

**Lezione 5 – Sistemi a tempo discreto**

**Lezione 6 – Trasformata Z**

**Lezione 7 – Trasformata Discreta di Fourier (DFT)**

Il testo è preso dal libro “Filtri numerici per l’elaborazione di segnali biologici” del Prof. S. Cerutti, Politecnico di Milano

## 1 - NOMENCLATURA

Si ritiene importante dedicare questo capitolo alla definizione di molti termini che vengono ampiamente utilizzati nello studio dell'elaborazione numerica dei segnali, per chiarire in modo univoco la terminologia che verrà adottata nel seguito e che può presentare differenti sfumature partendo da aree culturali diverse (telecomunicazioni, teoria dei sistemi, analisi dei circuiti ecc.).

Segnale analogico. Si intende un segnale che può assumere una serie continua di valori sia rispetto alla sua ampiezza che alla sua variabile indipendente. Nel seguito si userà esclusivamente il tempo ( $t$ ) come variabile indipendente, per cui la terminologia di "segnale analogico" verrà quasi sempre sostituita con altra denominazione di tipo meno generale.

Segnale a tempo continuo. Presuppone che la funzione rappresentante il segnale assuma una serie continua di valori nel tempo (variabile indipendente) ma non necessariamente continua nell'ampiezza (variabile dipendente). Nel caso invece in cui anche quest'ultima proprietà sia soddisfatta, questo tipo di segnale è equivalente al segnale analogico in cui la variabile indipendente sia il tempo, essendo però preferibile la definizione di segnale a tempo continuo per la maggior parte dei problemi che saranno analizzati.

Segnale a tempo discreto. In questo caso la variabile indipendente tempo può assumere solo valori discreti appartenenti ad un certo insieme.

Segnale campionato. E' un segnale a tempo discreto che si ottiene a seguito dell'operazione di campionamento di un segnale a tempo continuo, come mostrato in Fig. 1 (vedere anche paragrafo 2.8). Il campionamento può essere a frequenza variabile (Fig. 1a) ma più comunemente è a frequenza costante  $f$  intesa come l'inverso del periodo di campionamento  $T$  ( $f = 1/T$ ) (fig. 1b). Nel seguito, salvo diversamente specificato, il campionamento si intenderà a frequenza costante, vale a dire il segnale campionato di un segnale a tempo continuo  $f(t)$  assume valori solo in corrispondenza di  $f(kT)$  dove  $k$  è un numero intero che può andare da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Nel seguito sarà molto comune indicare le ampiezze dei segnali campionati  $y = y(kT)$  come  $y = y(k)$ , sottintendendo il periodo  $T$  di campionamento. E' infine da sottolineare il fatto che i più comuni segnali a tempo discreto che si andranno a considerare nel seguito sono segnali ottenuti dal campionamento di un segnale a tempo continuo: anche in questo caso si userà la terminologia di segnale a tempo discreto invece di quello, certamente più corretto ma meno diffuso, di segnale campionato.

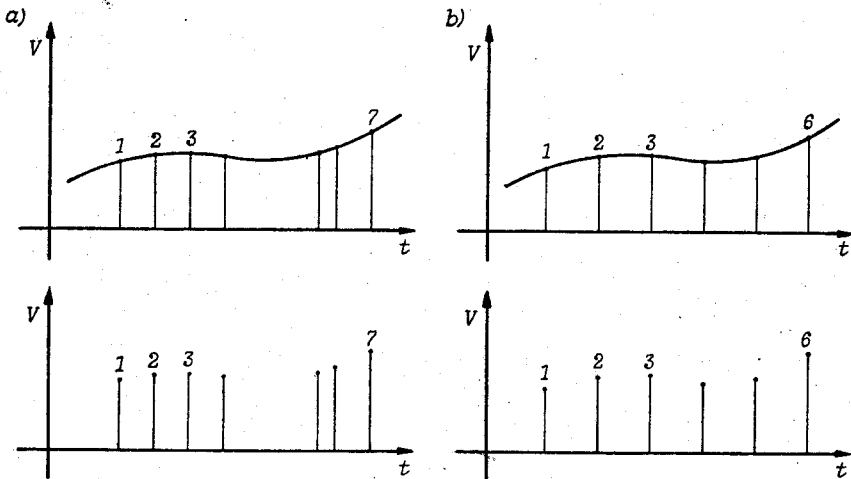


Fig. 1 - Campionamento di un segnale a tempo continuo.  
a) a frequenza variabile; b) a frequenza costante.  
 $t$  è la variabile tempo, mentre  $V$  indica la generica ampiezza del segnale.

Segnale quantizzato. E' un segnale a tempo discreto che può assumere valori di ampiezza solo entro un numero finito di livelli di ampiezza (Fig. 2).

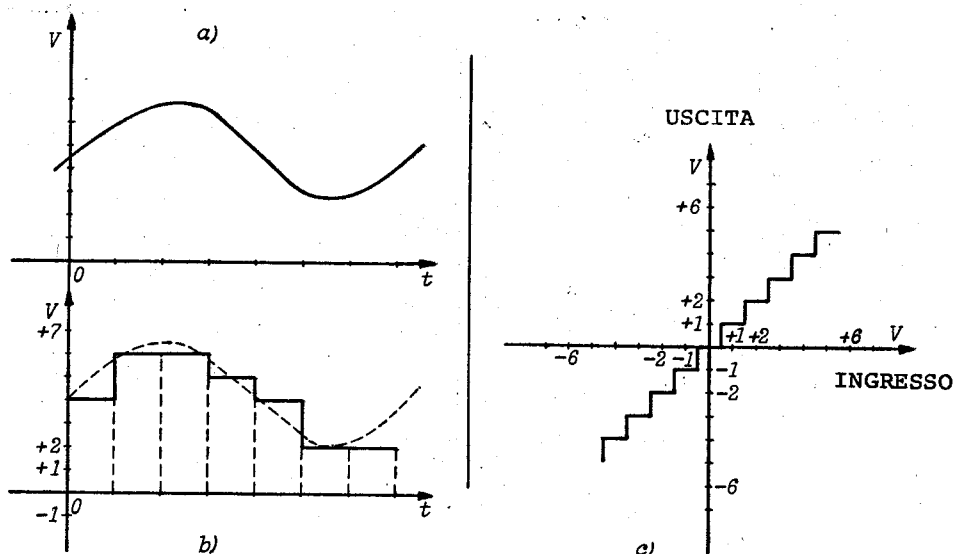


Fig. 2 - a): segnale a tempo continuo; b): corrispondente segnale quantizzato; c): caratteristica ingresso-uscita del quantizzatore

Funzione - impulso a tempo discreto (DELTA DI KRONECKER).

E' un segnale a tempo discreto che assume i seguenti valori:

$$y(k-k_0) = \begin{cases} 1 & \text{per } k = k_0 \\ 0 & \text{per } k \neq k_0 \end{cases}$$

Due esempi (con diversi valori di  $k_0$ ) sono indicati in fig.3

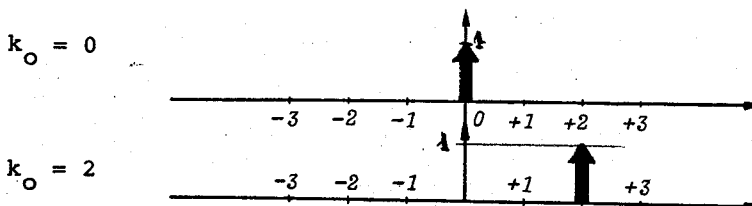


Fig. 3 - Funzione impulso a tempo discreto per diversi valori di  $k_0$ .

Segnale numerico. E' un segnale a tempo discreto (nella maggior parte dei casi sarà un segnale campionato) e quantizza to nelle ampiezze.

Sistema a tempo continuo. E' un sistema in cui sia gli ingres si che le uscite sono segnali a tempo continuo (Fig. 4).

Sistema a tempo discreto. E' un sistema in cui sia gli ingres si che le uscite sono segnali a tempo discreto (Fig. 5).

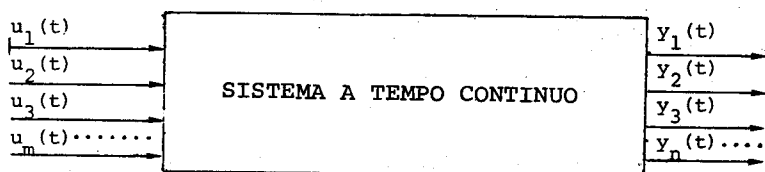


Fig. 4 - Schema di un sistema a tempo continuo

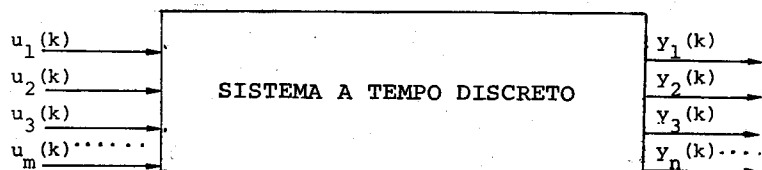


Fig. 5 - Schema di un sistema a tempo discreto

Sistema ibrido. E' un sistema in cui gli ingressi e/o le usci te possono essere costituiti da segnali a tempo continuo in sieme a segnali a tempo discreto. Un tipico sistema ibrido è quello che permette di passare da un segnale a tempo continuo in ingresso ad un segnale a tempo discreto in uscita, tramite operazione di campionamento, come visto precedentemente.

Sistema lineare a tempo discreto. E' un sistema a tempo discre to che è caratterizzato dal fatto di avere l'uscita  $y(k)$  come combinazione lineare delle uscite precedenti e degli ingressi precedenti e attuale. Quindi

$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m) -$$

$$a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_n y(k-n) \quad \text{dove}$$

(1)

$b_0, b_1, \dots, b_m$  e  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sono costanti rispetto a  $k$  ed  $m, n \geq 0$ .

Il sistema lineare precedente è detto anche di ordine  $n$  in quanto la (1) rappresenta una equazione alle differenze che è lineare e di ordine  $n$ .

Sistemi non lineari a tempo discreto. In questo caso l'uscita non è una combinazione lineare degli ingressi passati e presenti e delle uscite passate, come riportato nella (1).

Sistemi tempo-invarianti. Questo è il caso in cui i coefficienti  $a$  e  $b$  della (1) sono costanti nel tempo. Viceversa si dicono tempo-varianti quei sistemi per cui i suddetti coefficienti siano funzioni del tempo.

Filtro a segnali campionati. Si intende un sistema che permette di passare da un segnale campionato in ingresso ad una uscita costituita da un differente segnale campionato che può assumere valori continui di ampiezza all'interno di valori appartenenti ad un certo insieme.

Filtro numerico. Si intende un processo di calcolo od un algoritmo per cui un segnale numerico in ingresso (o una sequenza di numeri), viene trasformata in un altro segnale numerico in uscita (o in un'altra sequenza di numeri).

Filtro a tempo discreto. Può essere o un filtro numerico o un filtro a segnali campionati.

Filtro non ricorsivo. E' un filtro a tempo discreto in cui i coefficienti  $a$  della (1) sono identicamente nulli. L'uscita in un certo istante di tempo dipende quindi solo dagli ingressi passati e presente.

Filtro ricorsivo. E' un filtro a tempo discreto per cui la (1) ha coefficienti  $a$  non tutti identicamente nulli. L'uscita

ta quindi dipende non solo dagli ingressi passati e presenti, ma anche da una o più uscite passate.

Risposta all'impulso di un sistema a tempo discreto. Si intende l'uscita del sistema  $\{y(k)\}$  (risposta) in corrispondenza di un impulso  $\delta(k)$  come ingresso per  $k_0 \leq k < \infty$ .

Filtro FIR (Finite Impulse Response). Si intende un filtro numerico con risposta all'impulso  $\{y(k)\} < \infty$ . Cioè  $y(k) = 0$  per  $k > k_1$  e  $k < k_2$  con  $k_1 > k_2$ .

Filtro IIR. (Infinite Impulse Response). Si intende un filtro per cui i precedenti coefficienti  $k_1$  e  $k_2$  soddisfano una delle reazioni seguenti:  $k_1 = \infty$  o  $k_2 = -\infty$  o ambedue. In questo caso la durata della risposta all'impulso è infinita.

Filtro campionato in frequenza. E' un filtro FIR in cui è possibile variare uno o più coefficienti della sua DFT (Trasformata Discreta di Fourier) per minimizzare alcuni parametri della risposta in frequenza del filtro (vedere paragrafo 4.3).

Filtro equiripple (o filtro ottimo). E' un filtro FIR che realizza la migliore approssimazione, secondo il criterio del minimassimo, per qualche aspetto caratteristico della risposta in frequenza, in un sottoinsieme degli intervalli di frequenza.

Filtro extraripple. E' un filtro FIR la cui risposta in frequenza è equiripple nella banda passante e banda arrestata, con il massimo numero possibile di oscillazioni (ripple).

Filtro di Kalman (a tempo discreto). E' un filtro a tempo discreto lineare, in genere tempo-variante, che gode della proprietà di fornire una stima dell'errore in forma di predizione (secondo il criterio dei minimi quadrati) di un segnale a tempo discreto, basata su osservazioni in presenza di rumore. Se il precedente filtro è anche tempo-invariante è detto filtro di Wiener.

Stabilità. Un sistema è detto stabile, se ogni ingresso finito produce un'uscita anch'essa finita. Questa definizione esprime la BIBO-stabilità (Bounded Input, Bounded Output). E' possibile dimostrare (39) che per i filtri numerici lineari, tempo-invarianti, condizione necessaria e sufficiente per la BIBO-stabilità è che vi sia

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |y(k)| < \infty .$$

Causalità. Un sistema è detto causale se l'uscita  $y(k)$ , per ogni  $k = k_0$ , dipende solo dai valori d'ingresso per  $k \leq k_0$ . Per i filtri numerici lineari tempo-invarianti, ciò presuppone che la risposta all'impulso sia  $= 0$  per  $k < 0$ .

Per quanto riguarda la nomenclatura sopra enunciata, si è fatto riferimento ai seguenti testi: (37) (8) (9) (26).

## 2 - SEGNALI E SISTEMI A TEMPO DISCRETO

### 2.1. Segnali e sistemi a tempo continuo e a tempo discreto

Nello studio di un qualsivoglia fenomeno di natura meccanica, elettrica, chimica, economica, biologica, etc. è una operazione fondamentale quella di individuare un modello matematico del sistema in questione, che descriva in termini quantitativi il fenomeno stesso, in misura più o meno precisa ed accurata a seconda del tipo di problema considerato e degli scopi che ci si vuole prefiggere.



Il modello viene in genere individuato mettendo in evidenza le grandezze di ingresso e le grandezze di uscita, come mostrato in Fig. 6.

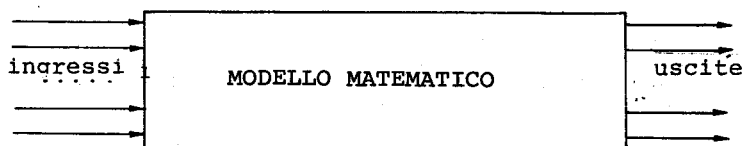


Fig. 6 - Schema generale di un modello ingresso-uscita

Per fare un esempio tratto dalla teoria dei circuiti, esiste un ben noto legame tra la corrente e la tensione ai capi di ciascun bipolo utilizzatore elementare (resistore, induttore, condensatore): questo legame è quantificato dalla legge di Ohm, come mostrato in Fig. 7.

Nel caso del resistore il legame tra corrente e tensione, istante per istante, è di tipo algebrico (e così quindi il rispettivo modello), mentre per condensatori e induttori il legame è di tipo integro-differenziale.

I tipi di modello possono essere quindi assai diversi tra loro pur, in genere, collegando sempre una o più grandezze in entrata (segnali in entrata) con una o più grandezze in uscita (segnali in uscita).

La variabile indipendente è il tempo  $t$  e a questa stessa variabile si farà sempre riferimento nel seguito, salvo diversamente specificato.

Facendo riferimento alla nomenclatura (capitolo 1) per la definizione di sistemi a tempo continuo, a tempo discreto ed ibridi, si consideri come esempio il sistema ibrido illustrato in Fig. 8, dove nella parte superiore è riportato l'andamento della temperatura in funzione del tempo (segnale a tempo continuo), rilevato in un paziente monitorizzato.

Tramite un opportuno trasduttore (sistema che permette di trasformare una grandezza in genere non elettrica, in una grandezza elettrica corrispondente: tensione, corrente, etc.) si ottiene un segnale elettrico a tempo continuo. Lo schema a blocchi di Fig. 8 evidenzia un sistema di allarme per cui quando

la temperatura del paziente supera il valore di  $38^{\circ}\text{C}$  oppure è inferiore ai  $35^{\circ}\text{C}$  viene ottenuto in uscita al sistema un impulso positivo o negativo di ampiezza unitaria che va ad accendere la spia di allarme corrispondente (di massima o di minima) ed eventualmente a mettere in funzione anche un allarme acustico. In questo caso il segnale in uscita è costituito da una

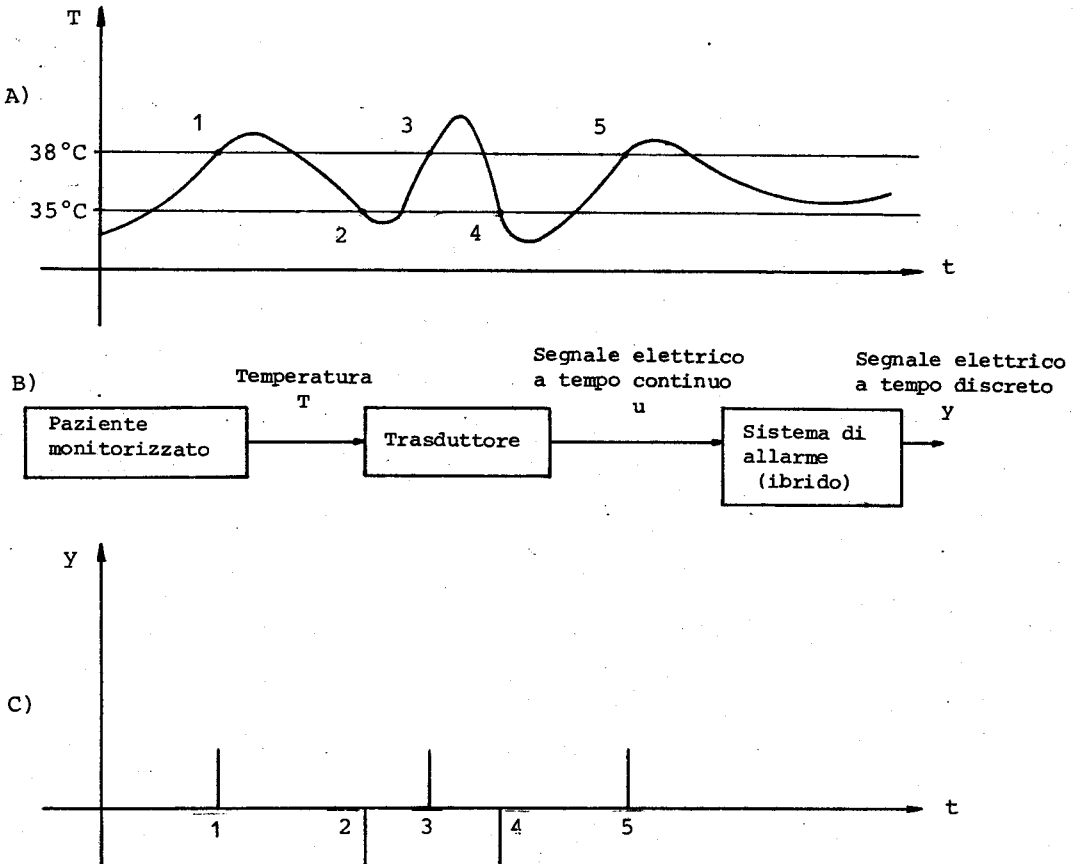


Fig. 8 - Trasformazione da un segnale a tempo continuo (temperatura  $T$  di un paziente monitorizzato) ad un segnale a tempo discreto. A) andamento della  $T$ , in funzione di  $t$ . B) Schema a blocchi del sistema completo. C) Segnale a tempo discreto in uscita al sistema di allarme (impulso di ampiezza unitaria-positivo o negativo-, in corrispondenza al superamento dei valori di soglia prefissati).

serie di impulsi unitari positivi o negativi, intervallati da un periodo di tempo variabile.

Il sistema considerato è quindi un sistema ibrido.

Una classe molto comune di sistemi ibridi, come già accennato, è quella che trasforma un segnale continuo nel tempo in una serie di valori discreti nel tempo, che rappresentano l'ampiezza del segnale d'ingresso in prefissati istanti di tempo (vedere Fig. 1). Il segnale che si ottiene in uscita è detto segnale campionato del segnale d'ingresso. In genere si suppone che l'intervallo di tempo ( $T$ ) tra un campione e l'altro sia costante (periodo di campionamento).

Quest'ultimo caso presenta un gran numero di applicazioni. Tra le più importanti vi è la trasformazione di un segnale a tempo continuo in un segnale numerico (o a tempo discreto) costituito da una serie di numeri (che esprimono i valori del segnale in corrispondenza agli istanti di campionamento), sui quali sia possibile eseguire un certo numero di calcoli o di procedure. Il campionamento di un segnale a tempo continuo è una operazione fondamentale per l'acquisizione dei segnali da parte di un elaboratore elettronico (o di altre unità numeriche) per le varie procedure di elaborazione o di calcolo. La sempre più vasta diffusione di questi strumenti in vari e differenti settori applicativi ha reso quindi sempre più importante l'analisi dei segnali campionati.

Rimandando alla terminologia enunciata nel capitolo 1, si ricorda che un segnale numerico è quel segnale discreto nel tempo che viene anche quantizzato: anche la sua ampiezza, cioè, assume valori compresi in un insieme finito di valori possibili.

Nel seguito si farà molto spesso riferimento a sistemi a tempo discreto lineari e tempo invarianti (vedi la nomenclatura, capitolo 1) che utilizzeranno segnali numerici in ingresso e in uscita.

### 2.3. Cenni sulla trasformata $z$

Non è lo scopo di questo capitolo quello di fare una discussione dettagliata dell'operatore "trasformata  $z$ ", con tutte le sue proprietà. A questo scopo si può fare riferimento a (23).

In questa sede verranno solo richiamati alcuni cenni di carattere generale e alcune proprietà operative che permetteranno di applicare la trasformata  $z$  ai segnali a tempo discreto, ottenendo così una formalizzazione più semplice per le equazioni alle differenze.

La trasformata  $z$  infatti è un operatore per cui una serie temporale (sequenze di numeri) viene trasformata in una funzione della variabile complessa  $z = x + jy$  dove  $x$  ed  $y$  sono numeri reali e  $j$  è l'unità immaginaria, per cui  $j^2 = -1$ . Sia data una serie temporale  $\{f(k)\}$  che abbia valore 0 per  $k = -1, -2, -3, \dots, -\infty$  e sia caratterizzata dai valori  $f(0), f(1), f(2), \dots, f(k)$ . Si definisce  $Z[f(k)]$ , oppure  $F(z)$ , come la trasformata  $z$  della serie temporale; la trasformata  $z$  della  $\{f(k)\}$  è data dalla seguente espressione:

$$Z[f(k)] = F(z) = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots + \frac{f(k)}{z^k}$$

ovvero

$$Z[f(k)] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot z^{-k} \quad (8)$$

Si constata quindi che la trasformata  $z$  di una serie temporale è una serie di potenza nella variabile  $z^{-1}$ . Il numero complesso che si ottiene calcolando la (8) può essere finito o infinito in modulo e quindi la serie di potenza può convergere o non convergere.

L'insieme dei valori  $z$  per cui la serie converge è detta regione di convergenza di  $z$ , viceversa la regione di divergenza è l'insieme dei valori  $z$  per cui la serie diverge.

Si può dimostrare (26) che la regione di convergenza è data dalla relazione:

$$|z| > R$$

dove  $R$  è detto raggio di convergenza e dipende dalla serie temporale. In Fig. 13 vengono riportati sul piano complesso di  $z$ , le regioni di divergenza (all'interno del cerchio di raggio  $R$ ) e di convergenza (all'esterno del cerchio di raggio  $R$ ); sul contorno del cerchio ( $|z| = R$ ) la serie può convergere o divergere.

Questi ultimi concetti di convergenza o di divergenza della trasformata  $z$  risulteranno estremamente importanti nello studio dei metodi di progetto per i filtri numerici, come verrà riportato nel capitolo 4.

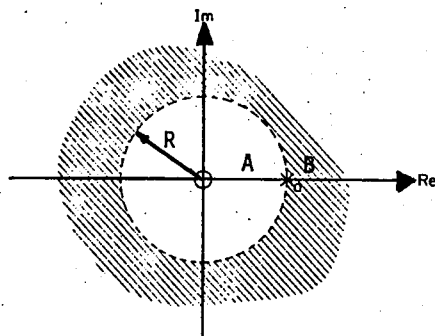


Fig. 13 - Regioni di divergenza (A) e di convergenza (B) della serie (8) nel piano complesso  $z$ .

#### 2.4. Serie ed integrale di Fourier

E' noto che un segnale  $f(t)$  a tempo continuo è detto periodico se soddisfa alla relazione

$$f(t) = f(t + kT) \quad (9)$$

dove  $k$  è un intero che può avere valori da  $-\infty$  a  $+\infty$  e  $T$  è detto il periodo del segnale periodico. Inoltre se il segnale soddisfa alle condizioni di Dirichelet (ha cioè nel periodo un numero finito di massimi e minimi ed un numero finito di discontinuità finite), il segnale  $f(t)$  può essere considerato come somma di sinusoidi e cioè:

$$f(t) = 1/2 a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right\} \quad (10)$$

dove

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \quad \text{per } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sin \frac{2\pi k}{T} t dt \quad \text{per } k = 1, 2, 3, \dots$$

L'espressione (10) è detta la rappresentazione del segnale sotto forma di serie di Fourier ed è valida, come detto, per la vasta classe dei segnali periodici. La pulsazione

$$\omega = 2\pi/T \quad \text{si dice pulsazione fondamentale}$$

e

$k \cdot 2\pi/T$  è detta la  $k$ -esima armonica superiore.

Se  $k$  è pari o dispari le armoniche si diranno rispettivamente pari o dispari.

La (10) può essere rappresentata in maniera più sintetica sotto forma di numero complesso. Applicando il noto teorema di Eulero, si ottiene la serie di Fourier in forma esponenziale; vale a dire la  $f(t)$  può essere rappresentata da una serie di espressioni complesse del tipo:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{j2\pi kt/T} \quad (11)$$

dove

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-j2\pi kt/T} dt \quad (12)$$

Come vedremo, le (11) (12) saranno ampiamente utilizzate nel seguito.

D'altra parte molti segnali non sono periodici nel tempo e cioè non godono della proprietà (9). Per questi segnali la serie di Fourier non è più applicabile. Si può introdurre

allora l'algoritmo della trasformata di Fourier che si definisce come segue:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (13)$$

dove  $F(\omega)$  è detta la trasformata di Fourier del segnale  $f(t)$ , in generale non periodico. Non si ritiene il caso di entrare troppo nel dettaglio della definizione e delle proprietà di cui gode la trasformata di Fourier: si può fare riferimento ai classici testi (2) (3) (17). In questa sede è importante sottolineare solo come sia la serie che l'integrale di Fourier ci danno informazioni sul contenuto in frequenza del segnale  $f(t)$ . Se nella (1) i coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  tendono presto a zero, all'aumentare di  $k$ , allora si dice che il segnale è prevalentemente composto da basse frequenze, mentre viceversa se  $a_k$  e  $b_k$  si mantengono per lungo tempo diverse da zero all'aumentare di  $k$ , significa che il segnale è composto anche da alte frequenze. E' chiaro che il giudizio sopra riportato è puramente qualitativo mentre è solo la misura dei coefficienti  $a_k$ ,  $b_k$  (o  $c_k$ ) che può quantificare maggiormente la presenza delle alte e/o basse frequenze.

Lo stesso discorso può essere ripetuto per l'integrale della (13) dove  $F(\omega)$  è la misura della generica componente in frequenza  $\omega$  del segnale riportato. E' da ricordare inoltre che, essendo  $F(\omega)$  un numero complesso, esso sarà caratterizzato non solo dal modulo  $|F(\omega)|$  ma anche dalla sua fase  $\phi(\omega)$ . E' possibile fin d'ora comprendere come, operando delle opportune variazioni dei coefficienti  $a_k$ ,  $b_k$  ( $c_k$ ) e di  $|F(\omega)|$  alle varie frequenze, sia possibile diminuire o aumentare il contributo di certe frequenze rispetto ad altre nel segnale originario. Le trasformazioni dei suddetti coefficienti possono avere scopi assai diversi e non necessariamente legati solo ad una variazione del contenuto in frequenza dei segnali: in altre parole possono essere eseguite delle manipolazioni sui segnali numerici, le quali andranno in generale ad influenzare il contenuto in frequenza, ma aventi comunque altri scopi non necessariamente legati al contenuto di frequenza stesso



(ad es. tecniche di interpolazione, filtraggi in genere, convoluzioni, regressioni etc.).

In questo modo, è chiaro, il concetto di filtro numerico assume una definizione assai più generale (ed è quella che verrà data nel capitolo 3), non ricalcando semplicemente nel dominio dei segnali a tempo discreto la funzione del filtro analogico nel dominio dei segnali a tempo continuo.

## 2.5. Risposta all'impulso e risposta in frequenza per segnali a tempo discreto

Si consideri una sequenza temporale di dati  $\{x(k)\}$  all'ingresso di un generico sistema (Fig. 14). Per fissare le idee, supponiamo che gli  $x(k)$  provengano da un campionamento di un segnale a tempo continuo  $x(t)$  con periodo di campionamento  $T$ . Facendo riferimento a quanto detto nella nomenclatura (cap. 1) si dice sistema numerico un qualunque sistema che trasformi, tramite un operatore  $\tau$ , la sequenza numerica in ingresso  $\{x(k)\}$  in una sequenza numerica in uscita  $\{y(k)\}$ , dove

$$\{y(k)\} = \tau \{x(k)\} .$$

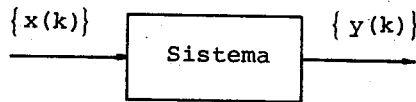


Fig. 14 - Generico sistema a tempo discreto.

Considereremo nel futuro solo sistemi tempo-invarianti e lineari; quindi si chiami  $L$  l'operatore corrispondente. La linearità dell'operatore presuppone ovviamente che

$$\begin{aligned} \{y(k)\} &= L \{a_1 x_1(k) + a_2 x_2(k)\} = a_1 L \{x_1(k)\} + \\ &+ a_2 L \{x_2(k)\} = a_1 \{y_1(k)\} + a_2 \{y_2(k)\} \end{aligned} \quad (14)$$

intendendo con  $x_1$  e  $x_2$  due ingressi diversi e con ovvio significato delle altre grandezze introdotte.

Consideriamo ora come ingresso del sistema di Fig. 14 l'impulso unitario (vedi nomenclatura)

$$\begin{aligned}\delta(k) &= 1 & \text{per } k &\neq 0 \\ \delta(k) &= 0 & \text{per } k &= 0\end{aligned}$$

Il generico campione della serie temporale in ingresso può essere espresso quindi da

$$x(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \delta(k-n) ;$$

allora la (14) permette di scrivere

$$y(k) = L \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \delta(k-n) \right\}$$

e quindi

$$\begin{aligned}y(k) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) L \left\{ \delta(k-n) \right\} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) h(k,n) ,\end{aligned}\tag{15}$$

dove  $h(k,n)$  è detta risposta all'impulso e dipende in genere sia da  $k$  che da  $n$ . Nel caso di sistemi tempo-invarianti, la  $h$  si può ritenere solo funzione di  $n$ , in quanto la risposta  $(n-k)$ -esima è temporalmente sincrona al campione  $(n-k)$ -esimo in ingresso. Perciò si avrà

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) h(k-n) .\tag{16}$$

La relazione precedente può essere anche espressa sotto forma di prodotto di convoluzione

$$\{y(k)\} = \{x(k) * h(k)\} .\tag{17}$$

La risposta di un sistema a tempo discreto, lineare e tempo invariante è data perciò dalla convoluzione dei campioni in ingresso con la risposta all'impulso del sistema stesso.

Cambiando le variabili si può anche scrivere

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) x(k-n) = h(k) \star x(k) , \quad (18)$$

Come conseguenza del teorema di convoluzione (9), si ha che la (18) può scriversi come:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) . \quad (19)$$

In altre parole la trasformata di Fourier del segnale di uscita  $Y(\omega)$  è data dal prodotto della trasformata di Fourier del segnale d'ingresso  $X(\omega)$  moltiplicata per la trasformata di Fourier della risposta all'impulso  $H(\omega)$ . Le tre grandezze introdotte nella (19) sono ovviamente grandezze vettoriali, ognuna caratterizzata da un modulo e da una fase e spesso vengono rappresentate con la simbologia seguente

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) .$$

Come conseguenza delle relazioni precedenti, se si vuole ottenere la risposta  $\{y(k)\}$  di un sistema lineare a tempo discreto, tempo-invariante in corrispondenza ad una sequenza  $\{x(k)\}$  di campioni in ingresso, si deve calcolare prima la trasformata di Fourier di quest'ultima  $X(e^{j\omega})$  quindi moltiplicarla per la  $H(e^{j\omega})$  e infine fare l'antitrasformata di Fourier dalla  $Y(e^{j\omega})$  ottenendo così la risposta richiesta. E' facile dimostrare che la  $H(e^{j\omega})$  (8) è caratterizzata da modulo e fase che sono funzioni periodiche di  $\omega$  con periodo  $2\pi/T$ .

In genere la  $H(e^{j\omega})$  viene studiata nell'intervallo  $0 \leq \omega \leq \pi/T$  che corrisponde ad un semiperiodo. Infatti dal teorema del campionamento (vedere paragrafo 2.8) si ricava che la pulsazione di campionamento  $\omega_c$  deve essere

$$\omega_c > 2\omega_M$$

dove  $\omega_M$  è la pulsazione massima presente nel segnale. Risolvendo in  $\omega_M$  si avrà  $\omega_M \leq \omega_c/2$  e dato che  $\omega_c = 2\pi/T$ , si avrà infine che  $\omega_M \leq \pi/T$ .

Le pulsazioni superiori a  $\pi/T$  non possono quindi essere ricostruite senza evitare il fenomeno di "aliasing" (vedi paragrafo 2.8).

Mostreremo ora una importante formalizzazione della  $H(e^{j\omega})$ . Si prenda per ipotesi un sistema che ha all'ingresso una sequenza costituita da campioni di una funzione esponenziale (da (8))

$$x(n) = e^{jn\omega} \quad (20)$$

Applicando la (18) si ottiene la serie dei campioni in uscita

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{j\omega(n-k)} = \\ &= e^{jn\omega} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j\omega k} \end{aligned}$$

Tenendo conto della (18) si ricava che

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j\omega k} \quad (21)$$

Questa definizione di  $H(e^{j\omega})$  è estremamente importante ed è valida per qualunque funzione esponenziale e sinusoidale (8) per sistemi lineari tempo-invarianti e si può quindi applicare ad una vastissima classe di sequenze in termini di somme di funzioni esponenziali (o sinusoidali). La relazione precedente, a causa della periodicità di  $H(e^{j\omega})$  può essere interpretata come la serie di Fourier in cui i coefficienti  $h(k)$  sono quelli della risposta all'impulso.

La funzione  $H(e^{j\omega})$  è detta risposta in frequenza e caratterizza completamente il comportamento del sistema in termini di grandezze ingresso/uscita.

I coefficienti della serie di Fourier possono evidentemente essere ricostruiti sulla base della risposta in frequenza secondo la seguente relazione (antitrasformata) di Fourier.

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega .$$

In termini di trasformata  $z$ , la (19) si esprime come

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) \quad \text{dove} \quad (22)$$

$Y(z)$  e  $X(z)$  sono rispettivamente le trasformate  $z$  della sequenza di uscita e di ingresso e  $H(z)$  è la trasformata  $z$  della risposta all'impulso.

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{-k} . \quad (23)$$

La relazione (21) e la relazione (23) ci permetteranno di stabilire un legame tra trasformata  $z$  e trasformata di Laplace, come verrà illustrato nel paragrafo 2.6.

## 2.6. Relazione tra trasformata $z$ e trasformata di Laplace

Sia dato un qualsivoglia segnale a tempo continuo e lo si voglia campionare a frequenza costante  $f$ ; otteniamo un legame tra segnale originario  $f(t)$  e segnale campionato  $f_c(t)$  che viene illustrato in Fig. 15.

Il segnale campionato viene ottenuto moltiplicando  $f(t)$  per un segnale  $f_1(t)$  di tipo impulsivo, dove

$$f_1(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t-kT) .$$

(vedere capitolo 1, nomenclatura).

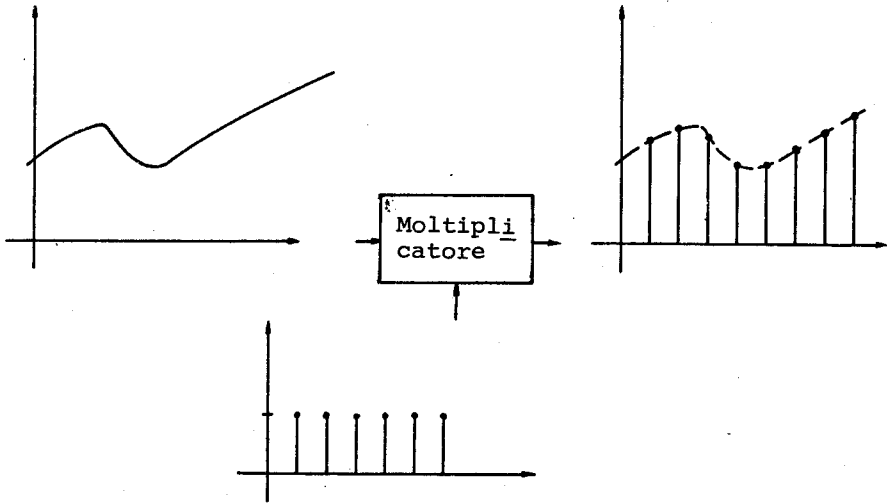


Fig. 15 - Schematizzazione del campionamento di un segnale a tempo continuo  $f(t)$ . Il corrispondente segnale campionato si ottiene moltiplicando il segnale originale per  $f_1(t)$  (segnale impulsivo a tempo discreto di ampiezza unitaria).  $f_c(t)$  è il segnale campionato, mentre  $T$  è il periodo di campionamento.

Si nota che  $f_1(t) \begin{cases} = 1 & \text{per } k = 1, 2, 3, 4 \dots \\ = 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Allora

$$f_c(t) = f(t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

ovvero

$$f_c(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT) \quad (24)$$

Applichiamo ora alla (24) l'algoritmo della trasformata di Laplace, si avrà

$$L[f_c(t)] = L\left[\sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT)\right]$$

Osservando ora che  $f(kT)$  è un termine che non dipende da  $t$ , e scambiando la sommatoria con la trasformata, si avrà

$$L \left[ f_c(t) \right] = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \cdot L \left[ \delta(t-kT) \right]. \quad (25)$$

Introducendo ora la variabile complessa  $s$  si otterrà:

$$F_c(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \cdot e^{-skT}, \quad (26)$$

ricordando che

$$L \left[ \delta(t-kT) \right] = e^{-skT}.$$

la (26) mostra un legame con la (8) del paragrafo 2.3 e in particolare si nota che

$$F(z) = F_c(s) \Big|_{e^{sT} = z}. \quad (27)$$

In altre parole uguagliando la variabile complessa  $z$  con il termine anch'esso complesso  $e^{sT}$ , si ha che la trasformata di Laplace del segnale campionato coincide con la sua trasformata  $z$ .

Si può richiamare anche quanto enunciato alla fine del precedente paragrafo ed il relativo confronto tra la relazione (21) e la (23). Dato infatti che il numero complesso  $s$  è rappresentato da

$$s = \sigma + j\omega,$$

nei casi che abbiamo in precedenza considerato, introducendo la trasformata di Fourier, si aveva  $\sigma = 0$  ed  $\omega$  variava in genere nell'intervallo

$$-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$$

(si veda anche il paragrafo 2.5). In definitiva, al variare di  $\omega$  nel suddetto intervallo si hanno i punti indicati in Fig. 16 sul piano complesso  $s$ . I corrispondenti punti sul piano complesso  $z$  costituiscono la circonferenza di raggio unitario, indicata sempre in figura.

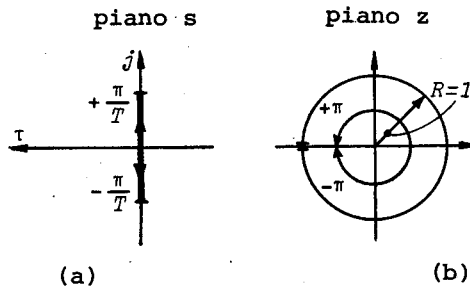


Fig. 16 - Corrispondenza tra i punti dell'asse immaginario sul piano complesso s (a) e i punti del cerchio di raggio unitario sul piano complesso z (b).

## 2.7. Trasformata discreta di Fourier (DFT)

L'analisi di Fourier per segnali a tempo discreto considera un algoritmo estremamente importante nelle applicazioni di elaborazione di segnali numerici: questo algoritmo è detto Trasformata Discreta di Fourier (DFT).

Sia data cioè una sequenza  $\{x(n)\}$  di  $N$  termini, la sua trasformata z è data da

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}, \quad (28)$$

(tenendo conto della (8) del paragrafo 2.3).

Si considerino ora  $k$  valori equidistanti di  $X(z)$  sul cerchio di raggio unitario nel piano complesso  $z$ , vedi Fig. 17.

Tenendo conto della (28) è possibile scrivere la seguente relazione per ogni  $x(k)$  generico della sequenza  $\{x(n)\}$ .

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi kn/N)}. \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (29)$$

L'espressione così ottenuta è detta trasformata discreta di Fourier (DFT) della sequenza  $\{x(n)\}$ . La (29) può essere invertita ottenendo così la trasformata discreta inversa di Fourier (IDFT)

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j(2\pi kn/N)} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (30)$$



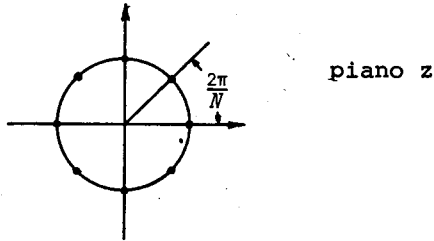


Fig. 17 - Campionamento della circonferenza di raggio unitario nel piano  $z$ . I punti indicati sono distanziati tra loro di un angolo pari a  $2\pi/N$  rad.  $N$  è il numero dei campioni.

Tenendo conto di quanto illustrato nel paragrafo precedente, è bene sottolineare ancora come i coefficienti  $X(k)$  siano  $N$  campioni equidistanti della trasformata di Fourier continua della sequenza  $\{x(n)\}$ . Allora la trasformata di Fourier di un segnale a tempo discreto è costituita dai punti del piano complesso  $z$  situati sul cerchio di raggio unitario. Sia  $\{x(n)\}$  che  $\{X(k)\}$  sono sequenze periodiche, di periodo  $N$ , come è possibile dimostrare tenendo conto che per ogni intero  $k, n$  si ha

$$e^{j(2\pi kn/N)} = e^{j(2\pi k(n+N)/N)} = e^{j(2\pi (k+N)n/N)}.$$

Ciò significa che se vogliamo considerare delle sequenze di durata finita, è come se considerassimo delle sequenze periodiche di periodo  $N$  in cui i valori non nulli sono in corrispondenza di un periodo e al di fuori di esso tutti i valori dei campioni sono nulli; vale a dire:

$X(k)$  è uguale alla (29) per  $k = 0, \dots, N-1$  e  $= 0$  per gli altri valori di  $k$ . Analogamente per  $x(n)$ .

In analogia con l'analisi di Fourier per segnali a tempo continuo si potranno trattare allora le sequenze periodiche di periodo  $N$ , vale a dire quelle  $\tilde{x}(n)$  per cui vale la seguente relazione

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n+kN) \text{ per ogni valore intero di } k. \text{ Il simbolo } \sim \text{ (tilde)}$$

tiene conto del fatto che queste sequenze temporali sono periodiche.

In quest'ultimo caso si considererà la serie discreta di Fourier che viene espressa dalle due relazioni seguenti, con ovvio significato dei simboli introdotti:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(2\pi k n/N)} \quad (31)$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j(2\pi k n/N)} \quad (32)$$

Dimostreremo ora un importante legame di tipo lineare tra  $X(z)$  ed  $\tilde{X}(z)$ .

Sia

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

dato che  $x(n) = \tilde{x}(n)$  per  $n=0, 1, \dots, N-1$ , si può sostituire nella equazione precedente la (32), ottenendo così

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j 2\pi k n/N} \cdot z^{-n}$$

Cambiando l'ordine delle sommatorie si ha:

$$X(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \sum_{n=0}^{N-1} (e^{j 2\pi k/N} \cdot z^{-1})^n$$

La relazione precedente può essere scritta come:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \frac{1-z^{-N}}{1-e^{j 2\pi k/N} \cdot z^{-1}} = \\ &= \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{X}(k)}{1-e^{j 2\pi k/N} \cdot z^{-1}} \end{aligned} \quad (33)$$

Questa relazione esprime la trasformata  $z$ ,  $X(z)$ , di una sequenza di durata finita di lunghezza  $N$ , in termini di  $N$  campioni di  $X(z)$  sul cerchio di raggio unitario nel piano complesso  $z$ .

Sostituendo  $z = e^{j\omega}$  si ha la rappresentazione di Fourier

$$\begin{aligned}
 x(e^{j\omega}) &= \frac{1-e^{j\omega N}}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{x}(k)}{1-e^{j\frac{2\pi k}{N}} \cdot e^{-j\omega}} = \\
 &= \frac{e^{-j\omega(N-1/2)}}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}(k) \frac{\sin [N(\omega - (2\pi/N) \cdot k)/2]}{\sin [\omega - (2\pi/N) \cdot k]/2]}
 \end{aligned} \quad (34)$$

dove si vede che  $H(e^{j\omega})$  e  $\tilde{H}(k)$  sono legati tra loro da una relazione di tipo lineare.

Dato che nel seguito considereremo soltanto sequenze temporali finite, è importante soffermarsi sulla (34) e considerare che sono sufficienti  $N$  coefficienti  $x(k)$  della trasformata di Fourier per individuare la  $\{x(n)\}$  e questo sarà un risultato assai importante per le applicazioni, come si vedrà nel paragrafo 4.3.

Esistono inoltre attualmente dei metodi che permettono di calcolare in modo più rapido, che non nel modo diretto illustrato dalla (33), i coefficienti della DFT, partendo dalla sequenza  $\{x(n)\}$  : si fa riferimento all'algoritmo della trasformata rapida di Fourier: Fast Fourier Transform (FFT), che permette di ridurre considerevolmente i conti richiesti e quindi la possibilità di implementare questo tipo di programma anche su elaboratori di media e piccola dimensione. Per informazioni più dettagliate sulla FFT, si può fare riferimento a (11) (12) (22).