

# PROBLEMA DI CONTROLLO

Imporre a certe **variabili** di un “**processo**” un **comportamento desiderato**

Elementi essenziali del **problema** di **controllo**

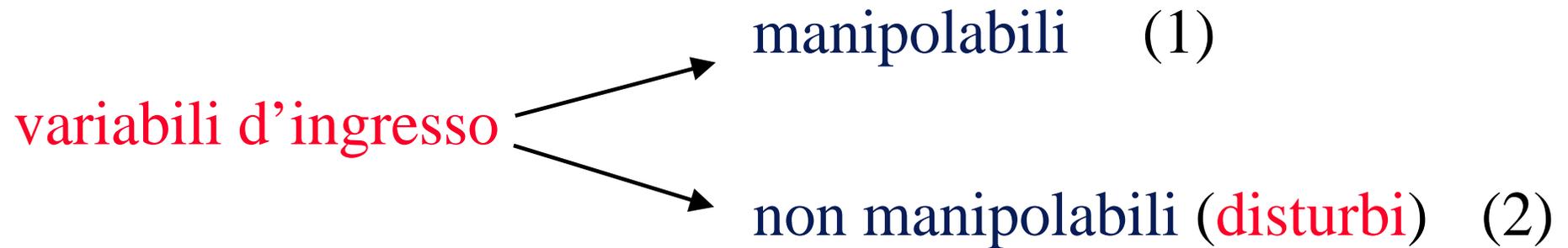
- **Processo** o **sistema controllato**
  - **variabili**
  - **relazioni** tra **variabili** = **modello matematico**
- **Comportamento desiderato**
  - **andamento desiderato** delle uscite
  - **tolleranze ammesse**
- **Criterio** di **scelta** tra le possibili **soluzioni**
  - **prestazioni**
  - **criteri di ottimo**

# IL CONTROLLO AUTOMATICO

- **Controllo** : insieme delle **azioni** indirizzate a far **variare** nel modo voluto una determinata **grandezza**
- **Controllo automatico**: l'azione di controllo è svolta da **dispositivi** capaci di **sostituire** l'intervento dell'uomo
- **Sistemi di controllo automatico**: **dispositivi fisici** mediante i quali si **realizza** l'azione di controllo

- Un **sistema di controllo** è composto da più elementi interconnessi.
- Le **grandezze** che nel **sistema** variano nel tempo sono dette **variabili**.
- Le **funzioni** che rappresentano l'**andamento** delle **variabili** nel tempo sono dette **segnali**.
- Generalmente l'**evoluzione** di alcune **variabili** è conseguenza di quella di altre; abbiamo allora:

**variabili di ingresso o indipendenti o cause**  
**variabili di uscita o dipendenti o effetti**

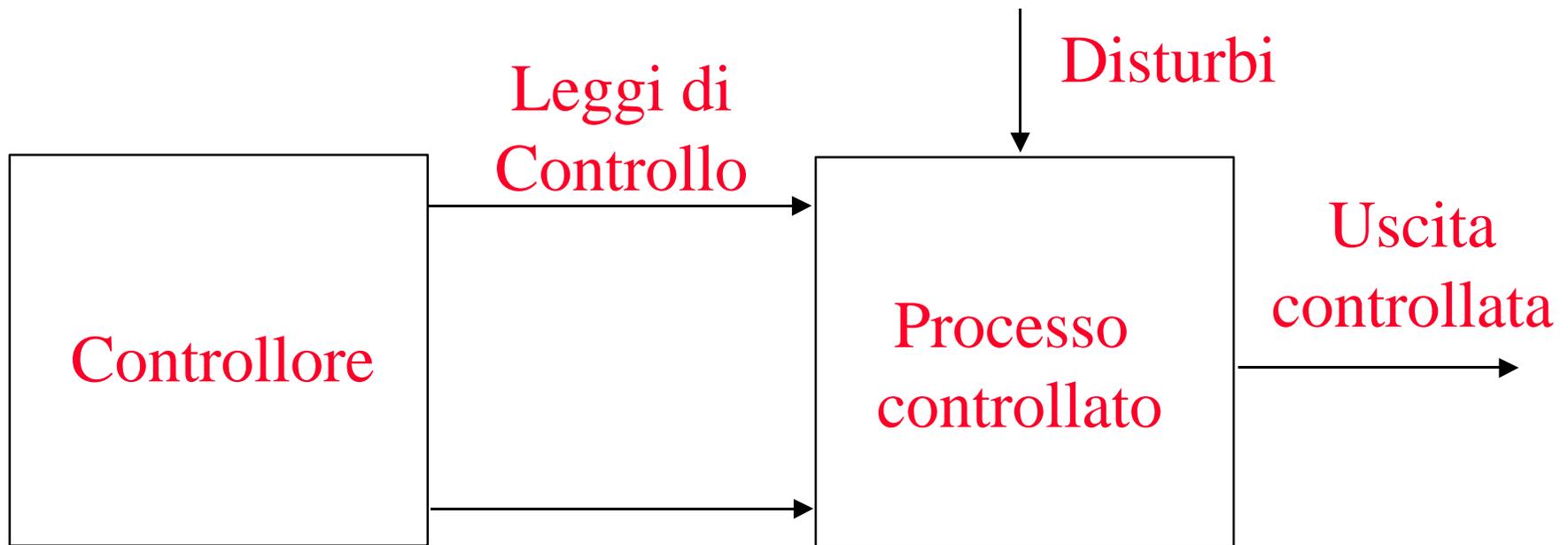


(1) Il loro andamento può essere arbitrariamente imposto

(2) Il loro andamento non può essere influenzato dal **sistema** di **controllo**

Tipiche grandezze non manipolabili: **disturbi**

- In definitiva un **sistema di controllo automatico** dovrà far sì che una **variabile d'uscita** segua **il più fedelmente possibile** l'andamento imposto da una **variabile d'ingresso (riferimento)** nonostante la presenza di **disturbi** e/o di **variazioni parametriche**.



- La distinzione tra **controllore** (sistema controllante) e **processo controllato** è generalmente ben fondata in termini energetici, ossia di potenza associata rispettivamente all'**uscita controllata** ed agli **ingressi controllanti**.
- Un **sistema di controllo** può essere convenientemente studiato come **sistema interconnesso**.

- L'intervento si realizza tramite un altro sistema:
  - ✓ la sua uscita coincide con l'ingresso del processo e deve essere tale che ad esso si possa imprimere la "legge oraria" necessaria a far assumere all'uscita controllata il valore (o la successione di valori nel tempo) desiderato.

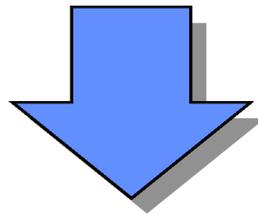
# PROBLEMA DI CONTROLLO

Imporre a certe **variabili** di un “**processo**” un **comportamento desiderato**

Elementi essenziali del **problema** di **controllo**

- **Processo** o **sistema controllato**
  - **variabili**
  - **relazioni** tra **variabili** = **modello matematico**
- **Comportamento desiderato**
  - **andamento desiderato** delle uscite
  - **tolleranze ammesse**
- **Criterio** di **scelta** tra le possibili **soluzioni**
  - **prestazioni**
  - **criteri di ottimo**

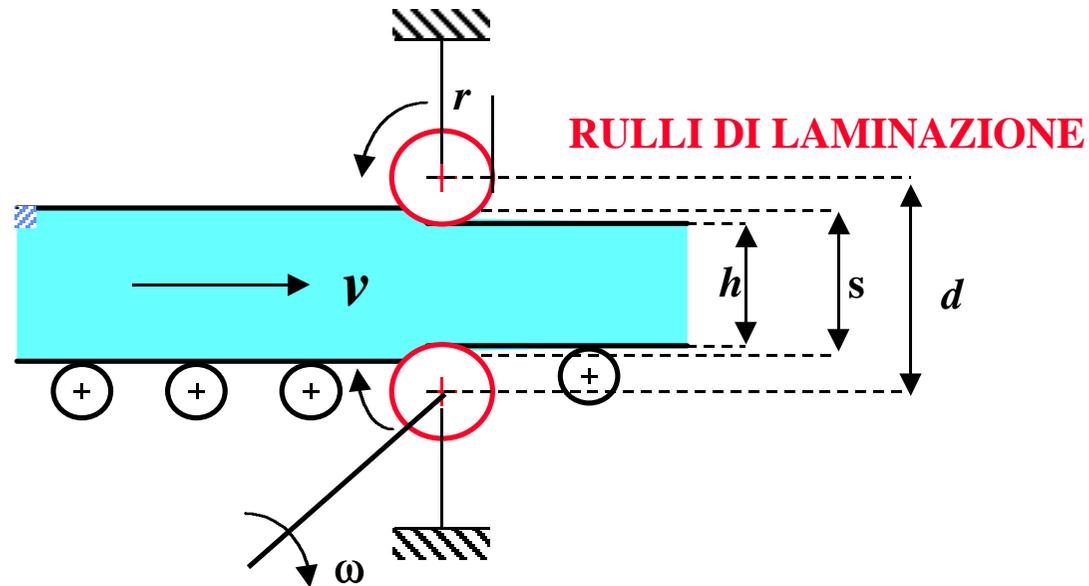
- Modello matematico : **Sistema Astratto Orientato (S.A.O.)**.
- **Grandezze controllate** e **grandezze controllanti** devono garantire l'efficacia dell'intervento



**Sistema raggiungibile e osservabile**

- Non si può prescindere dalla presenza di **disturbi** il cui effetto deve essere eliminato o ridotto.

# Esempio: laminazione



- Obiettivo : spessore prefissato
- **variabile controllata** :  $s$  (obiettivo  $s = \bar{s}$  )
- **variabili manipolabili** :  $d, v$

## Modello matematico del processo

Ipotesi:  $v$  non influisce su  $s$  ( accettabile nella misura in cui  $v$  rimane costante  $\Rightarrow \omega$  deve essere mantenuta costante)

$$s = \alpha h \quad (\alpha \text{ è determinabile sperimentalmente})$$

$$h = d - 2r$$

$$s = \alpha (d - 2r)$$

Problema di controllo : determinare l'azione da svolgere su  $d$  in modo che  $s = \bar{s}$

soluzione ovvia :  $d = \frac{\bar{s}}{a} + 2r$

Ma :

- **r varia** nel tempo per usure . Sia :

$$r = \bar{r} \quad \text{all'inizio}$$

$$r = \bar{r} - \mathbf{e} \quad \text{al momento della sostituzione}$$

Scelta ragionevole  $r_n = \bar{r} - \frac{\varepsilon}{2}$  (raggio medio) :

- **$\alpha$  dipende** dalle **caratteristiche** del materiale del lingotto (temperatura, composizione chimica, trattamenti precedenti)

$$\alpha = \alpha_n \quad \text{in dipendenza. delle } \mathbf{propriet\grave{a}} \\ \mathbf{statistiche} \text{ della partita}$$

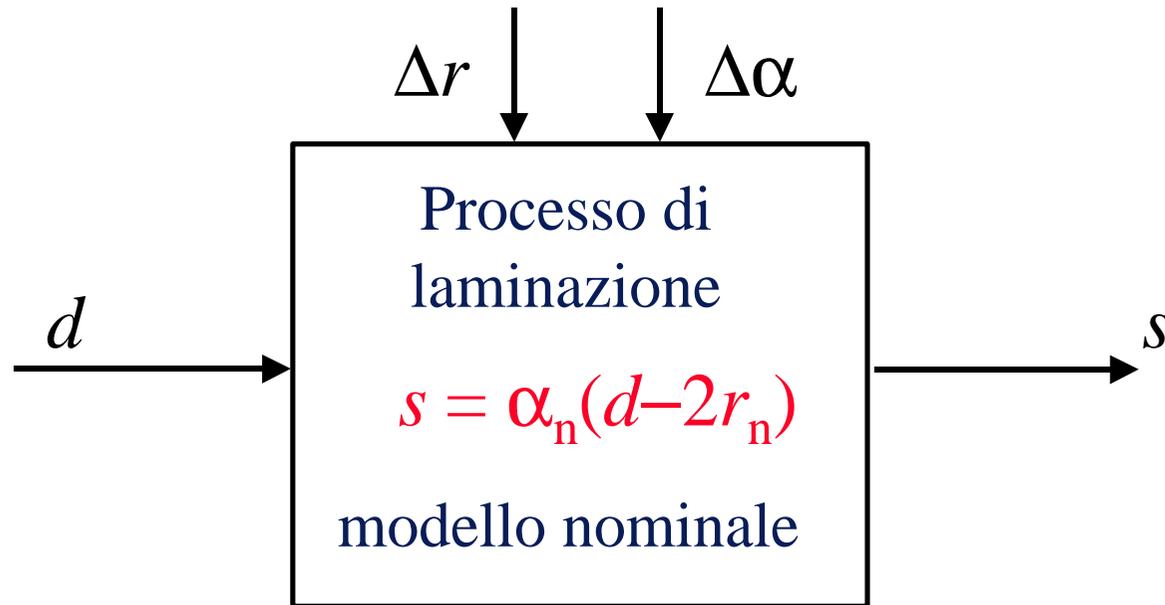
## Modello "medio"

$$s = \mathbf{a}_n(d - 2r_n) \quad \text{modello nominale}$$

$\alpha_n, r_n$  valori nominali dei parametri

- È una descrizione approssimata del comportamento del **processo**, ossia contiene un certo livello di **incertezza**.
- **incertezza**  $\Leftrightarrow$  **disturbi ignoti** istante per istante

- Informazione "a priori" sui **disturbi**:  
$$\Delta r \in \left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$$
$$\Delta \alpha \in R_\alpha$$



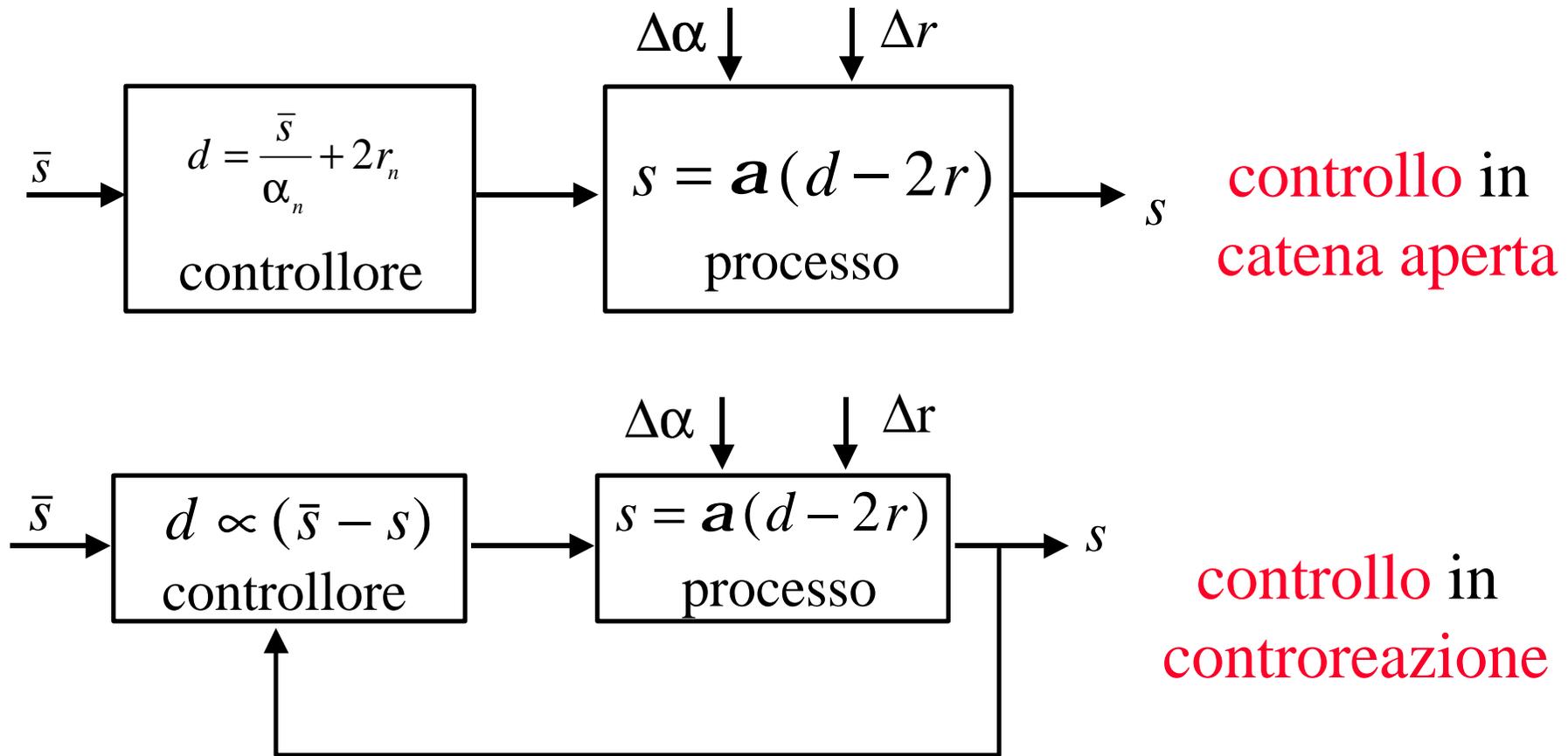
$$d = \frac{\bar{s}}{\mathbf{a}_n} + 2r_n \quad \text{ignora i } \mathbf{disturbi} \text{ e comporta } \mathbf{errore} \text{ su } s$$

Ponendo:  $\Delta r = r - r_n$      $\Delta \alpha = \alpha - \alpha_n$  , si ha:

$$\begin{aligned}
 s = \mathbf{a}h = \mathbf{a}(d - 2r) &= (\mathbf{a}_n + \Delta \mathbf{a}) \left[ \frac{\bar{s}}{\mathbf{a}_n} + 2r_n - 2(r_n + \Delta r) \right] = \\
 &= \boxed{\bar{s} - 2\alpha_n \Delta r + \frac{\bar{s}}{\alpha_n} \Delta \alpha - 2\Delta \alpha \Delta r}
 \end{aligned}$$

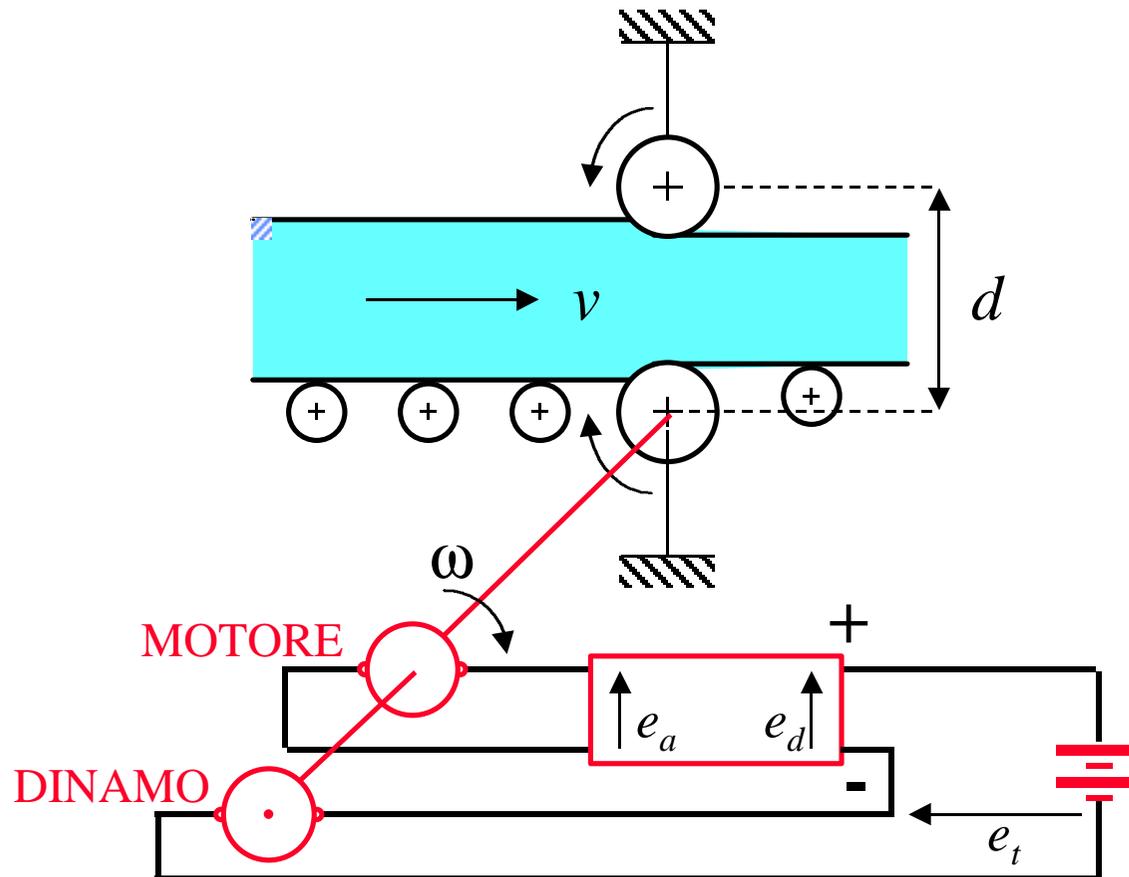
- Per contrastare l'effetto dei **disturbi** occorre **mutare strategia di controllo**.
- Conviene
  - ✓ misurare  $s$
  - ✓ valutare  $\bar{s} - s \equiv \Delta s$
  - ✓ usare il valore attuale di  $\Delta s$  per aggiornare  $d$  :

$$d \propto (\bar{s} - s) \quad ; \quad d \propto \text{sgn}(\bar{s} - s)$$



- lo schema a **controeazione** permette di padroneggiare l'**incertezza**
- si è considerato **solo** un **requisito statico**: occorre considerare anche **requisiti dinamici**.

# Esempio: controllo della velocità della gabbia di un laminatoio



Obiettivo :  $\omega = \bar{\omega}$  costante prefissata .

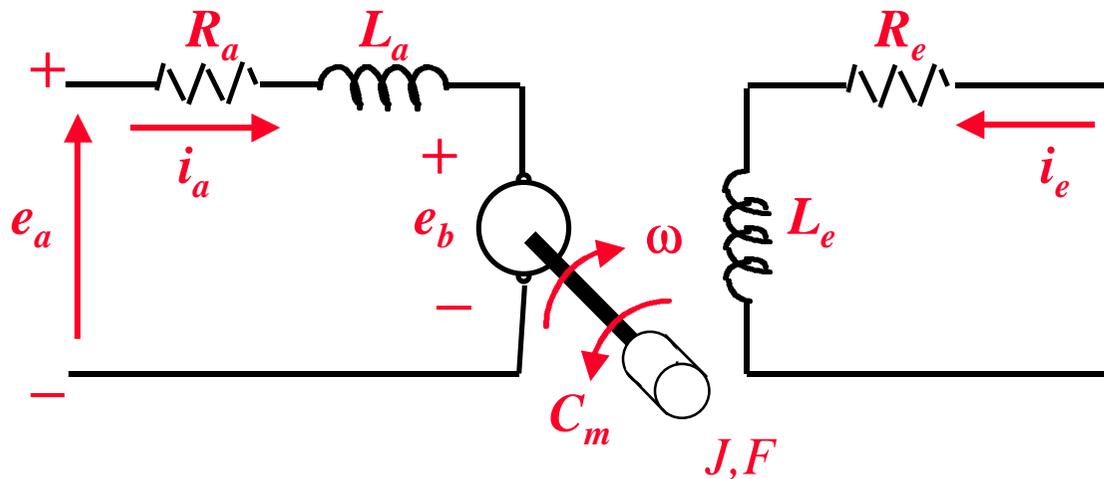
$\omega$  : **variabile controllata**

$e_a$  : **variabile manipolabile**

Nota : Il **processo** è il **motore** comprensivo del **carico meccanico** costituito dal lingotto che impegna la gabbia. La **brusca variazione** di **carico** che si ha quando il lingotto comincia a impegnare i rulli può essere rappresentata come un **disturbo**.

# MODELLO MATEMATICO

- Dinamo :  $e_t = k_t \omega$
- Riferimento :  $E_0 = k_t \bar{\omega}$
- Confronto :  $e_d = k_t (\bar{\omega} - \omega)$
- Motore :



- Avvolgimento di campo (**statore**) connesso a **sorgente** di alimentazione a **tensione costante**  $\Rightarrow i_e = \text{costante} \Rightarrow \Rightarrow \Phi_e = \text{costante}$ .
- Avvolgimento di armatura (**rotore**) connesso a **sorgente** a **tensione variabile**  $\equiv$  tensione di comando di  $\omega$ .

$$e_b(t) = k'_m \omega(t)$$

$$e_a(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + e_b(t)$$

- Coppia motrice disponibile sul rotore (sull'albero) =  $C_m$

$$C_m(t) = k_m i_a(t)$$

$$C_m(t) = C_d(t) + J \frac{d\omega(t)}{dt} + F\omega(t) \quad (k_m = k'_m)$$

$J$  = momento d'inerzia rotore e rulli

$F$  = coefficiente di attrito viscoso

Il motore è un **sistema interconnesso**. Posto:

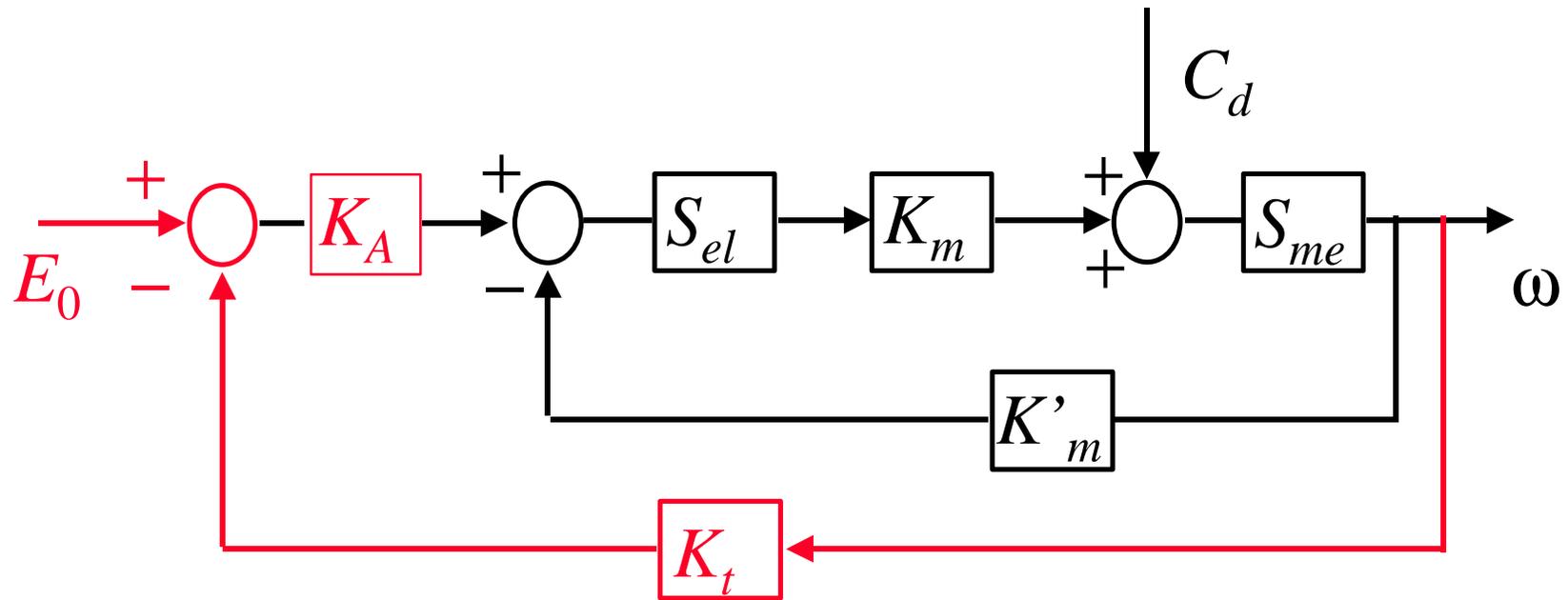
$$i_a(t) = x_1(t) \quad , \quad \omega(t) = x_2(t) \quad \text{si ha :}$$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{R_a}{L_a} x_1(t) + \frac{1}{L_a} [e_a(t) - e_b(t)] \quad (\text{ sistema elettrico } )$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{F}{J} x_2(t) - [C_m i_a(t) - T_m(t)] \quad (\text{ sistema meccanico } )$$

$$C_m = K_m i_a$$

$$e_m = e_a - e_b = e_a - K_m' \omega \quad (\text{ interconnessioni } )$$



L'intero sistema di controllo è un sistema interconnesso

# PRESTAZIONI STATICHE

Ipotesi :

- disturbo di valore costante
- grandezza controllata a valore costante

Esiste una situazione di equilibrio, esiste una risposta di regime permanente sotto stimoli costanti.

$$\frac{di_a(t)}{dt} = 0 \Rightarrow R_a \tilde{i}_a = e_m \quad \frac{d\omega(t)}{dt} = 0 \Rightarrow F\tilde{\omega} = K_m \tilde{i}_a - C_d$$

$$e_m = K_A e_d - K_m' \tilde{\omega} ; \quad \tilde{i}_a = \frac{F\tilde{\omega} + C_d}{K_m} ; \quad \tilde{\omega} = \frac{K_A K_m \bar{\omega} - (R_a / K_m) C_d}{(R_a F / K_m) + K_A K_t + K_m'}$$

- $K_A$  è il **parametro** a disposizione del **progettista**
- È **parametro** di un dispositivo in **catena diretta**
- Può essere **grande** a piacere, compatibilmente con le prestazioni dinamiche, **ma finito**.

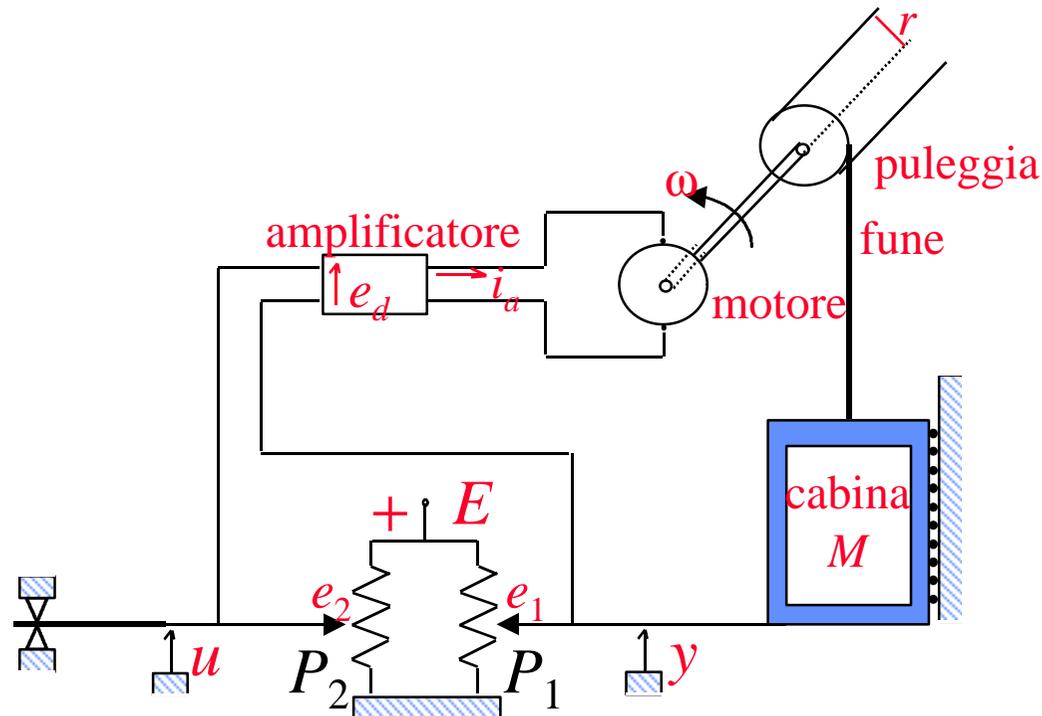
# VARIAZIONI PARAMETRICHE

- **Derive** affidabilità dei componenti
- **Scostamenti dai valori nominali** classe dei componenti e dei dispositivi
- **Ignoranza sul processo** complessità del processo, sua intrinseca incertezza

Approcci al problema delle **variazioni parametriche**

- **Sensibilità**
- **Robustezza**

# Esempio : controllo della quota di un montacarichi



## Ipotesi:

- separazione tra amplificatore e potenziometri
- fune inestensibile

- Obiettivo :  $y = \bar{u}$  , quota prestabilita.
- $y$  : variabile controllata ,  $i_a$  : variabile manipolabile.
- $M$  è soggetta a variazioni ignote ai fini del controllo.

## Modello matematico

- Potenzimetri:  $e_1 = \left( \frac{E}{R_1} \rho_1 \right) y$      $e_2 = \left( \frac{E}{R_2} \rho_2 \right) y$
- Confronto :  $e_d = e_2 - e_1$
- Amplificatore :  $i_a = K_a e_d$
- Motore : motore in **corrente continua**, **eccitazione indipendente**, **comandato in corrente** sull'armatura.

$$C_m = K_m i_a$$

## Equilibrio dinamico della cabina :

$$\begin{aligned} \text{a) } C_m &= C_r \\ C_r &= r(M\ddot{y} + F\dot{y} + Mg) \end{aligned}$$

sull'albero motore:  
coppie

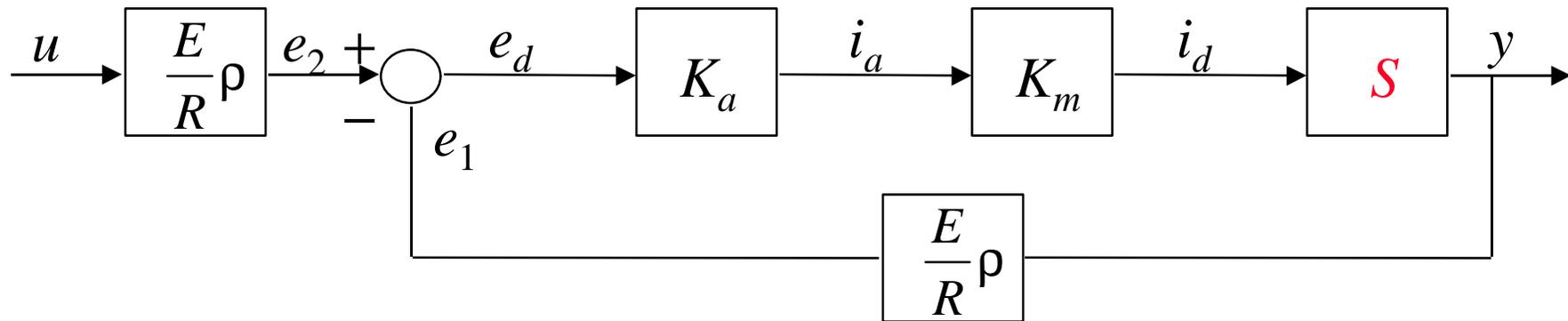
$M$  : massa della cabina

$F$  : coefficiente di attrito  
viscoso

$g$  : accelerazione di gravità

$$\text{b) } \frac{C_m}{r} = \frac{C_r}{r} \longrightarrow$$

sulla gola della puleggia:  
forze



$$S : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{F}{m} x_2 - g + \frac{K_m}{r \cdot M} i_a \\ y = x_1 \end{cases}$$

## Prestazioni statiche

- **Ipotesi** : condizioni di **equilibrio**  $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \dot{x}_1 = 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$

$$C_r = r \cdot Mg$$

$$C_m = K_m i_a = K_m K_a e_d = K_m K_a \frac{E}{R} \rho \cdot (\bar{u} - \tilde{y})$$

$$\tilde{y} = \bar{u} - \frac{r \cdot Mg}{K_m K_a} \cdot \frac{R}{E \rho}$$

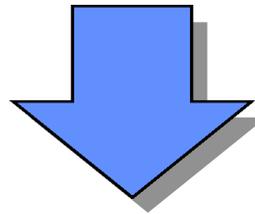
- $K_a$  è il **parametro** a disposizione del **progettista**
  - ✓ è **parametro** di un dispositivo in **catena diretta**
  - ✓ può essere **grande a piacere** , compatibilmente con le **prestazioni dinamiche**.

# SISTEMI DI CONTROLLO A CONTROREAZIONE O A CATENA CHIUSA

- Effetti dei **disturbi**
- Effetti di **variazioni** dei **parametri** della **catena diretta**

possono essere resi **piccoli a piacere (!)** scegliendo opportunamente **parametri** dei **sottosistemi** in **catena diretta**

- Ambedue le proprietà dipendono dalle modalità di funzionamento dei **sistemi di controllo a controreazione**, cioè dal fatto che, qualunque ne sia la causa, viene utilizzato ai fini del **controllo** lo scostamento del valore effettivo dell'uscita dal **valore desiderato**



- La **grandezza controllata** deve essere accessibile alla **misura**
- La **precisione** di tale **misura** stabilisce il **limite massimo di precisione** dell'intero **sistema di controllo**  $\Rightarrow$  sono sempre preferibili **misure dirette** della **grandezza controllata**.

Il principio della **controreazione** sfrutta ai fini del **controllo** l'informazione sul comportamento attuale del **processo**:

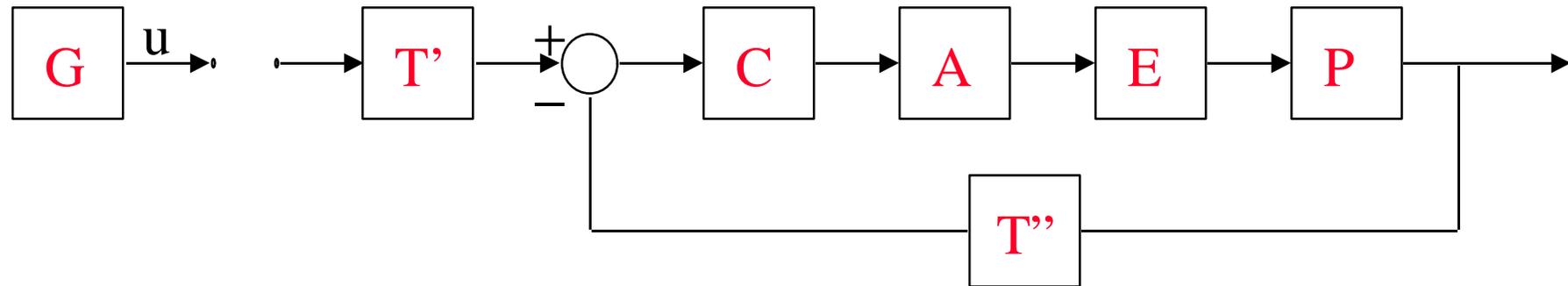
- ✓ misura la **grandezza controllata**
- ✓ confronta con il **valore desiderato**
- ✓ elabora lo scarto per produrre la **grandezza controllante**.

Padroneggia così l'**incertezza** sul reale comportamento del **processo**

# COMPONENTI FONDAMENTALI DEI SISTEMI DI CONTROLLO A CONTROREAZIONE

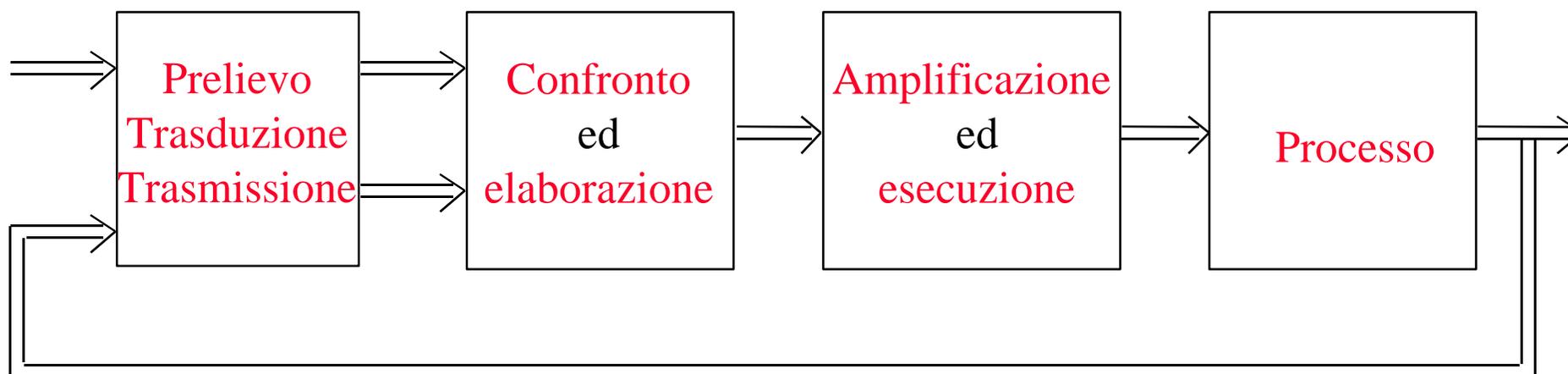
- Trasduttori
- Amplificatori
- Attuatori od esecutori
- Linee di trasmissione
- Generatori di riferimento

- Lo schema generale di un **sistema di controllo a controreazione** è , nel caso di **un ingresso ed un'uscita**, il seguente:

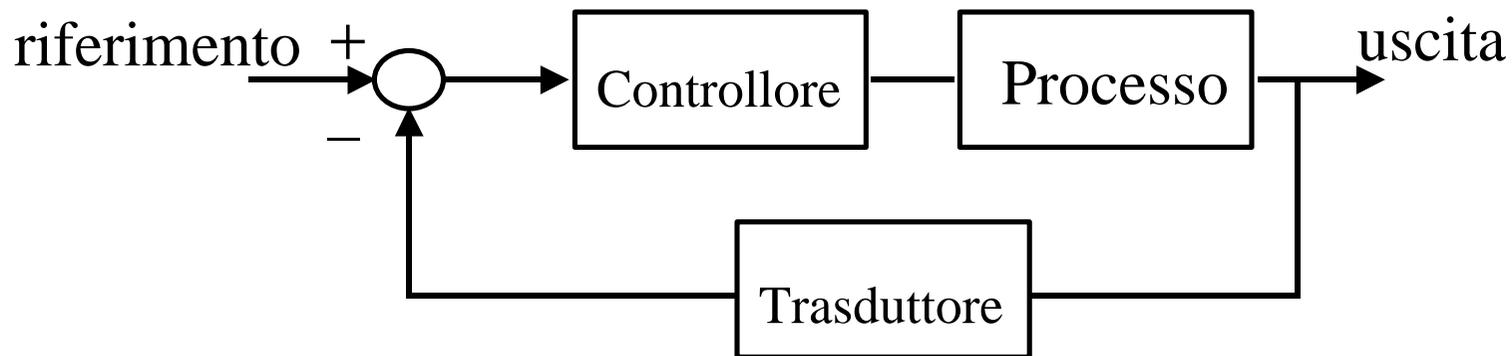


- $G$  : generazione del riferimento
  - $T'$  e  $T''$  : trasduzione
  - $C$  : correzione
  - $A$  : amplificazione
  - $E$  : esecuzione
  - $P$  : processo
- L'uscita dell'organo di confronto viene usualmente denominata **grandezza agente**

- Lo schema precedente può essere generalizzato al caso in cui le **grandezze controllate** siano più di una nel seguente modo, che tiene conto delle **affinità funzionali** fra alcuni organi.



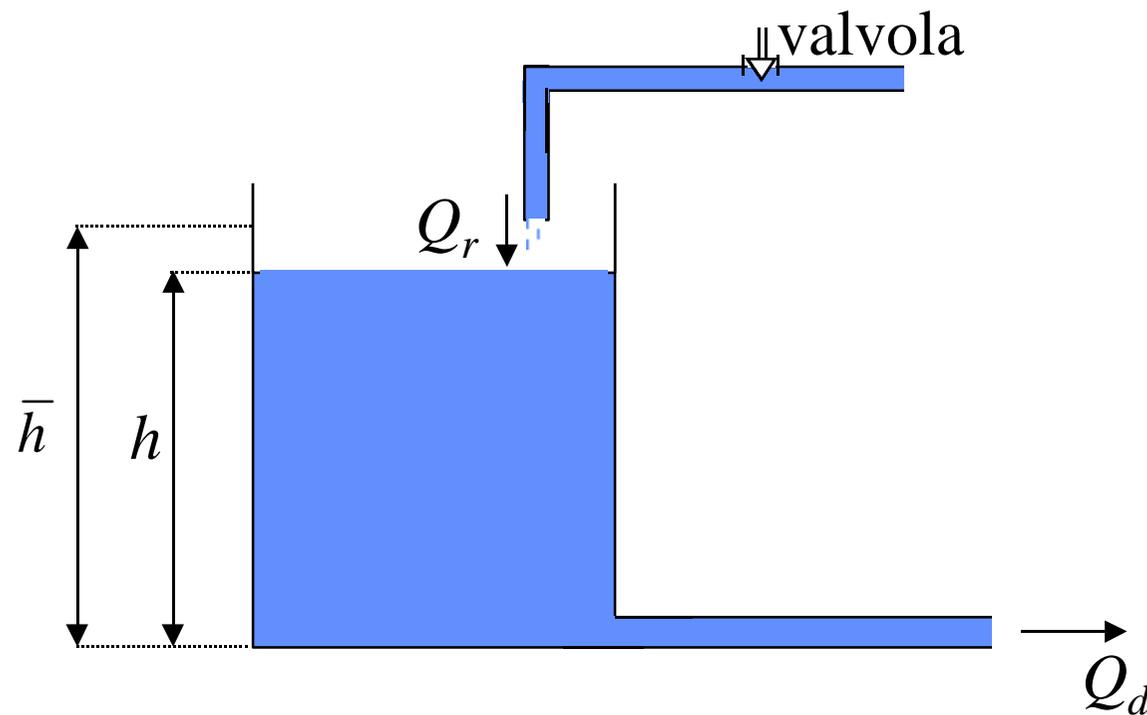
- In generale **riferimento** ed **uscita controllata** sono grandezze fisiche **non omogenee**: occorre allora **trasdurre** l'**uscita** in una **grandezza fisica** confrontabile con l'**ingresso**.
- La **catena di retroazione** contiene un organo di **trasduzione** il cui compito è quello di rendere l'**uscita** confrontabile con l'**ingresso**.
- Generalmente il **trasduttore** è caratterizzato da un blocco **istantaneo**: la sua **funzione di trasferimento** è **costante**.



# SISTEMI DI CONTROLLO

- A **controreazione** un ingresso - un'uscita
- Con schemi di **controllo** diversi
- Con problemi di **controllo** più complessi

# Esempio: impianto idraulico di piccola potenzialità



Obiettivo : rifornire d'acqua gli utenti per tutta la giornata (serbatoio mai vuoto) ed in modo regolare (livello costante nel serbatoio :  $h = \bar{h}$  ).

## Soluzione a compensazione diretta o in catena aperta

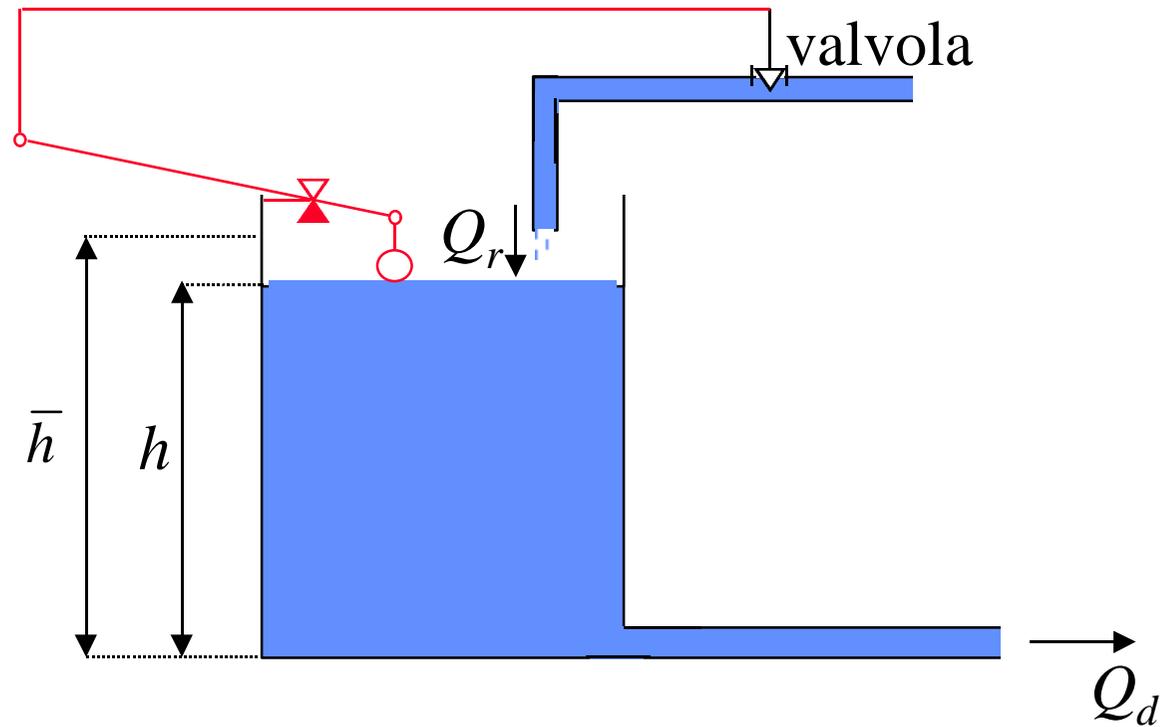
$a$  = apertura valvola

$$Q_r = K_v a$$

$a = a_0$  : valore determinato in base  
alla statistica dell'utenza

$$K_v a_0 = \hat{Q}_r = \hat{Q}_d$$

# Soluzione in controreazione o a catena chiusa



- **Processo** :  $S \frac{dh}{dt} = Q_r - Q_d$
- **Valvola** :  $Q_r = K_v a$
- **Leva** :  $Q = Q_0 + K_l (\bar{h} - h) = Q_0 + K_l \Delta h$

All'equilibrio ( **prestazioni statiche** ) :

$$h = \tilde{h} = \text{cost.} \neq \bar{h} \Rightarrow \left. \frac{dh}{dt} \right|_{\tilde{h}} = 0 \Rightarrow \frac{\tilde{Q}_r - \tilde{Q}_d}{S} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{Q}_r = \tilde{Q}_d \quad . \text{ Poiché : } \tilde{Q}_r = K_v \tilde{a} = K_v a_0 + K_v K_l (\bar{h} - \tilde{h}) \Rightarrow$$

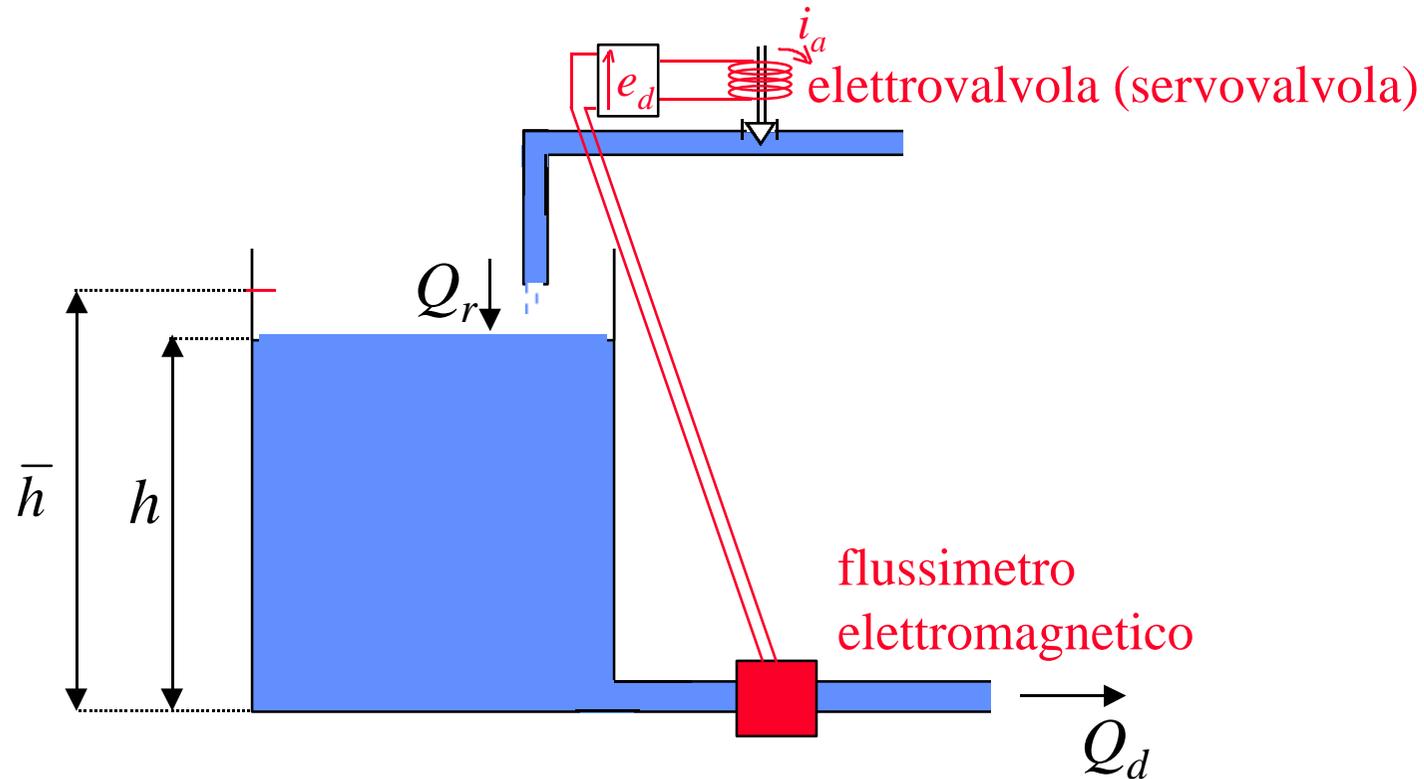
$$\Rightarrow \tilde{h} = -\frac{\tilde{Q}_d}{K_v K_l} + \frac{a_0}{K_l} + \bar{h} \quad . \text{ Sia : } \tilde{Q}_d = \hat{Q}_d + \Delta Q_d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{h} = \frac{a_0}{K_l} + \bar{h} - \frac{\hat{Q}_d}{K_v K_l} - \frac{\Delta Q_d}{K_v K_l}$$

$$\text{Sia : } a_0, \bar{h} : h = \bar{h} \text{ per } Q_d = \hat{Q}_d \Rightarrow \boxed{\tilde{h} = \bar{h} - \frac{\Delta Q_d}{K_v K_l}}$$

$K_v$  ,  $K_l$  a disposizione del progettista.

# Soluzione a compensazione diretta o a catena aperta



$$e_d = K_f Q_d$$

$$i_a = K_a e_d$$

$$a = K_s i_a$$

$$Q_r = K_v a = K_v K_s K_a K_f Q_d = Q_d$$

dimensionamento  
componenti

Compensazione completa ed istantanea  
del **disturbo**, ma **solo** di **quel disturbo**.

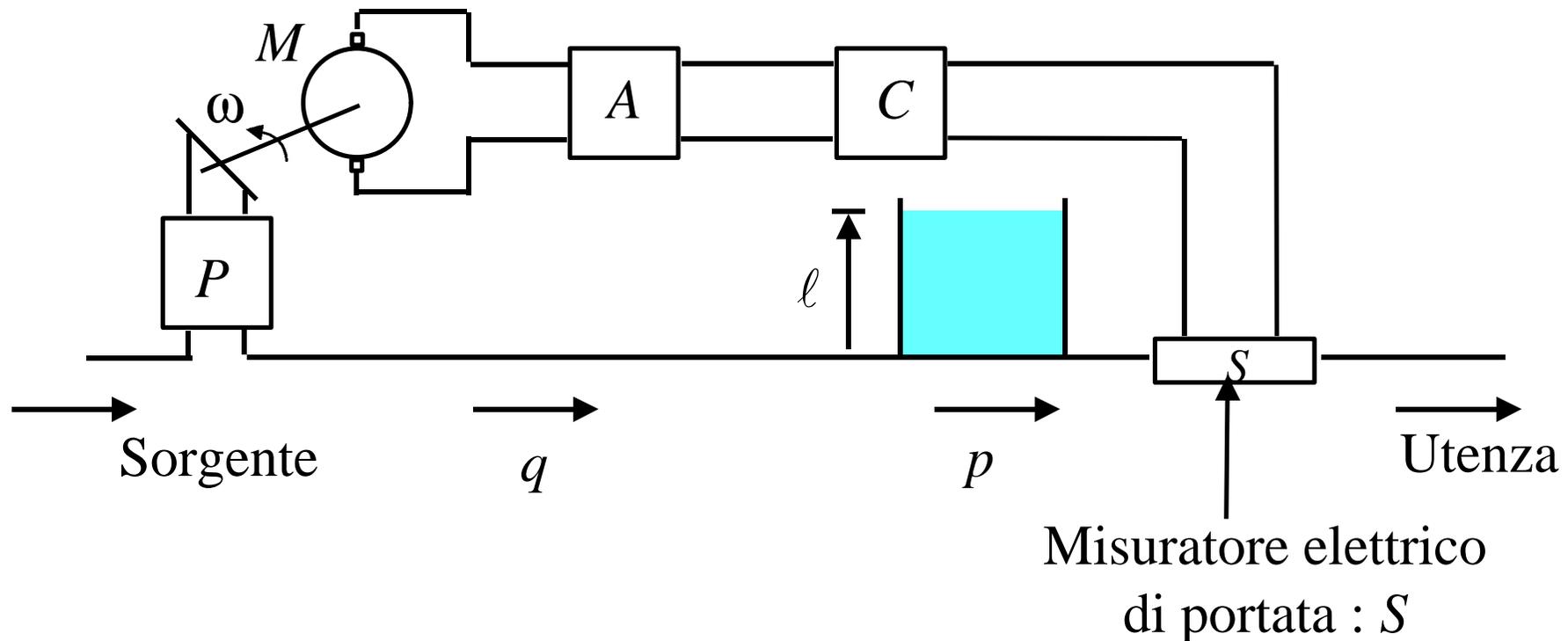
Portata pluviale :  $\Delta Q_p$

- a **controreazione** : 
$$h = \bar{h} + \frac{\Delta Q_p}{K_l K_v}$$
- a **compensazione diretta** : 
$$h = \bar{h} + \frac{1}{S} \int_0^t \Delta Q_p dt$$

# CONTROLLO A COMPENSAZIONE DIRETTA O A CATENA APERTA

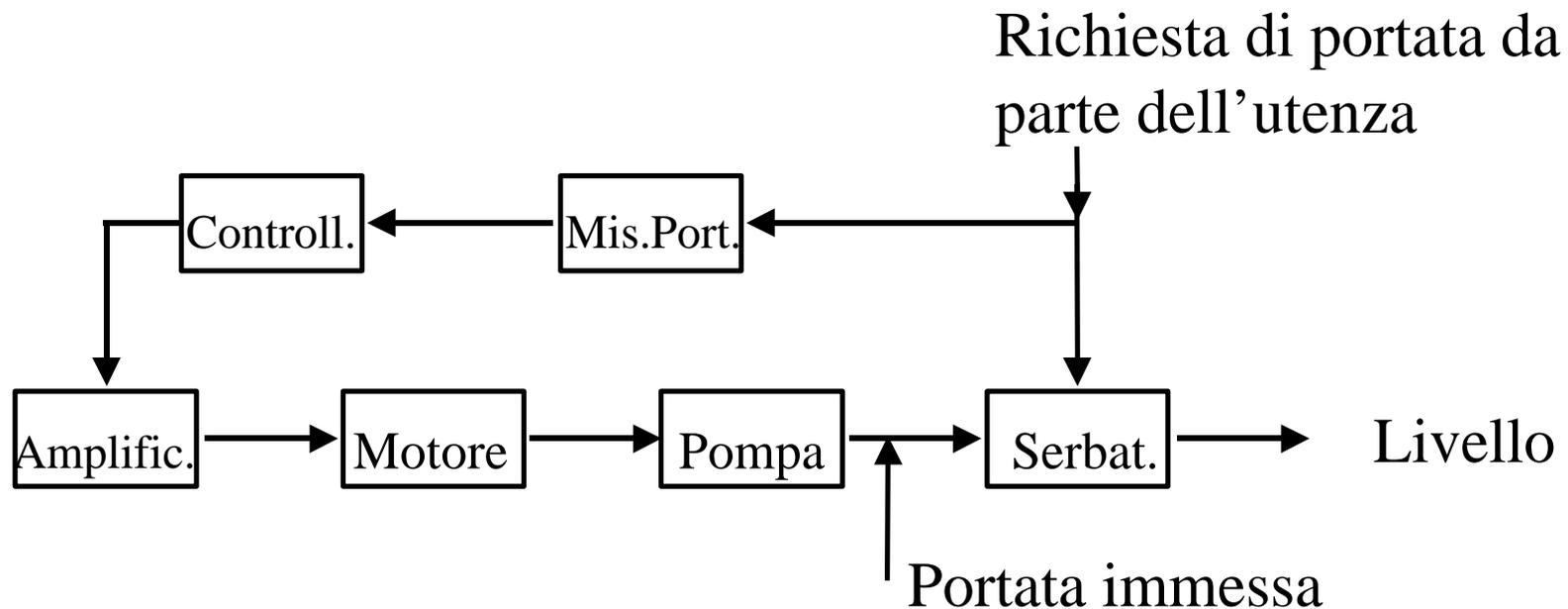
- Si basa sulla **possibilità** (quando esiste) di **intervenire sulla causa** che provoca l'**errore** cercando di **rimuoverla**.

## Esempio

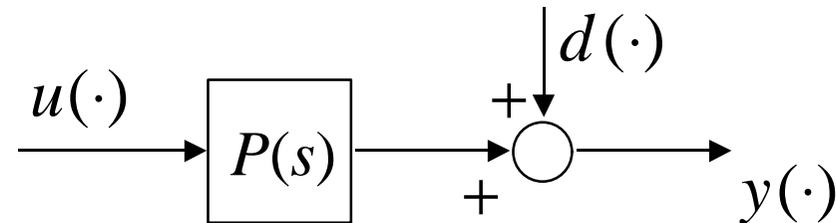


- $S$  misura  $p$  e comunica  $p$  a  $C$  (**controllore**) il quale, attraverso il motore ( $M$ ) e la pompa ( $P$ ), **impone** una portata  $q$  uguale a quella **misurata**  $p$ .
- Il **principio** è quindi quello di **misurare** la causa d'errore nella **grandezza controllata** ( il livello) e di **compensare** tali cause.
- L' **azione** di **controllo** viene svolta lungo due vie parallele che non si chiudono su se stesse ma confluiscono sul **processo** formando delle **catene aperte**.

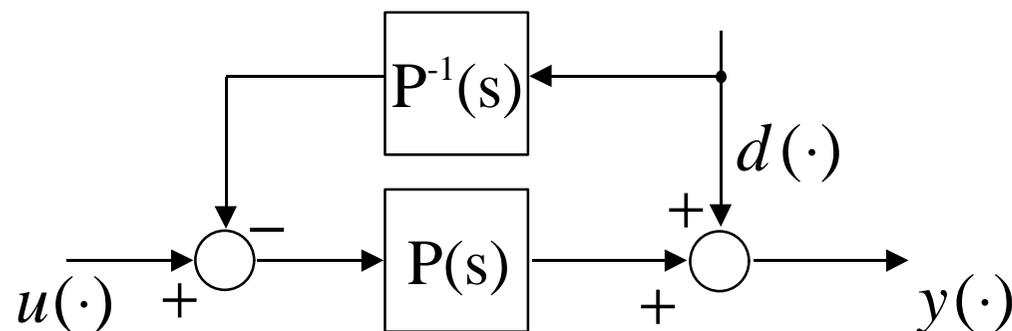
- Ovvero, il **controllore** (nel caso in esame **regolatore**) opera utilizzando informazioni che provengono dal **processo**, relative a **variabili diverse dalla variabile controllata**.



# CONTROLLO A COMPENSAZIONE DIRETTA O A CATENA APERTA



- **Obiettivo** : a parità di  $u(\cdot)$  l'**uscita** rimanga invariata sia in assenza che in presenza di  $d(\cdot)$  .
- **Soluzione** : sotto l'ipotesi di **linearità**

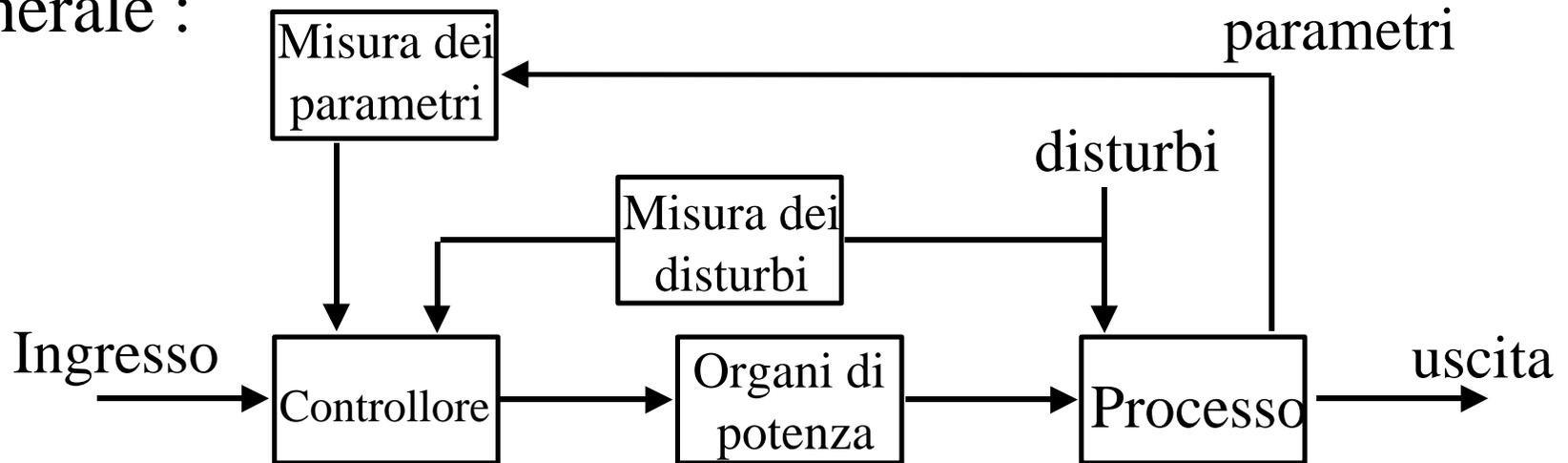


$$y(s) = P(s)u(s) + d(s) - P(s)P^{-1}(s)d(s) = P(s)u(s)$$

La **soluzione** implica :

- accessibilità alla **misura** del **disturbo**
- **fisica realizzabilità** del **controllore**

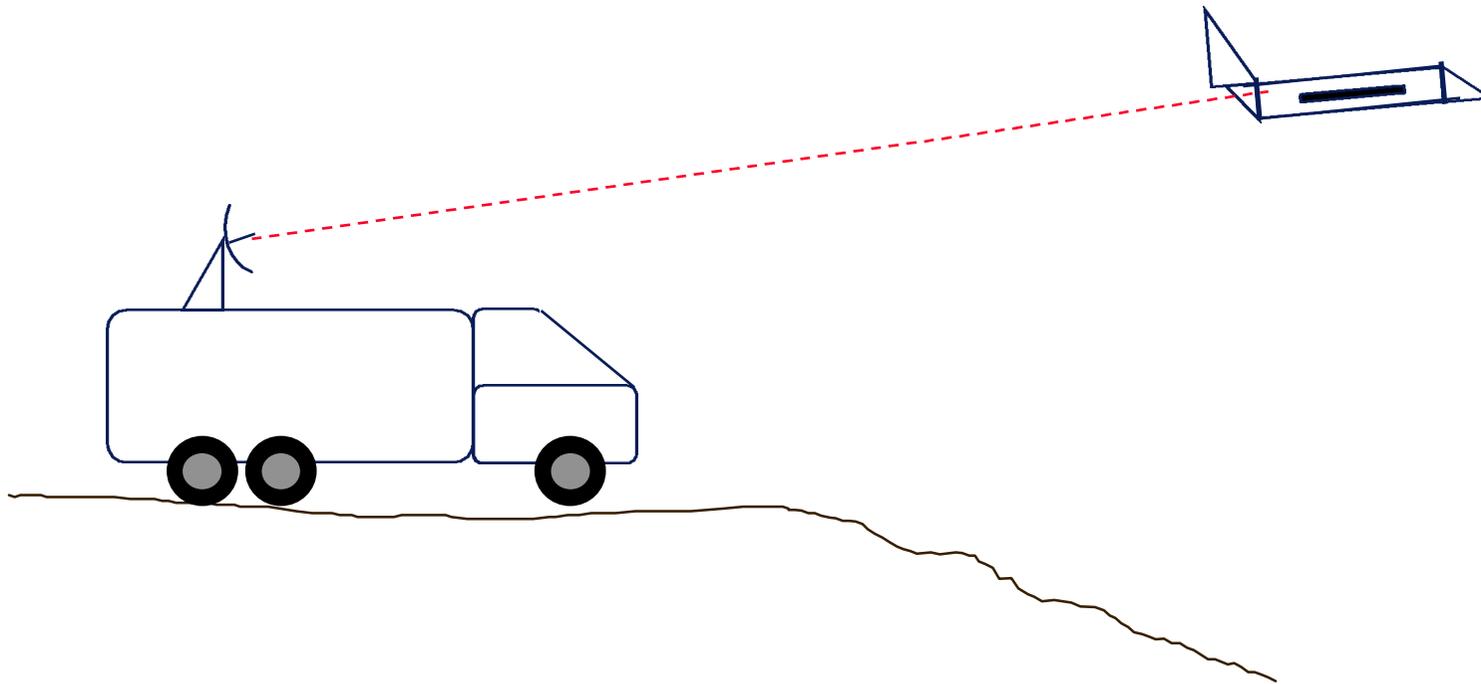
- In generale :



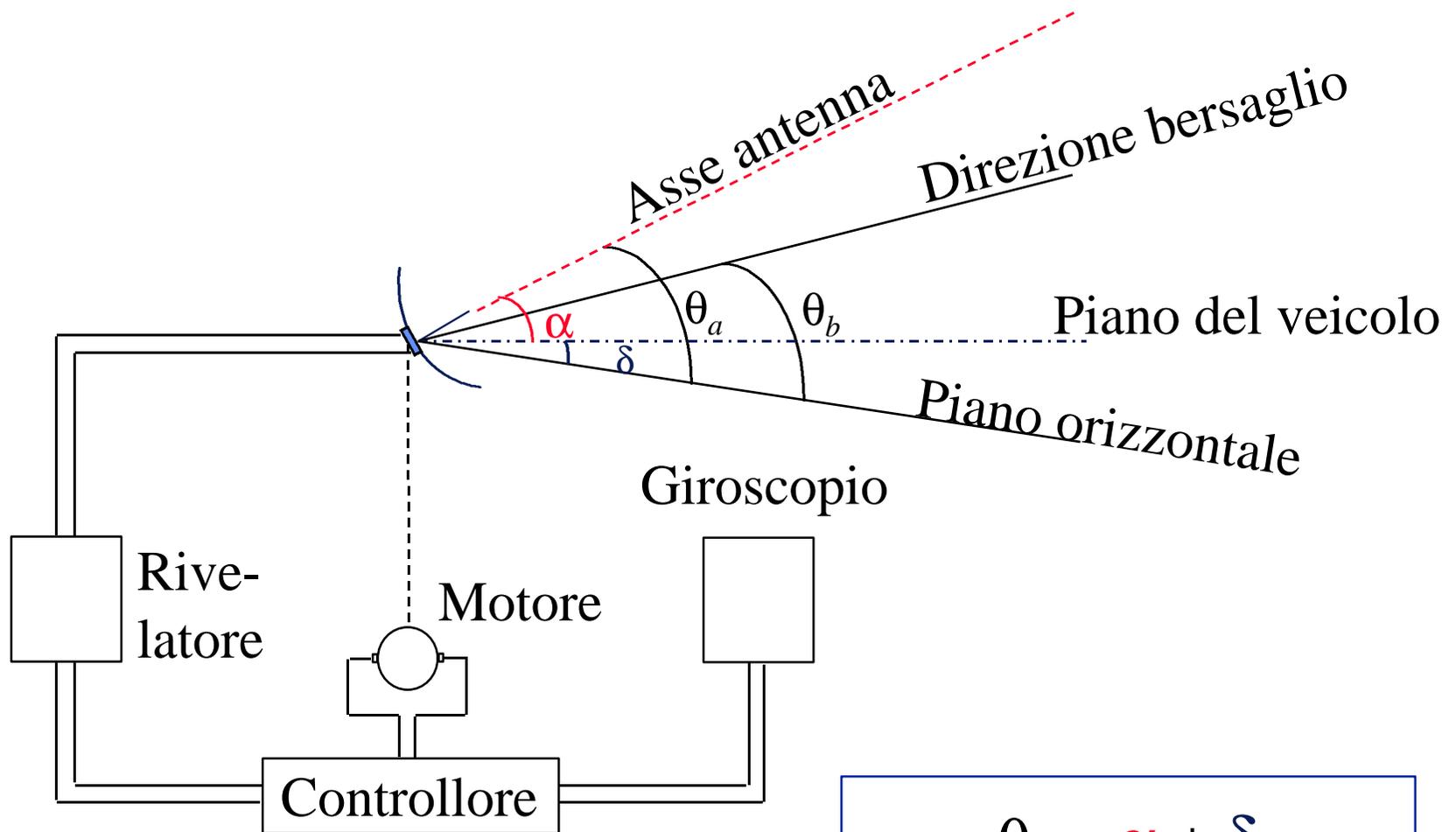
- Il **controllo** in **catena aperta** è soddisfacente se le cause d'errore (**variabilità** dei **parametri**, **disturbi**) possono essere misurate.
- È del tutto **insoddisfacente** se la **causa non** può essere **misurata** (perchè è costoso, impossibile, perchè è una causa d'errore non prevista).
- In questo caso l'**effetto** del **disturbo** (che quindi non può essere compensato) **si ripercuote** sull'**uscita**

# SOLUZIONE PREFERITA: SCHEMA MISTO

Esempio: controllo di **posizione** di un'antenna radar montata su carro in moto su terreno non preparato



# Posizionamento sul piano verticale :



$$\theta_a = \alpha + \delta$$
$$\theta_d = \theta_b - \theta_a$$

eco massima :  $\theta_d = 0$

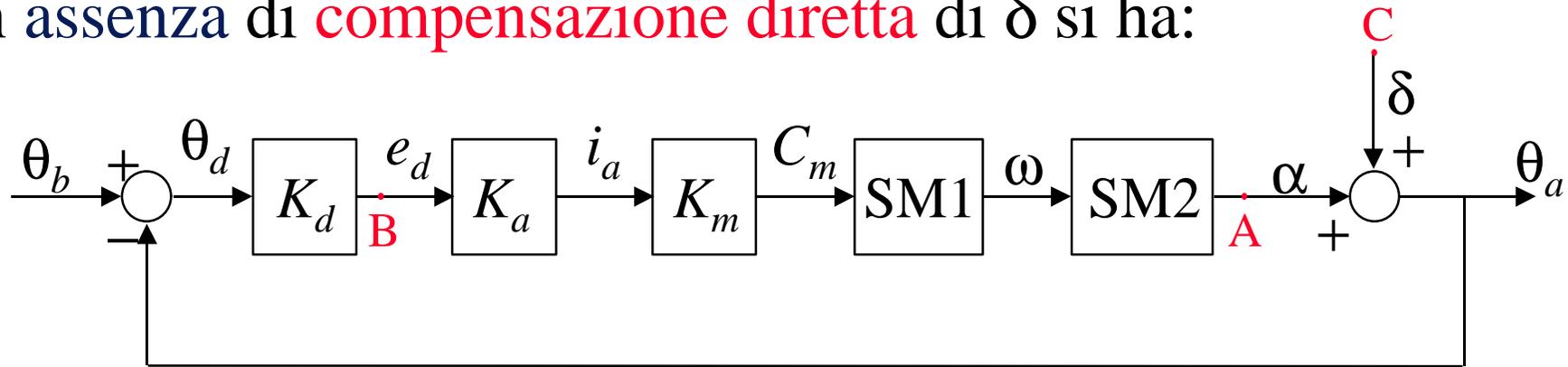
**Motore** a corrente continua, eccitazione indipendente, comandato in corrente su armatura:

$$\begin{aligned}e_d &= K_d(\theta_b - \theta_a) \\i_a &= K_a e_d \\C_m &= K_m i_a\end{aligned}$$

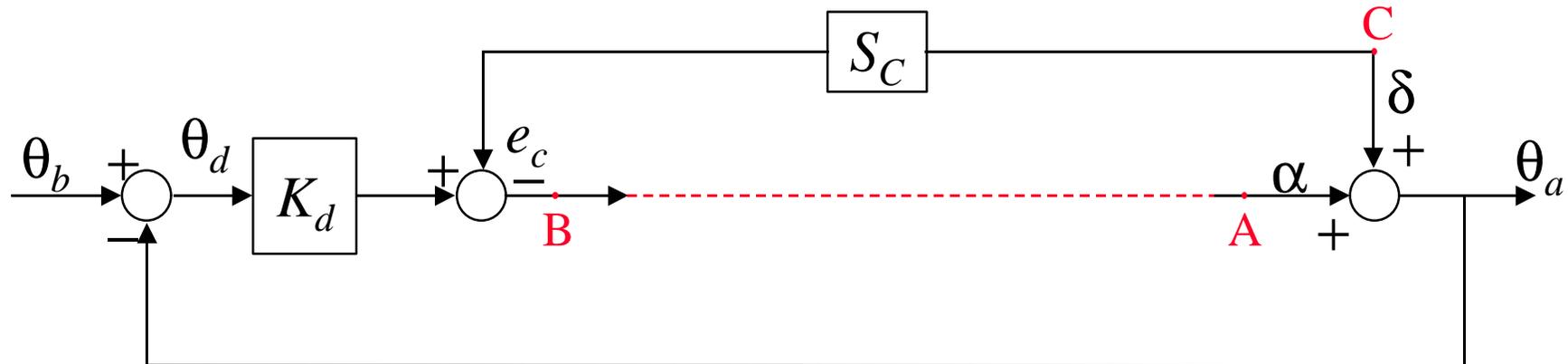
Modello dinamico in **spazio** di **stato** :

$$\begin{aligned}x_1 &= \omega, & x_2 &= \alpha \\ \begin{cases} \dot{x}_1 &= -\frac{F}{J} x_1 + \frac{1}{J} C_m \text{ (SM1)} \\ \dot{x}_2 &= \omega \text{ (SM2)} \end{cases}\end{aligned}$$

In assenza di **compensazione diretta** di  $\delta$  si ha:

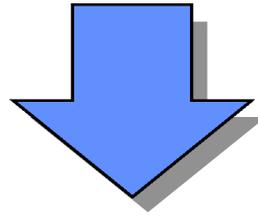


In presenza di **compensazione diretta** di  $\delta$  si ha:

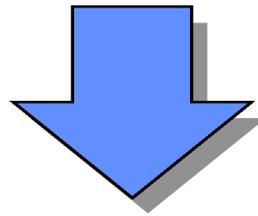


Non si dettaglia per ora la funzione del **compensatore**, che pone problemi di **fisica realizzabilità**.

Problemi di controllo a più variabili

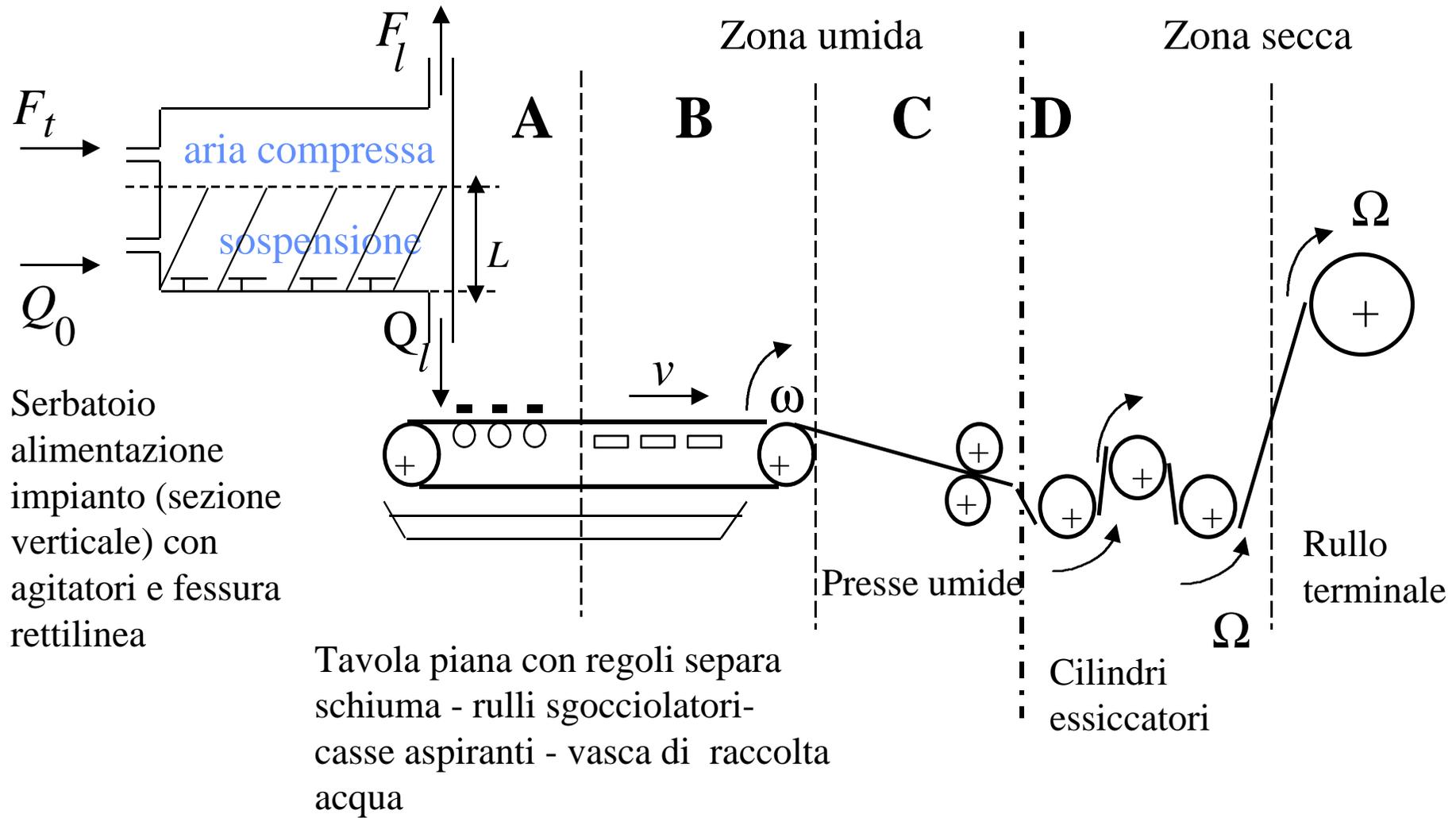


Interazione



Tecniche e metodi specifici

# Esempio: controllo della grammatura della carta prodotta con macchina continua



La tavola piana è un nastro di maglia metallica

La sospensione è di polpa di legno (cellulosa) in acqua:

1.5 -7 % in peso

Il caricamento non può avvenire spontaneamente (per gravità), quindi si utilizza l'aria compressa

Nella zona **A** si perde circa un 4% in acqua (rulli)

Nella zona **B** si perde fino al 22% in acqua (casse aspiranti)

Nella zona **C** si perde circa un 22% in acqua (rulli)

In **D** si ha circa un 50% in acqua

$$v = n \cdot l \text{ m/s}$$

$$\omega = 0.8 - 0.9 \Omega$$

**OBIETTIVO:** rendere uniforme e buona la qualità della carta prodotta.

La qualità è definita da grammatura e uniformità di spessore.

La qualità dipende principalmente dal modo di caricamento del nastro della tavola piana  $\implies$  quantità di sospensione deposta per unità di tempo  $\implies$  grammatura (peso per unità di superficie).

Nella zona iniziale del nastro c'è scuotimento  $\implies$  orientazione e distribuzione uniforme delle fibre di cellulosa purché la polpa sia uniformemente distribuita nella sospensione  $\iff L$  (livello della sospensione nel serbatoio).

**Grandezze controllate:**  $Q_l, L$  (si ha cioè misura indiretta delle grandezze caratterizzanti la qualità del prodotto)

**Grandezze controllanti:**  $Q_0, F_0$

**Altre variabili:**  $F_l, M$  (massa dell'aria nel serbatoio),  $V$  (volume dell'aria nel serbatoio),  $A$  (area del serbatoio, sotto l'ipotesi di sezione costante),  $P_i$  (pressione entro il serbatoio),  $P_e$  (pressione all'esterno del serbatoio).

### Equazioni costitutive del processo

$$1) \quad A \frac{dL}{dt} = Q_0 - Q_l$$

$$2) \quad \frac{dM}{dt} = F_0 - F_l$$

$$3) \quad Q_l = k_q \sqrt{L + (P_i - P_l)}$$

$$4) \quad F_l = k_f \sqrt{1 - P_l/P_i}$$

$$5) \quad P_i V = k_a M$$

Equazioni non lineari,  
linearizzabili intorno ad  
un punto di lavoro:

$$\overline{L} \quad \overline{M} \quad \overline{Q_l} \quad \overline{Q_0} \quad \overline{F_l} \quad \overline{F_0} \quad \overline{P_i} \quad \overline{P_e}$$

per piccole variazioni  
intorno ad esso

## Equazioni linearizzate

$$1) \quad A \frac{dl}{dt} = q_0 - q_l$$

$$2) \quad \frac{dm}{dt} = f_0 - f_l$$

$$3) \quad q_l = \frac{\bar{Q}_l (l + p_i - p_l)}{2\sqrt{\bar{L} + (\bar{P}_i - \bar{P}_l)}} = k_l (l + p_i - p_l)$$

$$4) \quad f_l = k_2 p_i \implies p_i = f_l / k_2$$

$$5) \quad p_i \bar{V} - \bar{P}_i v = \bar{V} p_i - \bar{P}_i A l = k_a m$$

**Nota:** Le variabili indicate con la lettera minuscola rappresentano gli scostamenti rispetto al punto di lavoro

## Modello linearizzato in spazio di stato

Introducendo le seguenti variabili:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ l \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ l_0 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_l \\ l \end{bmatrix}$$

si ottiene la rappresentazione del sistema linearizzato in **spazio di stato**:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{k_2 k_a}{\bar{V}} & -\frac{k_2 A \bar{P}_i}{\bar{V}} \\ -\frac{k_1 k_a}{A \bar{V}} & -\frac{k_1}{A} \left( 1 + \frac{A \bar{P}_i}{\bar{V}} \right) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{A} & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{k_1 k_a}{\bar{V}} & k_1 \left( 1 + \frac{A \bar{P}_i}{\bar{V}} \right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

# REALIZZAZIONE DI UN SISTEMA DI CONTROLLO

- \* Posizione del problema
- \* Sintesi del controllore
- Progetto e realizzazione dei sottosistemi  
costituenti il controllore

# POSIZIONE DEL PROBLEMA

- Caratterizzazione delle **grandezze** adatte a stimolare il **processo**.
- Individuazione dei **sottosistemi** da manipolare o progettare.
- Definizione delle caratteristiche e delle tolleranze ammesse sui **componenti** del **sistema**

**affinché**

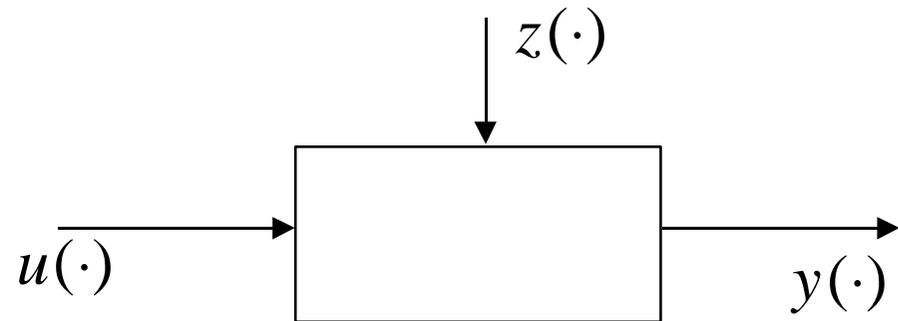
- l'evoluzione temporale dell'**uscita** sia:
  - ✓ **fedele** (entro tolleranze assegnate) all'**ingresso**  
fuori tutto assegnato come **riferimento**
  - ✓ non influenzata da **disturbi**
- le precedenti proprietà si conservino anche in presenza di **variazioni parametriche**.

# SINTESI DEL CONTROLLORE

- Definizione delle **specifiche** sulla **risposta**
- Definizione delle **relazioni** fra **caratteristiche** dei **sottosistemi** e **caratteristiche** della **risposta**, sulla quale sono assegnate le **specifiche**.
- Scelta delle **caratteristiche** dei **sottosistemi** da **progettare** e **manipolare** (**SINTESI**).
- **Verifica** del soddisfacimento delle **specifiche** da parte del **sistema complessivo** di **controllo** (**ANALISI**).

# MODELLI MATEMATICI

**Ipotesi** : Sistemi lineari, stazionari, differenziali, di ordine finito.



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mz(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + Nz(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t H_z(t - \tau)z(\tau)d\tau \\ y(t) = \Psi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t W(t - \tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t W_z(t - \tau)z(\tau)d\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(s) = \Phi(s)x(t_0) + H(s)u(s) + H_z(s)z(s) \\ y(s) = \Psi(s)x(t_0) + W(s)u(s) + W_z(s)z(s) \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

- Il sistema di controllo è interconnesso : ipotesi di separazione.
- Raggiungibilità ed osservabilità del processo.
- Raggiungibilità ed osservabilità del sistema di controllo.

# LIMITI DI VALIDITA'

Linearità :

- non vale

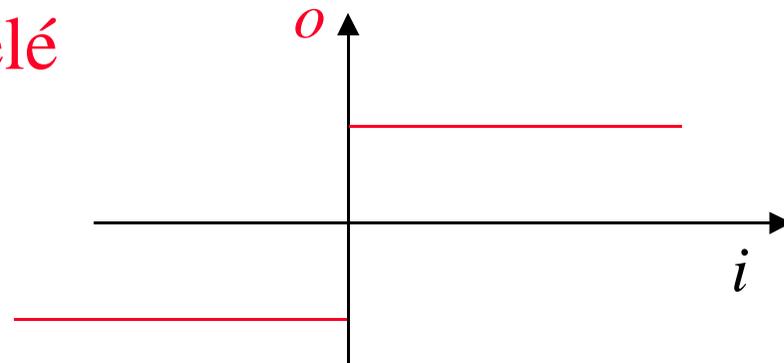
✓ per grandi variazioni

per esempio,

controllo parametrico:  $\dot{x}(t) = A[u(t)] \cdot x(t)$

✓ per non linearità che non ammettono studio locale

per esempio, relé



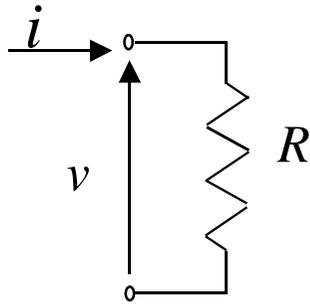
- ha validità limitata

- ✓ per ridotto isomorfismo al variare dell'ampiezza dei segnali

- per esempio, saturazione .

- ✓ per ridotto isomorfismo al variare della frequenza dei segnali

- per esempio, componenti parassiti .



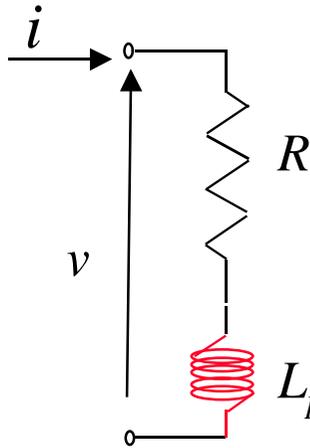
$$u=v$$

$$y=i$$

$$y(t) = \frac{1}{R} u(t)$$

$$W(j\omega) = \frac{1}{R}$$

legge di Ohm

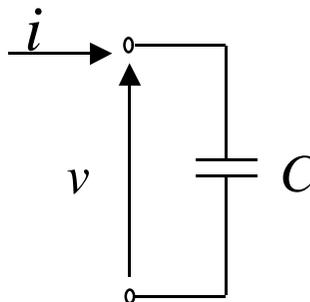


$$L_p \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{R}{L_p} x + \frac{1}{L_p} u \\ y = x \end{cases}$$

$$W(j\omega) = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1 + j\omega \frac{L_p}{R}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{R} ; \quad \frac{\omega L_p}{R} \ll 1$$



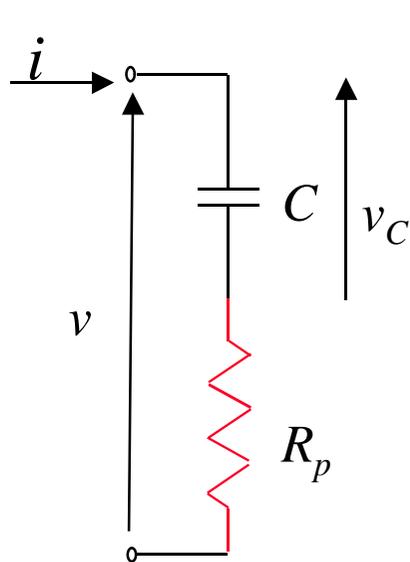
$$u=v$$

$$y=i$$

$$y(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

$$y(s) = sCu(s)$$

$$W(j\omega) = j\omega C$$



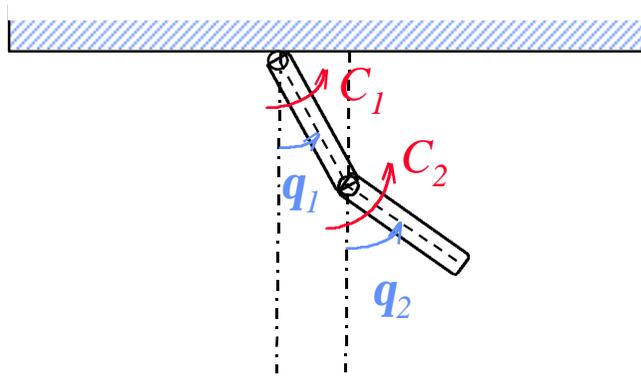
$$\begin{aligned}
 &x = v_C \\
 &y = i
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{cases}
 \dot{x} = -\frac{1}{RC} x + \frac{1}{RC} u \\
 y = -\frac{1}{R} x + \frac{1}{R} u
 \end{cases}$$

$$W(j\omega) = j\omega C \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC} \approx j\omega C \quad ; \quad \omega RC \ll 1$$

- Modelli approssimati **non strettamente propri** o **non propri**.

# RAGGIUNGIBILITÀ ED OSSERVABILITÀ DEL PROCESSO

**Esempio** : Braccio di manipolatore



**Ipotesi**

- cerniere ideali
- sistema conservativo

**Modello matematico** (Lagrange, minima azione) :

$$a_{11} \ddot{\theta}_1 + a_{12} \cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot \ddot{\theta}_2 = b_{11} \dot{\theta}_2^2 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) + b_{12} \sin \theta_1 + C_1 - C_2$$

$$a_{21} \cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot \ddot{\theta}_1 + a_{22} \ddot{\theta}_2 = b_{21} \dot{\theta}_1^2 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) + b_{22} \sin \theta_2 + C_2$$

Condizioni di **equilibrio**: 
$$\begin{cases} C_1 = C_2 = 0 \\ \theta_1(0) = \theta_2(0) = 0 \\ \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0 \end{cases}$$

**Modello linearizzato** intorno all'**equilibrio**:

$$\ddot{\theta}_1 = a_1 \theta_1 + b_1 (C_1 - C_2)$$

$$\ddot{\theta}_2 = a_2 \theta_2 + b_2 C_2$$

Posto :

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_1 & , \\ x_2 &= \dot{\theta}_1 & , \\ x_3 &= \theta_2 & , \\ x_4 &= \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

- Se  $C_2$  è disattivata ,  $u = C_1$  :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

**Sistema non raggiungibile :**

$$\rho(b \quad Ab \quad A^2b \quad A^3b) = \rho \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & a_1b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} < 4$$

- Se  $C_1$  è disattivata ,  $u = C_2$  :  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -b_1 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix} u$

**Sistema raggiungibile** per  $a_1 \neq a_2$

$$\rho(b \quad Ab \quad A^2b \quad A^3b) = \rho \begin{pmatrix} 0 & -b_1 & 0 & -a_1b_1 \\ -b_1 & 0 & -a_1b_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & a_2b_2 \\ b_2 & 0 & a_2b_2 & 0 \end{pmatrix} = 4 \Leftrightarrow a_1 \neq a_2$$

- Si può constatare che il **sistema** è
  - ✓ **non osservabile** per  $y = \mathbf{q}_1$  ( $y = x_1$ )
  - ✓ **osservabile** per  $y = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2$  ,  $a_1 \neq a_2$

## DUE PAROLE DI STORIA

- **III secolo a.c.** . Regolazione di livello a galleggiante.
- **I secolo a.c.** . Erone di Alessandria : “ Pneumatica ”.
- **XVII secolo d.c.** . Drebbel , Papin , Huygens.
- **1788** . Regolatore di Watt.
- **1868** . Maxwell : “ On governors “.
- **1930** . Hazen, Bode ,  
Nyquist, Black,  
Sage, Horowitz,  
Ragazzini, Franklin,  
Jury
- **1958**. Fondazione della **IFAC** .

### Teoria classica

Anello di controllo analogico su processi continui.

- 1960. Kalman, Bellman ,  
Bucy, Zadeh, Desoer,  
principio di Pontryagin

## Teoria moderna

Controllo digitale  
centralizzato

- 1975.

Controllo distribuito  
multi-micro

- 1980. Zadeh, Kaufmann

CAD, CA Creation, CA  
Decision, Diagnostics,  
Management

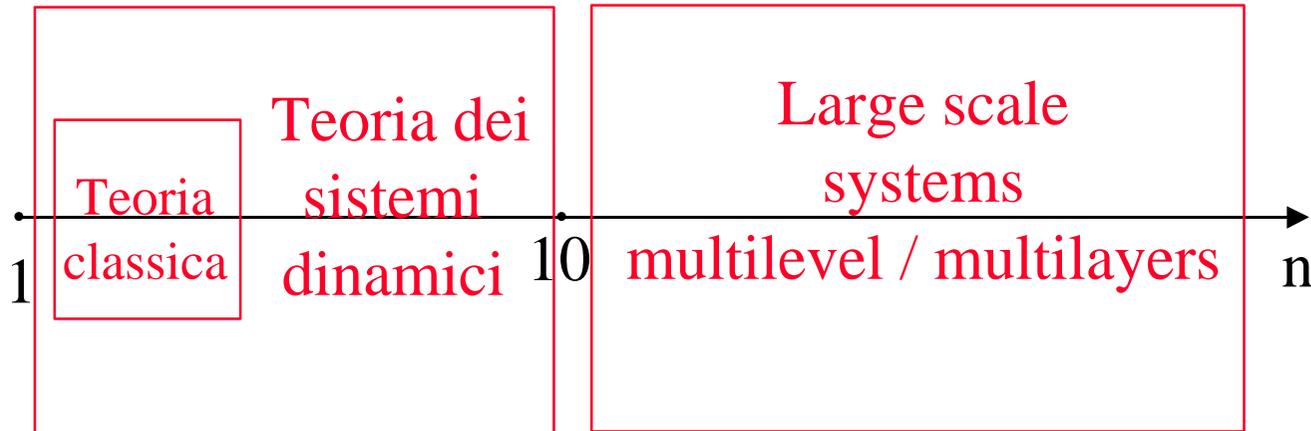
## Nuovi modelli, sistemi complessi

Controllo intelligente ( controllo esperto, fuzzy, neural  
networks, minima entropia, etc. )

# CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI DI CONTROLLO

- **Natura** delle grandezze controllate
    - ✓ ingegneristiche
    - ✓ biologiche
    - ✓ economiche
    - ✓ .....
  - **Tipo** di processo controllato
    - ✓ controllo di processo
    - ✓ controllo cinetico
- 
- ```
graph LR; A[✓ ingegneristiche] --- B[* meccaniche]; A --- C[* elettriche]; A --- D[* di processo];
```

- **Numero** delle grandezze controllate



- **Andamenti** desiderati
  - ✓ regolazione
  - ✓ asservimento
- **Legame funzionale** desiderato ingresso / uscita
  - ✓ proporzionale
  - ✓ funzionale

## Riferimenti

A.Isidori: *Sistemi di controllo*, Ed. Siderea, Cap. I, Cap. II, Cap. III - par. 3.1.