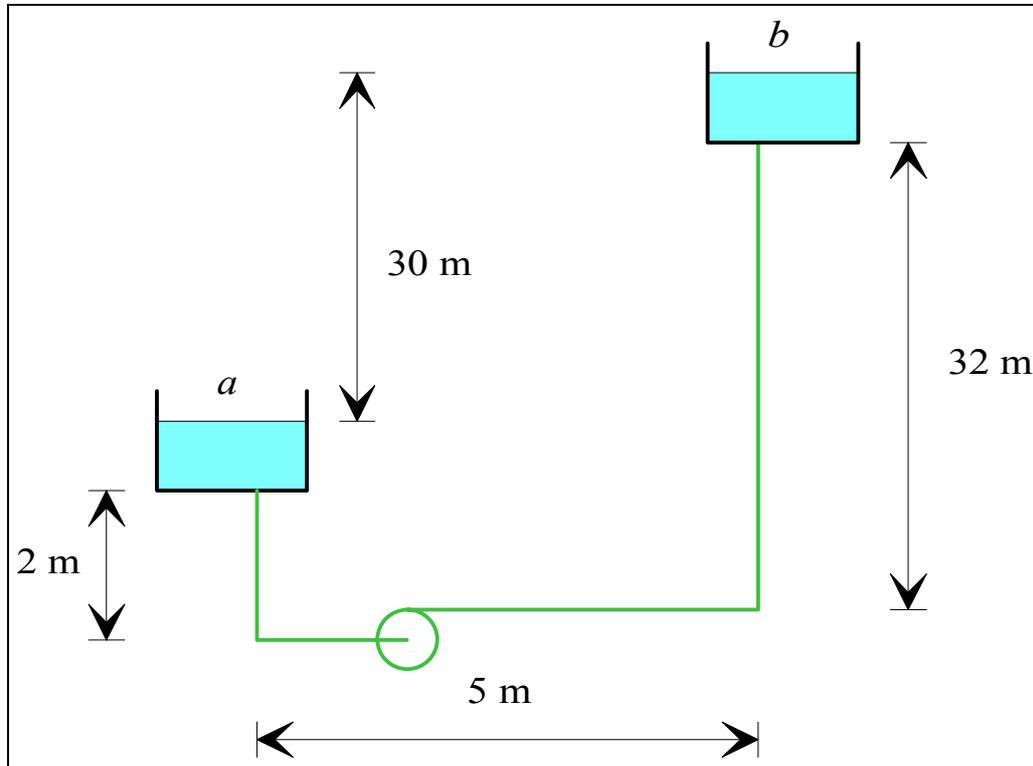
La equazione suddetta mostra chiaramente come la prevalenza della pompa serva in parte a sollevare il fluido all'altezza prescritta, in parte a vincere le perdite di carico. In assenza di perdite di carico, il fluido verrebbe sollevato ad una quota pari alla prevalenza della pompa.

la velocità del fluido nella tubazione è data da

$$\bar{w} = \frac{G}{\rho A} = \frac{3}{1000 \frac{\pi 0.05^2}{4}} = 1.53 \text{ m/s}$$

Le perdite concentrate sono dovute all'imbocco dal serbatoio ( $K_1=1$ ), ai due gomiti ( $K_2= K_3= 0.5$ ) e allo sbocco nel secondo serbatoio ( $K_4=1$ ) per cui

$$h_{A,c} = \sum_{i=1}^4 K_i \frac{\bar{w}_i^2}{2g} = \frac{\bar{w}^2}{2g} \sum_{i=1}^4 K_i = \frac{1.53^2}{2 \cdot 9.81} 3 = 0.36 \text{ m}$$



**Figura 5:** Schema di un impianto di sollevamento.

Per determinare le perdite distribuite si ricavano i seguenti dati: rugosità dell'acciaio galvanizzato  $\epsilon = 150 \mu\text{m}$  ( $\epsilon/D = 0.003$ ), viscosità dell'acqua  $\mu = 1 \text{ mPa s}$ , densità dell'acqua  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , da cui  $Re = 76500$ ,  $\lambda = 0.028$ , per cui le perdite distribuite sono date da (essendo la lunghezza totale della tubazione  $L = 39 \text{ m}$ )

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = 0.028 \frac{39 \cdot 1.53^2}{2 \cdot 0.05 \cdot 9.81} = 2.57 \text{ m}$$

da cui si ha infine (essendo la differenza di quota 30 m)

$$h' = 30 + (2.57 + 0.35) = 33 \text{ m}$$

la potenza resa è data da

$$W_R = G g h' = 3 \cdot 9.81 \cdot 33 = 970 \text{ W}$$

□

### **ESEMPIO 13 - Circuito di circolazione per riscaldamento**

Un impianto di circolazione di acqua per riscaldamento è rappresentato in Fig.6. In questi casi, per evitare una eccessiva rumorosità, si adotta per la velocità dell'acqua un valore massimo di 0.75 m/s. La tubazione ha una rugosità di 10  $\mu\text{m}$ . Se la portata di acqua è  $G = 0.06 \text{ kg/s}$  e la sua temperatura 66 °C, determinare il diametro della tubazione, la prevalenza

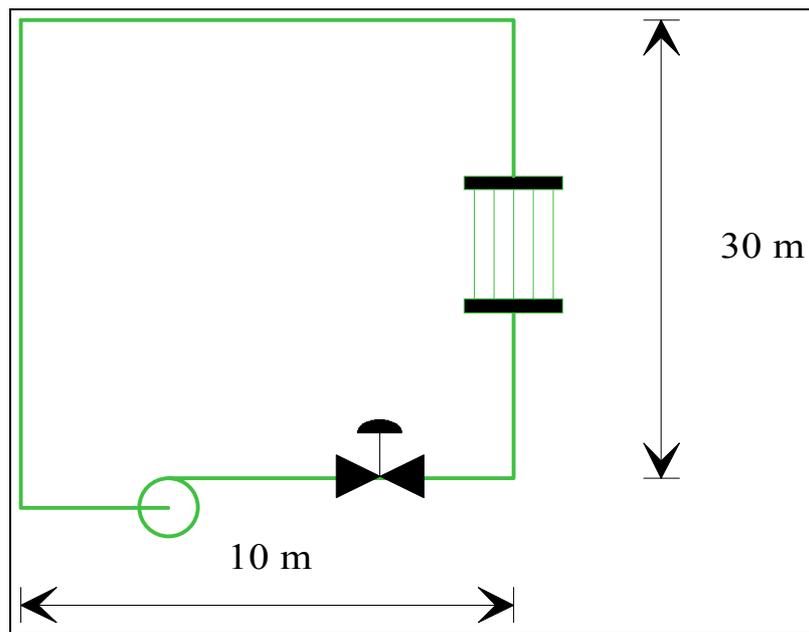
della pompa e la potenza resa al fluido. Si assuma i valori del coefficiente di perdita concentrata  $K = 2$  per la valvola e  $K = 3$  per il termosifone.

Il diametro della tubazione si ottiene da

$$G = \rho \bar{w} A$$

$$A = \frac{G}{\rho \bar{w}} = \frac{0.06}{979 \cdot 0.75} = 8.2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 10 \text{ mm}$$



**Figura 6:** Schema semplificato di un impianto di circolazione per riscaldamento domestico.

In questo caso le sezioni di ingresso ed uscita possono essere assunte coincidenti in un punto qualunque del circuito. Conseguentemente tutti i termini a primo membro della equazione di Bernoulli sono nulli ed essa diviene semplicemente

$$h' = h_A = h_{AC} + h_{AD}$$

il che esprime matematicamente il fatto che in questo caso la prevalenza della pompa serve solo a vincere le perdite di carico. Notare che, contrariamente all'esempio precedente, in questo caso la elevazione del circuito non influisce affatto sulla prevalenza della pompa.

Le perdite concentrate sono dovute alla valvola ( $K_1=2$ ), ai quattro gomiti ( $K_2= K_3= K_4= K_5= 0.5$ ) e al termosifone ( $K_6=3$ ) per cui

$$h_{A,c} = \sum_{i=1}^4 K_i \frac{\bar{w}_i^2}{2g} = \frac{\bar{w}^2}{2g} \sum_{i=1}^4 K_i = \frac{0.75^2}{2 \cdot 9.81} 7 = 0.2 \text{ m}$$

per determinare le perdite distribuite si ricavano i seguenti dati:

rugosità  $\epsilon = 10 \mu\text{m}$  ( $\epsilon/D = 0.001$ ), viscosità dell'acqua  $\mu = 0.434 \text{ mPa s}$ , densità dell'acqua  $\rho = 979 \text{ kg/m}^3$ , da cui  $Re = 16900$ ,  $\lambda = 0.029$ , per cui le perdite distribuite sono date da (essendo la lunghezza totale della tubazione  $L = 80 \text{ m}$ )

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = 0.029 \frac{80 \cdot 0.75^2}{2 \cdot 0.01 \cdot 9.81} = 6.51 \text{ m}$$

da cui si ha infine

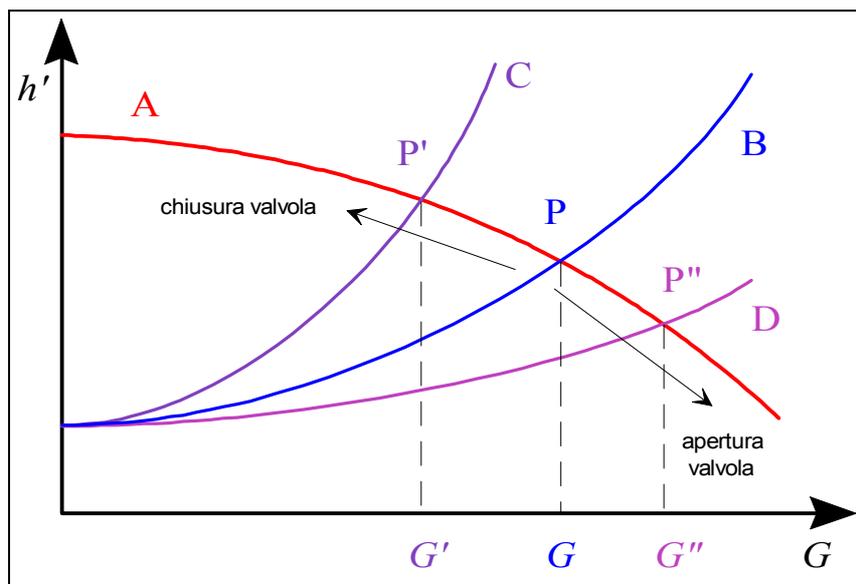
$$h' = 6.51 + 0.2 = 6.7 \text{ m}$$

la potenza resa è data da

$$W_R = G g h' = 0.06 \cdot 9.81 \cdot 6.7 = 4 \text{ W}$$

□

L'esempio precedente ci aiuta anche a chiarire qualitativamente come agisce una valvola nel regolare la portata in un circuito. Se si riduce la sezione di passaggio della valvola, il suo coefficiente di perdita di carico  $K$  aumenta e conseguentemente le perdite di carico in funzione della portata passano dalla curva B alla curva C nella Fig.7. La caratteristica della pompa rimane invece immutata, curva A. Il punto di funzionamento del circuito (punto in cui la prevalenza della pompa uguaglia le perdite di carico) si sposta da P a P' e la portata nel circuito diminuisce, mentre la prevalenza della pompa aumenta. L'opposto accade se si aumenta l'apertura della valvola (punto P'').



**Figura 7:** Meccanismo di azione di una valvola di regolazione.

Un secondo sistema per variare la portata in un circuito consiste nell'aumentare o diminuire la velocità di rotazione della pompa: in questo caso è la curva caratteristica della pompa che si alza od abbassa.

#### **ESEMPIO 14 – Massima altezza di aspirazione**

Una pompa aspira acqua da un pozzo avente il pelo libero 7 m sotto la quota della pompa stessa, tramite una tubazione rettilinea di diametro  $D = 25 \text{ mm}$ , al cui interno l'acqua scorre alla velocità  $w = 2 \text{ m/s}$ , che termina con una curva a  $90^\circ$  prima della bocca di aspirazione della pompa stessa. Assumendo per il coefficiente di Darcy il valore  $\lambda = 0.03$ , valore della pressione assoluta alla bocca di aspirazione della pompa ed determinare il battente in aspirazione.

Si assumono come sezioni  $a$  e  $b$  per il calcolo rispettivamente il pelo libero nel pozzo e la sezione di aspirazione della pompa. Applicando la equazione di Bernoulli tra gli estremi del circuito considerato si ottiene

$$\frac{p_b - p_a}{\gamma} + \frac{w_b^2 - w_a^2}{2g} + z_b - z_a = -h_A$$

Notare che, essendo la pompa *esterna* al sistema considerato, la sua prevalenza non compare nei calcoli. La pressione in ingresso (sezione  $a$ ) è quella atmosferica e la velocità in ingresso si può ritenere trascurabile. Si ha dunque

$$\frac{p_b - p_a}{\gamma} = -h_A - (z_b - z_a) - \frac{w^2}{2g}$$

Si hanno perdite concentrate in corrispondenza dell'imbocco pozzo-tubo ( $K_1 = 1$ ) e della curva a monte della pompa ( $K_2 = 0.5$ ). Pertanto

$$h_A = h_{Ad} + h_{Ac} = \frac{w^2}{2g} \left( \lambda \frac{L}{D} + K_1 + K_2 \right) = \frac{4}{2 \cdot 9.81} \left( 0.03 \frac{7}{0.025} + 0.5 + 1 \right) = 1.98 \text{ m}$$

da cui si ottiene infine

$$p_b = p_a - \gamma \left( z_b - z_a + \frac{w^2}{2g} + h_A \right) = 10^5 - 9800 \cdot (7 + 0.2 + 1.98) = 0.1 \text{ bar}$$

Il battente in aspirazione è ricavabile da  $p_b = \gamma H_b$

$$H_b = \frac{p_b}{\gamma} = \frac{10^4}{9800} = 1.02 \text{ m}$$

La pressione immediatamente a monte della pompa è quindi inferiore a quella atmosferica e tende a diminuire fino ad annullarsi all'aumentare dell'altezza di aspirazione,  $z_b - z_a$ , o delle perdite di carico nel lato aspirazione,  $h_A$ . Questo porta il fluido in condizioni prossime alla saturazione e può provocare il fenomeno della *cavitazione*: all'interno del fluido, in corrispondenza delle palette della girante pompa, dove la pressione scende ancora, si formano bollicine di gas che successivamente collassano producendo un caratteristico rumore e vibrazioni che danneggiano le palette stesse. Per evitare tale inconveniente, è buona norma installare le pompe nel punto più basso del circuito (in questo caso in fondo al pozzo). Vedremo in seguito che si può effettuare anche una verifica del *battente minimo di aspirazione* (ingl. *NPSH, net positive suction head*) precisato dal fabbricante delle stesse.

□

### **ESEMPIO 15 - Autoclave**

Si deve alimentare un'autoclave alla pressione relativa  $p_2 = 4$  bar con acqua a  $20$  °C, prelevando il fluido da un serbatoio aperto all'atmosfera situato alla stessa quota dell'autoclave, tramite una tubazione di acciaio galvanizzato di diametro  $D = 25$  mm e lunghezza  $L = 5$  m con due curve a gomito di  $90^\circ$ . La portata è  $G = 1.47$  kg/s. Determinare la prevalenza necessaria per la pompa e la potenza resa al fluido.

Considerando come sezioni estreme i peli liberi del fluido nel serbatoio e nell'autoclave (in cui le velocità sono trascurabili) l'equazione di Bernoulli diviene

$$\frac{p_b - p_a}{\gamma} = h' - h_A$$

la velocità del fluido è data da

$$\bar{w} = \frac{G}{\rho A} = \frac{1.47}{1000 \frac{\pi 0.025^2}{4}} = 3 \text{ m/s}$$

per determinare le perdite distribuite si ricavano i seguenti dati: rugosità dell'acciaio galvanizzato  $\epsilon = 150 \mu\text{m}$  ( $\epsilon/D = 0.006$ ), viscosità dell'acqua  $\mu = 1 \text{ mPa s}$ , densità dell'acqua  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , da cui  $Re = 75000$ ,  $\lambda = 0.033$ , per cui le perdite distribuite sono date da

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = 0.033 \frac{5 \cdot 3^2}{2 \cdot 0.025 \cdot 9.81} = 3.0 \text{ m}$$

le perdite concentrate sono dovute ai due gomiti ( $K_1=K_2=0.5$ ) per cui

$$h_{A,c} = \sum_{i=1}^2 K_i \frac{\bar{w}_i^2}{2g} = \frac{\bar{w}^2}{2g} \sum_{i=1}^2 K_i = \frac{3^2}{2 \cdot 9.81} 1 = 0.46 \text{ m}$$

in definitiva la prevalenza è data da

$$h' = \frac{p_b - p_a}{\gamma} + h_A = \frac{400000}{9810} + 3.46 = 44 \text{ m}$$

e la potenza assorbita

$$W_R = G g h' = 1.47 \cdot 9.81 \cdot 44 = 635 \text{ W}$$

In questo caso, gran parte della prevalenza della pompa è impiegata per vincere il salto di pressione tra i due serbatoi.

□

### **ESEMPIO 16 – Lancia antincendio**

L'ugello terminale di una lancia antincendio ha un diametro in ingresso  $D = 21 \text{ mm}$  ed un diametro in uscita  $d = 5 \text{ mm}$ . In esso scorre acqua a  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Trascurando le perdite di carico nell'ugello stesso, determinare la pressione all'ingresso quando in uscita si ha una velocità dell'acqua  $w_b = 180 \text{ m/s}$ .

La pressione in uscita è quella atmosferica (il getto è in contatto con l'atmosfera senza pareti di contenimento). Applicando la equazione di Bernoulli tra gli estremi dell'ugello (supponendolo orizzontale) si ha

$$\frac{p_b - p_a}{\gamma} + \frac{w_b^2 - w_a^2}{2g} = 0$$

dall'equazione di continuità si ha

$$\frac{w_a}{w_b} = \left( \frac{d}{D} \right)^2$$

e sostituendo nella precedente si ottiene

$$p_a - p_b = \frac{\rho w_b^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{1000 \cdot 324}{2} \left[ 1 - \left( \frac{5}{21} \right)^4 \right] = 1.61 \text{ bar}$$

Notare che, dato che in b vige la pressione atmosferica, il risultato rappresenta la pressione *relativa* a monte dell'ugello.

□

**ESEMPIO 17 - Problema inverso: determinazione del diametro della tubazione**

Si deve trasportare una portata  $Q = 0.09 \text{ m}^3/\text{s}$  di acqua ( $\mu = 1 \text{ mPa s}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) per una distanza di 100 m in un tubo commerciale di acciaio ( $\varepsilon = 45 \text{ }\mu\text{m}$ ) con una caduta di pressione inferiore a 900 kPa. Determinare il diametro minimo della tubazione.

La caduta di pressione può essere espressa in metri, applicando la equazione di Bernoulli tra gli estremi della tubazione

$$h_A = \frac{p_a - p_b}{\gamma} = \frac{900000}{9810} = 91.74 \text{ m}$$

Questo problema è complicato dal fatto che il valore di  $\lambda$  dipende dalla velocità del fluido, che non è nota a priori. Sono disponibili due metodi.

*Metodo I.*

Si procede per tentativi, determinando per primo un valore di  $D$  adottando  $\lambda = 0.02$ .

$$h_{A,d} = \lambda \frac{8LG^2}{\pi^2 g \rho^2 D^5} = \lambda \frac{8 L G_v^2}{\pi^2 g D^5}$$

$$D = \sqrt[5]{\lambda \frac{8LG_v^2}{\pi^2 g h_{A,d}}} = \sqrt[5]{0.02 \frac{8 \cdot 100 \cdot 0.09^2}{\pi^2 \cdot 9.81 \cdot 91.74}} = 0.11 \text{ m}$$

Con questo valore di  $D$ , siamo in grado di determinare il valore effettivo di  $\lambda$  e calcolare le perdite di carico reali. Dal diagramma di Moody si ha  $\lambda = 0.016$ , quindi

$$h_{A,d} = \lambda \frac{8 L G_v^2}{\pi^2 g D^5} = 68.5 \text{ m}$$

Dato che le perdite sono inferiori al previsto, si ricalcola il diametro adottando per  $\lambda$  l'ultimo valore trovato, e così via finché il calcolo non converge, il che in questo caso avviene dopo due iterazioni

$$D = 0.103 \text{ m}, \lambda = 0.017, h_{A,d} = 96.38 \text{ m}$$

$$D = 0.104 \text{ m}, \lambda = 0.017, h_{A,d} = 92 \text{ m}$$

Da notare che il diametro deve essere comunque arrotondato al valore superiore disponibile in commercio, quindi è inutile ricercare una precisione eccessiva.

*Metodo II.* Si fa uso della seguente formula empirica, dovuta a Swamee e Jain (le grandezze vanno espresse in unità SI):

$$D = 0.66 \left[ \varepsilon^{1.25} \left( \frac{LG_v^2}{gh_A} \right)^{4.75} + \frac{\mu}{\rho G_v} \left( \frac{LG_v^2}{gh_A} \right)^{5.2} \right]^{0.04}$$

che dà come risultato

$$D = 112 \text{ mm}$$

□

**ESEMPIO 18 – Coefficiente  $C_v$  delle valvole.**

In alcuni cataloghi, secondo l'uso anglosassone, le cadute di pressione nelle valvole vengono caratterizzate tramite il coefficiente di efflusso  $C_v$

$$C_v = G_v \sqrt{\frac{\rho_R}{\Delta p}}$$

che rappresenta la portata volumetrica di acqua  $G_v$  a temperatura ambiente (densità relativa  $\rho_R = 1$ ), in galloni per minuto (1 gal = 3.785 L), che fluisce nella valvola per effetto della caduta di pressione di  $\Delta p = 1$  psi (1 bar = 14.5 psi) ai suoi capi.  $C_v$  non è quindi una quantità adimensionale.

Data una valvola che ha un  $C_v = 1.2$ , trovare la portata di gasolio (densità relativa 0.75) che vi passa se ai capi della valvola sono applicate le pressioni  $p_1 = 20$  bar e  $p_2 = 8$  bar.

Dalla definizione di  $C_v$  si ottiene

$$G_v = C_v \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho_R}}$$

Da cui sostituendo  $\Delta p = 12$  bar = 174 psi si ottiene

$$G_v = 1.2 \sqrt{\frac{174}{0.75}} = 18.27 \text{ gpm} = 1.15 \text{ L/s}$$

Notare che per passare dal valore di  $C_v$  ad un valore del coefficiente di perdita concentrata per la valvola,  $K$ , è necessario definire una sezione di passaggio nominale  $A$  della valvola stessa e sfruttare la eguaglianza (con le opportune conversioni di unità di misura)

$$\Delta p = \frac{G_v^2 \rho_R}{C_v^2} = \frac{A^2 w^2 \rho_R}{C_v^2} = K \frac{\rho w^2}{2}$$

Notare anche che più alto è  $C_v$ , minore è la resistenza idraulica della valvola.

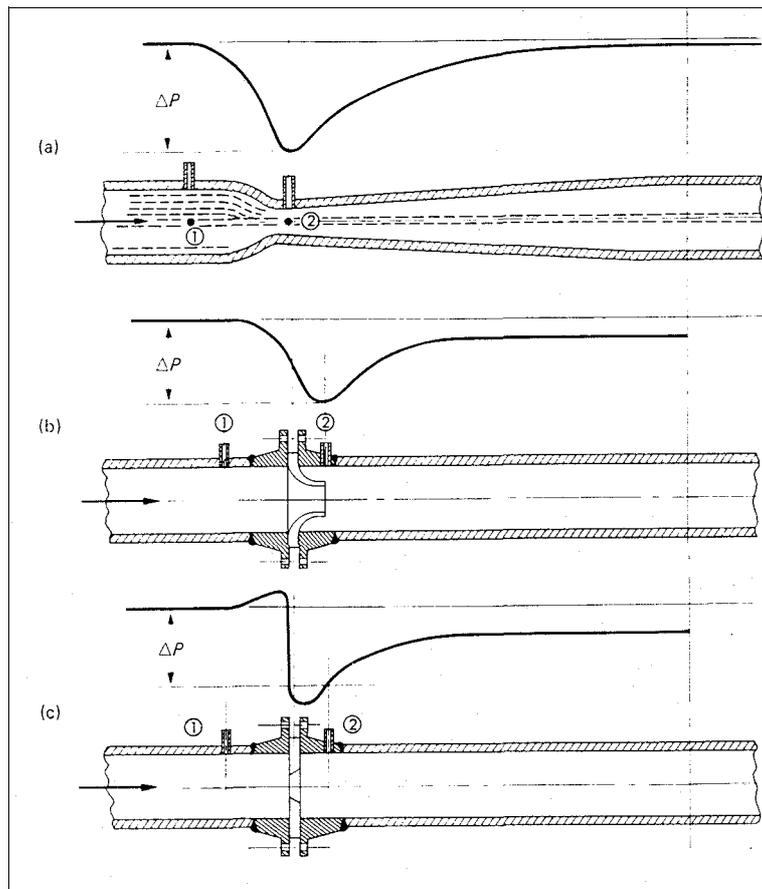


**(°) Misure di portata tramite dispositivi a strozzamento**

I dispositivi a strozzamento consentono di realizzare una misura della portata in un condotto tramite una misura di differenza di pressione tra due sezioni contigue, di differente area, del condotto. Il principio di funzionamento si basa sulla equazione di Bernoulli, e viene descritto nel seguito. Tali dispositivi si distinguono in: orifizi, boccagli e tubi di Venturi, vedi Fig.8.

Clemens Herschel (1842-1930), basandosi sugli studi di Giovanni Venturi (1746-1822), propose per primo l'omonimo dispositivo per la misura di portata.

La differenza principale tra le tre categorie, oltre alle ovvie distinzioni costruttive, consiste nel differente recupero di pressione che si verifica a valle dello strozzamento, che è pressoché totale nel tubo di Venturi e minimo negli orifizi. Le dimensioni ed i metodi di calcolo della portata sono prescritti da una serie di normative ANSI, ASME ed UNI/ISO. In particolare, la normativa italiana è riportata nella CNR-UNI 10023, 1979, *Misure di portata di correnti fluide per mezzo di diaframmi, boccagli o venturimetri inseriti su condotte in pressione a sezione circolare.*



**Figura 8:** Tipologie di dispositivi di misura di portata a strozzamento e relativo andamento della pressione: a) venturimetri, b) bocchelli, c) diaframmi.

**Funzionamento ideale dei dispositivi a strozzamento**

Il funzionamento ideale dei dispositivi a strozzamento è basato sulla equazione di continuità e sulla equazione di Bernoulli, applicate alla sezione del condotto, 1, supposta circolare di diametro  $D$ , ed alla sezione ristretta dello strozzamento, 2, anch'essa circolare di diametro  $d$ . Dall'equazione di continuità si ha

$$\rho_1 w_1 A_1 = \rho_2 w_2 A_2 \tag{31}$$

da cui, per un fluido incompressibile

$$\frac{w_1}{w_2} = \left( \frac{d}{D} \right)^2 \tag{32}$$

Dalla equazione di Bernoulli, considerando il fluido incompressibile, il condotto orizzontale, le perdite di carico nulle ed assenza di dispositivi di introduzione o di estrazione di energia, risulta:

$$\frac{p_1}{\rho_1 g} + \frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho_2 g} + \frac{w_2^2}{2g} \tag{33}$$

Combinando le due equazioni suddette, si ottiene che la portata ideale in un condotto percorso da un fluido incomprimibile è ottenibile dalla differenza di pressione misurata nella forma:

$$G = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2 \Delta p \rho_1}{1 - \beta^4}} \quad (34)$$

dove  $\Delta p = p_1 - p_2$  e  $\beta$  viene detto rapporto tra i diametri o rapporto di strozzamento ed è dato da

$$\beta = \frac{d}{D} \quad (35)$$

### **Funzionamento reale e relazione generale per il calcolo della portata**

Una serie di fattori rendono la teoria ideale inapplicabile. Tra di essi, la presenza di perdite di carico tra le due sezioni considerate, la contrazione della vena fluida, la localizzazione delle prese di pressione in zone di flusso disturbato. Del complesso di tali fattori si tiene conto tramite un coefficiente di scarico (*discharge coefficient*),  $C$ , definito come:

$$C = \frac{G_{ideale}}{G_{reale}} \quad (36)$$

tale coefficiente viene in genere determinato empiricamente, e le normative forniscono le relazioni per il suo calcolo per i diversi dispositivi e le diverse localizzazioni delle prese di pressione. Da notare che il coefficiente  $C$  è indipendente dal tipo di fluido considerato.

Nel caso che il fluido sia comprimibile, esso subisce una espansione (che in genere viene considerata adiabatica) tra la sezione a monte e lo strozzamento. Per tenere conto della variazione di densità del fluido, si introduce un ulteriore coefficiente,  $\varepsilon$ , detto coefficiente di comprimibilità, riportato anch'esso nelle normative, in cui compare il coefficiente di espansione isoentropica,  $k$ .

La relazione generale per il calcolo della portata tramite dispositivi di strozzamento risulta quindi

$$G = C \varepsilon \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2 \Delta p \rho_1}{1 - \beta^4}} \quad (37)$$

### **ESEMPIO 19 – Misura della portata tramite un tubo di Venturi**

Tra ingresso e gola di un venturimetro, avente diametro nominale  $D = 203.2$  mm e diametro della sezione ristretta  $d = 101.6$  mm, in cui fluisce acqua a  $20$  °C, viene letta una differenza di pressione  $\Delta p = 7563$  Pa. Determinare la portata nel condotto.

La portata è espressa da

$$G = C \varepsilon \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2 \Delta p \rho_1}{1 - \beta^4}}$$

dove  $\varepsilon = 1$  perché il fluido è incomprimibile, e dalla tabella CNR-UNI 10023 per i venturimetri si ha  $C = 0.97$ .

Il rapporto di strozzamento  $\beta$  vale 0.5. Quindi

$$G = C \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2 \Delta p \rho_1}{1 - \beta^4}} = 0.97 \frac{\pi 0.102^2}{4} \sqrt{\frac{2 \cdot 7563 \cdot 1000}{1 - 0.5^4}} = 31.8 \text{ kg/s} \quad \square$$

### Appendice 6.1 - TABELLE

Fluido	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Acqua	998.2
Acqua marina	1025
Alcool etilico	806
Benzina auto	660-690
Glicerina	1270
Kerosene	800-840
Mercurio	13546
Petrolio greggio	800-920
Tetracloruro di carbonio	1594

**Tabella A-1:** Densità di alcuni liquidi a 20 °C.

FLUIDO							
Acqua, T (°C)	4	21	66	93	149	232	288
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1000	997	979	962	917	826	735
$\mu$ (mPa s)	1.55	0.978	0.434	0.305	0.187	0.118	.0095
Olio leggero T (°C)	16	27	38	66	93	121	149
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	913	910	895	870	865	848	830
$\mu$ (mPa s)	86.6	41.4	22.8	7.88	3.72	2.07	1.24
Aria, T (°C)	0	38	93	204	427	816	1650
(p=1bar) $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1.296	1.136	0.96	0.735	0.503	0.323	0.183
$\mu$ (μPa s)	17.32	19.1	21.4	26.02	33.4	44.6	57.4

**Tabella A-2:** Viscosità e densità di alcuni fluidi in funzione della temperatura.

MATERIALE	da	a
calcestruzzo	300	3000
acciaio fuso	260	
acciaio galvanizzato	150	
acciaio commerciale	45	
tubo trafilato	1.5	

**Tabella A-3:** Rugosità media dei condotti in μm (valori indicativi).

Curva a 90°, brusca	1 - 1.35
Curva a 90°, raccordata	0.5 - 1
Curva a U	1.5
Restringimento di sezione (velocità valutata a monte)	0.5
Allargamento di sezione (velocità valutata a monte)	1
Ingresso in serbatoio	1
Uscita da serbatoio	1
Valvole completamente aperte	0.6-4
Valvole parzialmente aperte	2-20
Raccordo a T, passaggio dritto	1.0
Raccordo a T, diramazione	1.5
Raccordo a T, riunione	3.0

**Tabella A-4:** Coefficienti di perdita di carico concentrata (valori indicativi).

Diametro nominale (pollici)	Diametro esterno (mm)	Spessore (mm)	
		Standard	Extra Strong
1/2"	21.3	2.77	3.73
3/4"	26.7	2.87	3.91
1"	33.4	3.38	4.55
1 1/4"	42.2	3.56	4.85
1 1/2"	48.3	3.68	5.08
2"	60.3	3.91	5.54
2 1/2"	73	5.16	7.01
3"	88.9	5.49	7.62
3 1/2"	101.6	5.74	8.08
4"	114.3	6.02	8.56
5"	141.3	6.55	9.52
6"	168.3	7.11	10.97
8"	219.1	8.18	12.7
10"	273	9.27	12.7

**Tabella A-5:** Diametri dei tubi commerciali secondo ANSI B36.10-B36.19

## ESERCIZI

### ESERCIZIO 6.1

Con riferimento all'Esempio 1, calcolare il numero di Reynolds, supponendo una viscosità di 1.1 mPa s.

$$[Re = 9.74 \times 10^6]$$

### ESERCIZIO 6.2

Uno scambiatore di calore è costituito da due tubi coassiali, di diametro esterno rispettivamente 50 e 100 mm e di spessore 2 mm; nell'intercapedine tra i tubi scorre acqua alla velocità media di 2.4 m/s ed alla temperatura media di 21 °C. Calcolare il diametro idraulico ed il numero di Reynolds.

$$[D_H = 46 \text{ mm}, Re = 112.5 \times 10^3]$$

### ESERCIZIO 6.3

Il camino di una centrale termoelettrica deve trasportare una portata volumetrica  $Q = 300 \text{ m}^3/\text{s}$  di fumi. Supponendo che il camino sia circolare e di adottare un valore della velocità media del fluido di 10 m/s, calcolare il diametro del camino. Assumendo una viscosità dei fumi di 25  $\mu\text{Pa s}$ , una densità degli stessi di  $0.83 \text{ kg/m}^3$ , una lunghezza del camino di 120 m ed una rugosità relativa del condotto di  $2 \times 10^{-6}$ , calcolare le perdite di carico distribuite nel camino.

$$[D = 6.18 \text{ m}, Re = 2.05 \times 10^6, \lambda = 0.010, h_a = 1.03 \text{ m}]$$

### ESERCIZIO 6.4

Un olio di viscosità 2 Pa s e densità  $900 \text{ kg/m}^3$  scorre in un tubo orizzontale di diametro 20 mm e lunghezza  $L = 4 \text{ m}$  alla velocità di 0.5 m/s, per effetto di una differenza di pressione  $\Delta p$ . Determinare  $\Delta p$ . Per quale valore della velocità il moto cessa di essere laminare?

$$[\Delta p = 320 \text{ kPa}, w = 222 \text{ m/s}]$$

### ESERCIZIO 6.5

Si determini il legame tra perdite di carico e velocità media per moto turbolento in un tubo liscio, assumendo valida la legge di Blasius.

$$[h_a = K / D^{5.25}]$$

### ESERCIZIO 6.6

Con riferimento all'impianto di Fig.5 (impianto di sollevamento), determinare la portata di fluido che fuoriesce da una tubazione diritta di 20 mm di diametro che si estende dal serbatoio superiore fino a terra. Si assuma  $\lambda = 0.02$  e un livello di liquido di 2 m nel serbatoio superiore.

$$[w = 4.4 \text{ m/s}, G = 0.31 \text{ kg/s}]$$

### ESERCIZIO 6.7

Si devono pompare 10 L/s di olio di oliva ( $\mu = 82 \text{ mPa s}$ ,  $\rho = 918 \text{ kg/m}^3$ ) in una tubazione orizzontale lunga 30 m con una caduta di pressione massima di 30 kPa. Determinare il diametro minimo del tubo. (Suggerimento: supporre il moto laminare e verificare a posteriori).

$$[D = 75 \text{ mm}, Re = 1880]$$

### **ESERCIZIO 6.8**

Si deve pompare una portata  $G = 185 \text{ m}^3/\text{h}$  di kerosene ( $\mu = 80 \text{ mPa s}$ ,  $\rho = 820 \text{ kg/m}^3$ ) attraverso una tubazione di acciaio trafilato lunga 300 m con 3 gomiti a  $90^\circ$  in un serbatoio situato 20 m al di sopra di una pompa, che ha una pressione in uscita di 4.5 bar. Determinare il diametro minimo necessario per la tubazione. Si assuma  $\lambda = 0.02$ , verificando a posteriori che questo sia accettabile.

[0.13 m; il valore di  $\lambda$  calcolato a posteriori di è approssimativamente 0.02]

### **ESERCIZIO 6.9**

Due serbatoi A e B sono connessi da una tubazione di acciaio di diametro 60 cm lunghezza 9000 m, che si suppone abbia  $\lambda = 0.02$ . A si trova ad una quota 45 m superiore a B. Le perdite di carico concentrate sono trascurabili.

- quale portata volumetrica fluisce da A a B in assenza di pompe?
- che potenza di pompaggio è necessaria per pompare  $0.625 \text{ m}^3/\text{s}$  da A a B?
- che potenza di pompaggio è necessaria per pompare  $0.625 \text{ m}^3/\text{s}$  da B ad A?
- Determinare il valore effettivo di  $\lambda$  nel caso precedente se la tubazione ha una rugosità  $\epsilon = 900 \mu\text{m}$  (assumere  $\mu = 0.9 \text{ mPa s}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ).

[a)  $0.49 \text{ m}^3/\text{s}$ ; b) 29.7 m; c) 119.7 m; d) 0.015]

### **ESERCIZIO 6.10**

Viene proposto un acquedotto trans-Mediterraneo che trasporti orizzontalmente  $566 \text{ m}^3/\text{s}$  di acqua dolce in un condotto di 45.7 m di diametro lungo 800 km. Considerando solo le perdite di carico distribuite, stimare la caduta di pressione e la potenza di pompaggio necessaria. Il condotto, dato il diametro elevato, può essere considerato idraulicamente liscio.

[ $h_a = 0.37 \text{ m}$ ,  $W_p = 2 \text{ MW}$ ]

### **ESERCIZIO 6.11**

Si pompano  $90 \text{ m}^3/\text{h}$  di olio ( $\mu = 400 \text{ mPa s}$ ,  $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ ) attraverso una tubazione orizzontale in acciaio fuso di 100 mm di diametro ( $\epsilon = 0.05$ ) lunga 100 m. Quale è la caduta di pressione? Quale diametro di tubazione bisognerebbe adottare per ridurre le perdite di carico ad  $1/3$  del valore precedente, mantenendo costante la portata?

[ $\Delta p = 290 \text{ kPa}$ , 0.125 m]

### **ESERCIZIO 6.12**

La condotta forzata di una centrale idroelettrica trasporta acqua da un bacino per un dislivello di 900 m. Il tubo ha un diametro di 400 mm, una lunghezza di 1500 m e si contrae in fondo in un ugello ben rastremato di diametro 100 mm. Calcolare: a) la velocità di efflusso dall'ugello; b) la portata di acqua; c) la pressione prima della restrizione dell'ugello; d) la potenza meccanica teoricamente ottenibile dal getto di acqua (portata x energia cinetica specifica all'ugello) e) la potenza meccanica teoricamente disponibile (portata x variazione di energia potenziale specifica). Proporre un'azione correttiva per migliorare lo sfruttamento dell'energia disponibile.

Si assuma  $\lambda = 0.02$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  e si trascurino le perdite concentrate.

[a)  $55.7 \text{ m/s}$ ; b)  $437 \text{ kg/s}$ ; c)  $8.37 \text{ MPa rel.}$ ; d)  $678 \text{ kW}$  e)  $3.86 \text{ MW}$ ]